Fuzzy Rendszerek és Genetikus Algoritmusok

Előadás vázlat

1 előadás

Összeállította: Harmati István Ph.D., egyetemi adjunktus

Felhasznált Irodalom:

Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai. Budapest, 1991.

- **Diadikus felbontás 38**
- **Egyenletrendszerek megoldása (LU) 544**
- **Projektorok (vektorrendszer kiegészitese) 76-78**
- **Shur Dekompozicio 207**
- **Mátrix inverziós lemma (288-289), 72-73, 291**
- **Ljapunov egyenlet megoldása**
- **Algebrai Riccati egyenlet megoldása**

[MDF] Minimális Diadikus Felbontás

[MDF].1. Jelölések

A mátrix: $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$

A j. oszlopvektor: a_j

Az i. sorvektor: a^i

Def [Diád]: A diád egy oszlopvektor és egy sorvektor szorzata (a sorrend fontos!)

Def. Az $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ mátrix $a_{ij} \neq 0$ eleme által generált diádja: $\dfrac{a_j a^i}{a_{ij}} = \dfrac{A e_j e_i^T A}{e_i^T A e_j}$

[MDF].2. A diadikus felbontás algoritmusa

1. Legyen $a_{11} \neq 0$

2. Legyen

$$\overset{(2)}{A} := A - \frac{A e_1 e_1^T A}{e_1^T A e_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{11}} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}}^{u_1} \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}}^{v_1^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overset{(2)}{a}_{22} & \cdots & \overset{(2)}{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \overset{(2)}{a}_{nn} & \cdots & \overset{(2)}{a}_{n2} \end{bmatrix}$$

Azaz az első sor és oszlop lenullázodott.

3. Legyen $a_{22} \neq 0$

$$\overset{(3)}{A} := A - \frac{\overset{(2)}{A} e_2 e_2^T \overset{(2)}{A}}{e_2^T \overset{(2)}{A} e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overset{(2)}{a}_{22} & \cdots & \overset{(2)}{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \overset{(2)}{a}_{nn} & \cdots & \overset{(2)}{a}_{n2} \end{bmatrix} - \frac{1}{a_{22}} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \overset{(2)}{a}_{22} \\ \vdots \\ \overset{(2)}{a}_{n2} \end{bmatrix}}^{u_2} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \overset{(2)}{a}_{22} & \cdots & \overset{(2)}{a}_{2n} \end{bmatrix}}^{v_2^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \overset{(3)}{a}_{33} & \cdots & \overset{(3)}{a}_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \overset{(3)}{a}_{n3} & \cdots & \overset{(3)}{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

Azaz az 1-2. sor és oszlop lenullázodott.

4. Az $\overset{(3)}{A}$ mátrixból egy nemnulla (fő)elem kiválasztásával előző lépés koncepciója alapján addig nullázunk ki új sort és oszlopot, amíg nulla elemekből álló mátrixhoz nem jutunk.

[MDF].3. A mátrix felírása diádokkal

A diadikus felbontás algoritmusa alapján: $A = \sum_{k=1}^{s} \frac{\overset{(k)}{A} e_k e_k^T \overset{(k)}{A}}{e_k^T \overset{(k)}{A} e_k} := \sum_{k=1}^{s} u_k v_k^T \overset{(!)}{=} UV^T$

Azaz diádok összege felírható diádok oszlopvektorából illetve sorvektoraiból alkotott s oszlopos illetve s soros mátrixok szorzataként. (Pl. az $u_1 v_1^T$, $u_2 v_2^T$, ..., $u_s v_s^T$ diádok első sr, első oszlopában lévő eleme pont az U első sorának illetve V^T első oszlopának skalár szorzata, azaz a_{11}!)

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{u_1} \overbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \end{bmatrix}}^{v_1^T} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{u_2} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \end{bmatrix}}^{v_2^T} + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{u_s} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & * & * \end{bmatrix}}^{v_s^T} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_s \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_s^T \end{bmatrix}}_{V^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & * & \cdots & \cdots \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & * & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \end{bmatrix}}_{V^T}$$

Megjegyzés TRF: Ha az algoritmusban kiválasztott a_{ii} főelemeket nem teljesen csak az u_i vektorhoz, hanem $1/\sqrt{a_{ii}}$-t az u_i-hoz, illetve $1/\sqrt{a_{ii}}$-t a v_i^T sorvektorhoz csapjuk, akkor $U = V$ és $A = UU^T$.

