3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2009 nyár A2

1. Vannak-e $\mathbf{R}^3$–nak olyan e és f bázisai, hogy az e-ről az f-re való áttérés mátrixa $\underline{\underline{A}}_{ef} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Ha igen, adjon meg ilyen bázisokat!

MO. Igen, az adott mátrix reguláris, mert Gauss-elimináció után az adódik, hogy $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **5p**

Pl. ha $\mathbf{R}^3$ szokásos bázisa f, akkor e a mátrix oszlopvektoraiból álló rendszer, hisz az áttérés mátrixának definíciója alapján: $\underline{\underline{A}}_{ef} = (\ldots \underline{\underline{e_i}}_f \ldots)$.

5p
10p

2. Legyen az $\mathbf{A}$ operátor a síkon az x tengelyre való vetítés, a $\mathbf{B}$ pedig az x tengelyre való tükrözés. Határozza meg a következő operátorok mag- és képterét: $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$.

MO. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$.
Ker $\mathbf{A}$ az y tengely, Im $\mathbf{A}$ az x tengely. **4p**
$\mathbf{B}$ és így $\mathbf{B}^2$ invertálható ($\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$ az identitás), így $\operatorname{Ker}\mathbf{B} = \operatorname{Ker}\mathbf{B}^2 = \{0\}$, $\operatorname{Im}\mathbf{B} = \operatorname{Im}\mathbf{B}^2 = \mathbb{R}^2$. **2p**
4p
10p

3. Legyen $f(x,y) = \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2}$ az origón kívül, $f(0,0) = 0$.
Folytonosak-e az f parciális deriváltjai az origóban? Döntse el, hogy deriválható-e itt a függvény!

MO. Igen, mert egyrészt $f_x(0,0) = 0$ hiszen $f(x,0) = 0$ minden x-re, **2p**
másrészt $f_x(x,y) = \dfrac{2\,x\,y^4}{(x^2+y^2)^2}$ az origón kívül **2p**

$$\text{és } |f_x(x,y)| \le \left|\frac{2x\,y^4}{(y^2)^2}\right| = 2\,|x| \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0.$$ **3p**

Mivel a függvény invariáns az $x-y$ cserére, a másik eset analóg. Mindkét parciális folytonos tehát az origóban (és persze az origón kívül is, hiszen ott deriválható függvényekből származik deriválhatóságot megőrző operációkkal), **1p**
amiből pedig következik, hogy a függvény deriválható az origóban. **2p**
10p

4. Számítsa ki annak a síktartománynak a területét, mely az $x = y^2$ és az $x = 8 - y^2$ parabolák közé esik!

MO. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{8-y^2} 1\,dx\,dy =$ **5p**

$$= \int_{-2}^{2} 8 - 2y^2\,dy =$$ **3p**

$$= 8y - \frac{2y^3}{3}\bigg|_{-2}^{2} = 16 - \frac{16}{3} - (-16 - \frac{-16}{3}) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}$$ **2p**
10p

5. Legyen $f(x) = \dfrac{\frac{e^x-1}{x} - 1}{x}$ minden $x \neq 0$ esetén.

(a) Folytonossá tehető-e f az origóban, és ha igen, mennyi a folytonosított változat értéke itt?
(b) Ha f folytonossá tehető az origóban, akkor deriválható-e a folytonosított változat itt, és ha igen, mennyi a derivált értéke itt?

MO. e^x Taylor-sora alapján minden $x \neq 0$-ra $\dfrac{e^x-1}{x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \ldots$ **2p**

így, ha definíció szerint $f(0) = \dfrac{1}{2}$, akkor minden x-re $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{6} + \ldots$, **1p**

azaz f mindenütt konvergens hatványsor határfüggvénye, így mindenütt akárhányszor deriválható, **3p**

és a hatványsor f Taylor-sora, **2p**

ezért $f'(0)x = \dfrac{x}{6} \rightsquigarrow f'(0) = \dfrac{1}{6}$ **2p**
10p

Folytatás a következő oldalon.