Megjegyzés LU: Az A matrix fenti, diadikus felbontása az A matrix LU faktorizációja: $A = UV^T =: L_A U_A$ (L_A alsó háromszög matrix $L_A := U$, U_A felső háromszögmátrix $U_A = V^T$)

Tétel MDF.1: Az A mátrix minimális diadikus felbontásában szereplő diádok u_k oszlopvektorai illetve v_k^T sorvektorai lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

Bizonyítás: Indirekt.

Ha lenne olyan $x_1,\ldots,x_r$ hogy valamely $x_r \neq 0$ mellett $x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots x_ru_r = 0$, akkor

$$u_r = -\frac{x_1}{x_r}u_1 - \frac{x_2}{x_r}u_2 - \cdots - \frac{x_{r-1}}{x_r}u_{r-1}$$

és ezt A mátrix minimális diadikus felbontásába helyettesítjük, akkor

$$A = u_1v_1^T + \cdots + u_{r-1}v_{r-1}^T + \left(-\frac{x_1}{x_r}u_1 - \frac{x_2}{x_r}u_2 - \cdots - \frac{x_{r-1}}{x_r}u_{r-1}\right)v_r^T = u_1\left(v_1^T - \frac{x_1}{x_r}v_r^T\right) + \cdots + u_{r-1}\left(v_{r-1}^T - \frac{x_{r-1}}{x_r}v_r^T\right)$$

Azaz az A mátrixot $r-1$ diád összegeként fel tudnánk írni és az eredeti diadikus felbontás nem lenne minimális!

Tétel MDF.2. Ha az $m \times r$ típusú U máttrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor $UC = 0$ egyenletből következik, hogy $C = 0$.

Bizonyítás: Az UC bármely oszlopát felírva $\sum_{k=1}^{r} u_k c_{kj} = 0$, $j = 1,2,\ldots,n$ ahonnan u_k vektorok lineáris függetlenségéből $c_{kj} = 0$, $k = 1,2,\ldots,r$, $j = 1,2,\ldots,n$.

Tétel MDF.3. Ha az $r \times n$ típusú V^T mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor $BV^T = 0$ egyenletből következik, hogy $B = 0$.
Bizonyítás: Analóg Tétel MDF.2-el

Tétel MDF.4. A *Tétel MDF.2.* és a *Tétel MDF.3* alapján: Ha $UCV^T = 0 \rightarrow C = 0$ (mátrix).

[LEM] Lineáris egyenletrendszer megoldása

Előismeret: LU faktorizáció (diadikus felbontás)

Megoldandó: $Ax = b$ A ismert mátrix, b ismert oszlopvektor

Ismeretlen: x (oszlopvektor)

Megoldás lépései:

1. Az A matrix LU faktorizációjának előállítása: $A = LU$,

   L alsó háromszögmátrix

   U felső háromszög matrix

2. $Ly = b$ megoldása y-ra. Ez könnyen megy, mivel L alsó háromszögmátrix így a megoldás felülről lefelé egymás után jöhet:
$$y_1 = \frac{b_1}{L_{11}},\ y_2 = \frac{b_2 - L_{21}y_1}{L_{22}}, \text{ stb}$$
3. Az $Ux = y$ megoldása x-re. Ez szintén könnyű, mivel U felső háromszög matrix, így így a megoldás alulról felfelé egymás után jöhet, hasonlóan az előző ponthoz

Megjegyzés: Ha A pozitív definit Hermite matrix, akkor numerikusan az LU-hoz hasonló Cholesky faktorizáció előnyös lehet.

Megjegyzés: Egy $Ax = 0$ homogén egyenlet megoldása az $A = LU$ faktorizáció mellett az $Ux = 0$ egyenletből adódik. Ha U oszlopszáma nagyobb, mint a sorszáma, akkor a kettő különbségének megfelelő számú szabad ismeretlen lesz.

[PBI] Projektorok és Biortogonális vektorrendszerek

Előismeret: Minimális Diadikus felbontás

[PBI].1. Alapfogalmak

Def. [Projektor, Idempotens mátrix]: $P^2 = P \quad \rightarrow \quad P^2 - P = P(P-E) = 0$
Következmény: Ha P projektor, akkor $P-E$ is az. Definícóból behelyettesítve látható.

Def. [Hermetikus projektor]: Olyan projektor, ahol $P^H = P$.

Tétel PBI.1: Az egyetlen nemszinguláris projektor az egységmátrix.
Bizonyítás: Ha P nemszinguláris, akkor a definíciót megszorozva P^{-1}-el balról: $P^{-1}P(P-E) = 0 \rightarrow P = E$.
Q.E.D.

Def. [Biortogonális vektorrendszer]. Ha adott n elemű $u_1, u_2, \ldots, u_r$ illetve $v_1^T, v_2^T, \ldots, v_r^T$ vektorokra fennáll a $v_k^T u_l = \delta_{kl}$, $k,l = 1,2,\ldots,n$ öszefüggés, akkor u_l és v_k^T vektorok *biortogonális vektorrendszert* alkotnak.. Ha $r = n$, akkor a vektorrendszert *teljes biortogonális vektorrendszernek* nevezzük, azaz $V^T U = E$.

Tétel PBI.2 (Egerváry) Ha az r-ed rangú P projektort minimális számú diád összegeként irunk fel, akkor ezen diádok oszlop- illetve sorvektorai biortogonális vektorrendszert alkotnak.

Bizonyítás: Legyen P minimális diadikus felbontása:

$$P = \sum_{k=1}^{r} u_k v_k^T = UV^T \quad \rightarrow \quad P^2 - P = UV^T UV^T - UV^T = U\left(V^T U - E_r\right)V^T = 0$$

Mivel U oszlopai és és V^T sorai a minimális diadikus felbontás miatt lineárisan függetlenek (**Tétel MDF.1**), ezért **Tétel MDF.4** alkalmazásával $C = (V^T U - E_r)$ választással $V^T U = E_r$, amit be kellett látni.
Q.E.D.

[PBI].1. Algoritmus biortogonális vektorrendszer teljessé tételére

Algoritmus [Biortogonális vektorrendszer teljessé tételére]

Input: $U = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_r]$ és $V = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_r]$ (nem teljes rendű) biortogonális vektorrendszer, ahol $r < n$, n a vektorok dimenziója, azaz

$$V^T U = E_r$$

Output: $W = [w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_{n-r}]$ és $Z = [z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_{n-r}]$, ahol $[U \quad W]\begin{bmatrix} V^T \\ Z^T \end{bmatrix} = E_n \equiv E$

Lépések:

1. $V^T U$ egy r-edrangú projektor, mivel $U\underbrace{V^T U}_{E}V^T = UV^T$. U és V oszlopai biortogonális vektorrendszert alkotnak [Tétel PBI.2 (Egerváry)](#) szerint**.** $\rightarrow$
2. Az $E - UV^T$ szintén projektor ([Lásd projektor definíció](#)), aminek minimális diadikus felbontása legyen:

$$E - UV^T = WZ^T \qquad \rightarrow \qquad \text{(PBI/9-1)}$$

3. (PBI/9-1) átrendezésével

$$E = UV^T + WZ^T = [U \quad W]\begin{bmatrix} V^T \\ Z^T \end{bmatrix}$$

Ameyek teljes biortogonális vektorrendszert alkotnak. **Q.E.D.**

Megjegyzés: Nem teljes unitér vektorrendszer teljessé tétele szintén ezzel az algoritmussal történik.

[MSF] Mátrix spektrál felbontása

Előismeret: Lineáris egyenletrendszer megoldása
Biortogonális vektorrendszerek

Spektrálfelbontás: $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k v_k^T = U \Lambda V^T$

Ahol: $V^T U = E \quad \rightarrow \quad V^T = U^{-1}$
(U és V oszlopai biortogonális vektorrendszert alkotnak)

Λ diagonális mátrix (sajátrtékekkel)

U modálmátrix (jobboldalis sajátvektorok)

Alternatív felírás (biortoganiltás figyelembevételével)

$A = U \Lambda U^{-1} \quad \rightarrow \quad AU = U\Lambda$ (sajátérték-jobboldali sajátvektor felírás)
$A = (V^T)^{-1} \Lambda V^T \rightarrow \quad V^T A = \Lambda V^T$ (sajátérték-baloldalioldali sajátvektor felírás)

Meghatározás: $Au_k = \lambda_k u_k \quad \rightarrow \quad (\lambda E - A)u = 0 \rightarrow$

Sajátérték meghatározása: $|\lambda E - A| = 0$

Sajátvektor meghatározása: $(\lambda E - A)u = 0$ (ismert λ után homogén lineáris egyenletrendszer)

[SCHUR] Schur dekompozíció

Előismeret: Biortogonális vektorrendszerek
Spektrális felbontás

Tétel SCHUR.1 (Schur) Minden kvadratikus mátrix alkalmasan választott unitér transzformációval felső (vagy alsó) háromszögmátrixra transzformálható.

Bizonyítás:

1. Legyen az A tetszőleges kvadratikus mátrix, amelynek a λ_1 sajátértékéhez tartozó normált sajátvektora x_1

   $x_1^H x_1 = 1$ ($x_1^H x_1$ hermetikus projektor)

2. A PBI.1 algoritmus ez az egyetlen vektor teljes unitér vektorrendszerré tehető: $E - x_1^H x = \sum_{k=2}^{n} y_k y_k^H = YY^H$

   Ekkor: $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$ mátrix unitér mátrix, azaz: $X_1^H X_1 = E$

3. Az A mátrixot az X_1 unitér (hasonlósági) transformációnak alávetve:

$$X_1^H A X_1 = \begin{bmatrix} x_1^H \\ y_2^H \\ \vdots \\ y_n^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_1 & Ay_2 & \cdots & Ay_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

4. Az A_2 megismételve az eljárást:

$$X_2 = \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & x_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$

ami szintén unitér matrix, és végrehajtható vele egy második unitér transzformáció:

$$X_2^H\left(X_1^H A X_1\right)X_2 = \left[\begin{array}{cc|ccc} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & & A_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right]$$

5. Az eljárást folytatva, az $n-1$ lépésben az $U = X_1 X_2 \cdots X_{n-1}$ unitér transzformációval az

$U^H AU$ mátrix felső háromszög mátrix lesz..

Megjegyzés: A Schur dekompozició az U mátrix unitér mivolta miatt (kis kondiciós szám) sok esetben jóval előnyősebb numerikus számításokra, mint a spektrális felbontás és előszeretettel alkalmazzák (pl a MATLAB-ban) olyan problémákra, mint pl. a Lyapunov vagy Riccati egyenletek megoldása.

[MIL] Mátrix Inverziós Lemma

Előismeret: Minimális Diadikus felbontás

[MIL].1. Nilpotens mátrix polinomjának invertálása

Def. [Nilpotens mátrix] $H^n = 0$.

Kiindulás: A következő algebrai azonnosság: $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n$

Mátrixos alak ($x = xH$): $(E-xH)(1+xH+x^2H^2+\cdots+x^{n-1}H^{n-1}) = E - x^nH^n = E$

→ A nilpotens matrix polinomjának inverze:

$$(E-xH)^{-1} = (1+xH+x^2H^2+\cdots+x^{n-1}H^{n-1})$$

[MIL].2. Hipermátrix faktorizációja

Def [szimmetrikusan particionált hipermátrix]. Az $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ hipermátrix szimmetrikusan particionált, ha a diagonális blokkokban szereplő A és D kvadratikus.

Tétel MIL.1. Ha az $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ szimmetrikusan particionált másodrendű hipermátrix és A nemszinguláris, akkor ezen hipermátrix egy faktorizációja: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix}$

Bizonyítás: A hipemátrixból levonva az A blokkal generált hipediádot:

$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$ Ez hiperdiádként felírva: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \left(D-CA^{-1}B\right) \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix}$

Azaz:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \left(D-CA^{-1}B\right) \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ CA^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} \left(D-CA^{-1}B\right) \begin{bmatrix} 0 & E \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

Q.E.D.

Tétel MIL.2. Ha az $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ szimmetrikusan particionált másodrendű hipermátrix és D nemszinguláris, akkor ezen hipermátrix egy faktorizációja:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & BD^{-1} \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ D^{-1}C & E \end{bmatrix}$$

Bizonyítás: Analóg **Tétel MIL.1** bizonyításával.

Def. [Schur komplementum]

$D - CA^{-1}B$ illetve $A - BD^{-1}C$ mátrixokat az A illetve D mátrix Schur komplementumának nevezik.

[MIL].3. Mátrix inverziós lemma

Tekintsük elöször a **Tétel MIL.1** –ben is szereplő mátrix felbontását:

I. Az első tag: $\begin{bmatrix} E & 0 \\ CA^{-1} & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

Ahol

1. Az egységmátrix inverze önmaga

2.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ 2 indexű nilpotens matrix, mivel: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow$

[MIL].1 alapján ennek a nilpotens mátrixnak az inverze: $(E+N)^{-1} = E - N$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CA^{-1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -CA^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

II. **Tétel MIL.1** –ben is szereplő mátrix harmadik tagjának inverzehasonlóan határozható meg

III. Blokkdiagonális mátrix inverze blokkdiagonális ahol az inverz egyes blokkjainak helyén az eredeti blokk inverze szerepel.

$\rightarrow$

$\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix} \qquad (|D| \neq 0) \qquad \text{(MIL/17-1)}$$

Hasonlóan a **Tétel MIL.2** alapján bevezethető az inverz faktorizációja:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -BD^{-1} \\ 0 & E \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix} \qquad (|A| \neq 0) \qquad \text{(MIL/17-2)}$$

(MIL/17-1) és (MIL/17-2) első sor első oszlopának elemei azonosak, ezért a **Mátrix Inverziós Lemma**:

$$\boxed{\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1}}$$

[QR] Sajátérték-feladat megoldása QR transzformációval

Cél: Valós elemű mátrixok sajátérték-feladatának megoldása általános esetben
Kulcsszerep: Hessenberg-féle mátrix. (Csökken a számítási igény, ha ilyen alakon végezzük QR-t)

[Def.] Hessenberg matrix. Egy mátrixot Hessenberg féle mátrixnak nevezünk, ha az $i \geq j+2, \; j = 1,2,\dots,n-2$ (n a matrix mérete) egyenlőtlenséggel jellemzett indexpár által meghatározott elemei nullák:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1,n-1} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2,n-1} & f_{2n} \\ 0 & f_{32} & \cdots & f_{3,n-1} & f_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & f_{n,n-1} & f_{nn} \end{bmatrix}$$

Az eljárás lépései:

1. QR transzformáció bemutatása
   Lényege: Egy adott (A) mátrixot ortogonális transzformációk (TF-k) sorozatával felső háromszögmátrixra (FHM) transzformálunk, amelynek főátlójában megjelennek a sajátértékek.
   Megmutatjuk, hogy a Hessenberg matrix alakja a QR transzformációra invariáns.

2. Transzformáció Hessenberg alakra. Eljárást adunk arra, hogy bármely matrix egy alsó háromszögmátrixszal végzett hasonlósági TF-val felső Hessenberg féle alakra hozható.

3. Hessenberg-féle mátrixra alkalmazva QR transzformációt, iterációs módszert kapunk sajátétékek meghatározására.
   (alkalmas eltolási transzformációval a konvergencia sebessége növelhető)

4. Sajátvektorok meghatározása rekurzív képlettel és a 2. pontban szereplő alsó háromszögmátrix (AHM) segítségével.

[QR].1. A QR transzformáció

[QR].1.1. A QR felbontás

Tétel QR.1. Bármely valós A mátrix felírható $A = QR$ alakban, ahol Q ortogonális mátrix, R pedig FHM.

Bizonyítás.

Először bebizonyítjuk, hogy létezik olyan S_1 ortogonális mátrix, hogy $S_1 A$ első oszlopának főátló alatti elemei nullák. Tekintsük először a következő ortogonális mátrixot:

$$S_{n1} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{n1} & 0 & \cdots & 0 & \sin\vartheta_{n1} \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta_{n1} & 0 & \cdots & 0 & \cos\vartheta_{n1} \end{bmatrix}$$

(Ez egy síkbeli forgatás)

Legyen $a_{11} \neq 0$, $tg\vartheta_{n1} = \dfrac{\sin\vartheta_{n1}}{\cos\vartheta_{n1}} := \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}$ (Ha $a_{11} = 0$, akkor $\vartheta_{n1} = \dfrac{\pi}{2}$)

Szorzással belátható, hogy $M_{n-1} = S_{n1} A$ szorzat első oszlopának utolsó eleme 0, (mivel épp $tg\vartheta_{n1}$ egyenletét adja.)

Hasonlóan, az eredményül kapott (m_{ij}^i elemekből álló) mátrix első oszlopának i. sora is nullázható

$$S_{i1} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_{i1} & & & & \sin\vartheta_{i1} & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ -\sin\vartheta_{i1} & & & & \cos\vartheta_{i1} & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad tg\,\vartheta_1 = \frac{m_{i1}^i}{m_{11}^i}$$

(Ha $m_{11}^i = 0$, akkor $\vartheta_{i1} = \frac{\pi}{2}$)

Rekurzívan folytatva eljutunk M_1 mátrixig, amelynek első oszlopa a főátló alatt zérus:

$M_1 = S_{21} S_{31} \cdots S_{n1} A$ ahol $S_1 = S_{21} S_{31} \cdots S_{n1}$ ortogonális

Az eljárás lépéseit a második oszlop diagonális alatti elemek nullázására alkalmazva szintén egy ortogonális mátrixot kapunk: $S_2 = S_{32} S_{42} \cdots S_{n2}$, így az

$M_2 = S_2 S_1 A$ mátrixnak már első és második oszlopában is a diagonális elemek alatt nullák szerepelnek.

(S_2 mátrixszal való szorzás nem rontja el az első oszlopban már meglévő nullákat)

Általánosan, az

$$R = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} S_{ji} \right) A \qquad S_{ji} = \begin{bmatrix} \ddots &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && \cos\vartheta_{ji} &&&& \sin\vartheta_{ji} && \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ && -\sin\vartheta_{ji} &&&& \cos\vartheta_{ji} && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& \ddots \end{bmatrix}$$

Ortogonális transzformációkkal végzett szorzat felső háromszög mátrixot ad, és az A mátrix

$Q^T = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} S_{ji}$ szorzója egy ortogonális mátrix.

Azaz

$$R = Q^T A \qquad \rightarrow \qquad \boxed{A = QR}$$

(Q.E.D.)

[QR].1.2. A QR transzformáció előállítása

Képezzük a következő mátrixsorozatot: $A_1 := A = Q_1 R_1$

Szorozzuk meg a komponenseket fordított sorrendben: $A_2 = R_1 Q_1 \overset{R_1 = Q^T A_1}{=} Q^T A_1 Q_1$

Képezzük az A_2 QR felbontását: $A_2 = Q_2 R_2$

Megismételve az eljárást, $A_k = Q_k R_k = R_{k-1} Q_{k-1}$ $\quad k = 1,2,\ldots$ (QR/6-1)

$A_1 = A$

Az $R_{k-1} = Q_{k-1}^T A_{k-1}$ és $Q_{k-1} = A_{k-1} R_{k-1}^{-1}$ (QR/6-2)

felírást behelyettesítve (QR/6-1) egyenletbe:

$A_k = Q_{k-1}^T A_{k-1} Q_{k-1} = R_{k-1} A_{k-1} R_{k-1}^{-1}$ $\rightarrow$ Az összes A_k mátrix hasonló, tehát **sajátértékei megegyeznek**.

Legyen $P_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1$ **(FHM)** és (QR/6-3)

$N_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ **(ortogonális)** (QR/6-4)

Ezeket alkalmazva a (QR/6-2) rekurzív összefüggéssel együtt: $A_{k+1} = N_k^T A_1 N_k = P_k A_1 P_k^{-1}$. (QR/6-5)

(QR/6-1), (QR/6-2), (QR/6-4) alapján:

$$\begin{aligned}
N_k P_k &= Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} Q_k R_k R_{k-1} \cdots R_2 R_1 \\
&= Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-1} R_{k-1} Q_{k-1} R_{k-1} \cdots R_2 R_1 \\
&= Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-2} \left(Q_{k-1} R_{k-1}\right)^2 R_{k-2} \cdots R_2 R_1 \qquad \text{(QR/7)} \\
&= Q_1 Q_2 \cdots Q_{k-2} \left(R_{k-2} Q_{k-2}\right)^2 R_{k-2} \cdots R_2 R_1 \\
&= \cdots = \left(Q_1 R_1\right)^k = A^k
\end{aligned}$$

Az A^k hatvány tehát az N_k ortogonális és P_k felső háromszög matrix szorzatára bontható!

[Def] QR transzformáció. Az A matrix (QR/6-1) szerinti rekurziós faktorizáció-sorozata az A matrix QR transzformációja

$$A_k = Q_k R_k = R_{k-1} Q_{k-1} \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$A_1 = A$$

[QR].1.3. A QR transzformáció mátrixsorozatának konvergenciája

Tétel QR.2 Ha az A matrix QR transzformációjával meghatározott A_k mátrixsorozat konvergens, akkor annak határértéke felső háromszögmátrix.

Bizonyítás:

A feltétel alapján az A_k mátrixsorozat konvergens létezik $\rightarrow$ $\lim_{k\to\infty} N_k = N_\infty$

$$+ \text{(QR/6-4)} \rightarrow \lim_{k\to\infty} Q_{k+1} \overset{N_{k+1}=N_k Q_{k+1}}{=} \lim_{k\to\infty} N_k^{-1} N_{k+1} = I$$

(Konvergencia esetén nagy k -ra N_k egyre kevesebbet változik)

Másrészt (QR/6-5) és (QR/6-1) alapján:

$$A_{k+1} = N_k^T A_1 N_k = Q_{k+1} R_{k+1} \quad \rightarrow \quad R_{k+1} = Q_{k+1}^T N_k^T A_1 N_k \xrightarrow{N_{k+1}=N_k Q_{k+1}} R_{k+1} = N_{k+1}^T A_1 N_k$$

$$\rightarrow \lim_{k\to\infty} R_{k+1} = \lim_{k\to\infty} N_{k+1}^T A_1 N_k \longrightarrow A_\infty = \lim_{k\to\infty} A_{k+1} = \lim_{k\to\infty} Q_{k+1} R_{k+1} \xrightarrow{(QR/8-1)} R_\infty$$

(QR/9-1)

Vagyis, ha A_k konvergens, akkor határértéke valóban FHM.

Q.E.D.

Következmény QR.1. Mivel A_k mátrixok hasonlóak az sorozat határértékeként adodó $A_\infty = R_\infty$ FHM főátlójának elemei az A matrix sajátértékei.

Definíció [Schur dekompozíció]. A (QR/9-1) képletben előállított $A_\infty \equiv R_\infty = N_\infty^T A_1 N_\infty$ felbontást Schur dekompoziciónak nevezzük.

Tétel QR.3 A Hessenberg féle mátrixok alakja QR-transzformációval szemben invariáns.

Bizonyítás:

Legyen F egy felső Hessenberg-féle mátrix, amelyre a QR transzformáció:

$$F = F_1 = Q_1 R_1$$

1. Az R_1 FHM
2. Egy FHM (R_1) inverze is FHM ($A^{-1} = adjA / \det A$, FHM adjungáltjában a diagonális alatti elemekhez tartozó minormátrixok diagonális elemeiben lesz nulla, igy nullát ad azon a helyen az invez is.)

1-2 $\rightarrow$ $Q_1 = F_1 R_1^{-1}$ azaz mivel R_1^{-1} FHM, így Q_1 j. oszlopa az F_1 mátrix első j oszlopának lineáris kombinációja $\rightarrow$ Q_1 is Hessenberg mátrix. (QR/9-B1)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{F_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix}}_{R_1}$$

A QR transzformáció alapján:

$$F_2 = R_1 Q_1$$

Mivel az R_1 FHM és Q_1 Hessenberg mátrix (QR/9-B1), az F_2 mátrix i. sora a Q_1 mátrix $i, i+1, \ldots, n$ sorának lineáris kombinációja $\rightarrow$ F_2 Hessenberg mátrix $\rightarrow$ F_k Hessenberg mátrixok alakja a QR transzformációra invariáns.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{F_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{bmatrix}}_{R_1} \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}}_{Q_1}$$

Q.E.D.

[QR].2. Transzformáció Hessenberg alakra

Algoritmus: Az n-edrendű A mátrixot alkalmas Z alsó háromszögmátrixszal végzett hasonlósági transzformációval hozunk felső Hessenberg alakra:

1. Kiindulás: Tetszőleges z_1 vektor

   (Megjegyzés: $z_1 = (1,0,\dots,0)^T$ kiindulás jelentősen csökkenti az igényelt számítási kapacitást.)

2. Képezzük: $$z_2 := Az_1 - f_{11} z_1$$

   Ahol f_{11} értékét abból a feltételből határozzuk meg, hogy z_2 első eleme 0 legyen.

3. Az eljárást folytatva: $$z_{k+1} := Az_k - f_{1k} z_1 - f_{2k} z_2 - \dots - f_{kk} z_k \qquad \text{(QR/11-1)}$$

   ahol f_{ik} ($i = 1,2,\dots,k$) együtthatók megválasztása úgy történik, hogy z_{k+1} első k eleme 0 legyen$\rightarrow$

   $\rightarrow$ A $Z = [z_1 \quad \cdots \quad z_n]$ matrix alsó háromszögmátrix.

   A (QR/11-1) alak felírható mátrixformában: $AZ = ZF$

$$Z = \begin{bmatrix} z_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ z_{21} & z_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdots & f_{1n} \\ 1 & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2n} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f_{n-1,n-1} & f_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & f_{nn} \end{bmatrix}$$

   Azaz F felső Hessenberg mátrix alakú!

4. A Hessenberg alak előállítása: $F = Z^{-1} AZ$

[QR].3. Hessenberg-féle mátrix sajátértékeinek meghatározása QR transzformációval

A QR.3. Tétel alapján a Hessenberg –féle matrix sajátértéke a QR transzformációra invariáns $\rightarrow$

1. Az A mátrixot Hessenberg alakra hozzuk [QR].2 fejezet alapján
2. Alkalmazzuk a [QR].1.2 fejezetben ismertetett QR transzformációt (mátrixsorozatot)
   (n^3 nagyságrendű műveletigény helyett csak n^2 kell Hessenberg alaknál)

A mátrixsorozat egy FHM-hez tart (Következmény QR.1.), aminek diagonális elemei adják a sajátértékeit.

Konvergencia sebessége: $$f_{i,i-1}^{(k)} = \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right|^k$$

Ahol $f_{i,i-1}^{(k)}$ a mátrixsorozat előállításában a $k.$Hessenberg mátrix
λ_i az $i.$ sajátérték.

A konvergencia nem elég nagy, ha két sajátérték között nincs nagy különbség. $\rightarrow$

Konvergencia gyorsítása:

A helyett $A - sI$ mátrixszal dolgozunk, aminek a sajátértékei $\lambda_i - s$ számok lesznek és a konvergencia sebességére jellemző

$\left|\frac{\lambda_i - s}{\lambda_{i-1} - s}\right|$ csökkenthető alkalmas s választással.

[QR].4. Hessenberg-féle mátrix sajátvektorainak meghatározása

Sajátvektor: v_k

Sajátvektorok meghatározása:

$(\lambda_k I - F)v_k = 0$ algebrai egyenletet kell megoldani.

Megjegyzés:
A Hessenberg alak az egyenlet megoldásához szükséges számításokat csökkenti, így előnyösen használható.

[SVD] Szinguláris érték szerinti felbontás (SVD)

Előismeret: QR

[Def.] Szinguláris értékek. Ha az A komplex elemű, n-edrendű és r-edrangú négyzetes matrix és σ_i^2 ($i = 1,2,\ldots,n$) jelöli a pozitív szemidefinit $A^H A$ matrix sajátértékeit, akkor a

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_n = 0$$

számokat a szinguláris értékeknek nevezzük.

Tétel SVD.1. Legyen A tetszőleges $m \times n$ típusú komplex elemű mátrix, és tegyük fel, hogy $m \geq n$. Ekkor létezik olyan m-edrendű U és n-edrendű V mátrix, hogy

$$A = UDV^H \qquad \text{(SVD/14-1)}$$

Ahol $UU^H = I$ (U unitér mátrix)
$VV^H = I$ (V unitér mátrix)

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & 0 & \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \cdots \geq \sigma_n \geq 0$$

A σ_i, $i = 1,2,\ldots,n$ számok az A mátrix szinguláris értékei, V az $A^H A$ mátrix modálmátrixa, U pedig az AA^H mátrix modálmátrixa

Bizonyítás:

Jelölje az $A^H A$ n-edrendű pozitív szemidefinit mátrix modálmátrixát V (sajátérték-sajátvektorfelbontásból kijön, megoldáshoz: QR.3-QR.4), vagyis:

$$V^H A^H AV = \widetilde{D}^2$$

Ahol $\widetilde{D}$ a nemnegatív szinguláris értékekből alkotott mátrix

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

Legyen $F := AV$. Akkor: $F^H F = \widetilde{D}^2$ ami diagonális, vagyis (SVD/15-1)

ha $\rho(A) = r = n$ $\rightarrow$ $f_i^H f_i = \sigma_i^2$ és $f_i^H f_k = 0$ $i \neq k; i,k = 1,\dots,n$

ha $\rho(A) = r < n$ $\rightarrow$ F mátrix $r+1,\dots,n$ oszlopvektora zérusvektor.

Képezzük az $U_r = [u_1 \cdots u_r]$ $u_i = \dfrac{1}{\sigma_i} f_i$ $i = 1,\dots,r$ (SVD/15-2)

unitér vektorendszert és egészítsük ki az $[u_1,\dots,u_m]$ teljes unitér vektorrendszerré ($U_r^H U_r = I_r$ és $I_n - U_r U_r^H$ mátrixot hermetikus diádokra felbontva $I_n - U_r U_r^H = WW^H$ ahol W oszlopai adják a hiányzó vektorokat)

Legyen $U = [u_1 \quad \cdots \quad u_m]$ $\rightarrow$ $U^H U = E$ $\xrightarrow{\text{(SVD/15-1),(SVD/15-2)}}$ $F = AV = UD \rightarrow$ $\boxed{A = UDV^H}$

Végül megmutatjuk, hogy U oszlopvektorai az AA^H sajátvektorai. Az (SVD/14-1)-ből:

$$A^H = VD^T U^H \quad \rightarrow \quad AA^H U = U \left[\begin{array}{c|c} \tilde{D}^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \qquad \text{azaz} \quad AA^H u_i = \sigma_i^2 u_i$$

Vagyis U oszlopvektorai valóban az AA^H sajátvektorai.

Q.E.D.

Következmény SVD.1:

$$A = UDV^H \quad \rightarrow \quad Av_i = \sigma_i u_i$$

$$A^H u_i = \sigma_i v_i$$

[MPI] A Moore-Penrose féle inverz (pszeudo inverz)

Előismeret: SVD

Tétel MPI.1. Ha az r-edrangú $m \times n$ $(m \geq n)$ típusú A mátrix SVD felbontása $A = UDV^H$, akkor az A^+ pszeudoinverz előállítható

$$A^+ = VD^+U^H$$

Alakban, ahol

$$D^+ = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_r^{-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & 0 & & & \end{bmatrix} \qquad (m \times n \text{ típusú})$$

Mert teljesül:

1. $AA^+A = A$
2. $A^+AA^+ = A^+$
3. $\left(AA^+\right)^H = AA^+$
4. $\left(A^+A\right)^H = A^+A$

[LYE] Ljapunov egyenlet megoldása

Irodalom: G.H. Golub, S. Nash, C Van Holen: A Hessenberg-Schur Method for the problem AX+XB=C

Előismeret: LEM Lineáris egyenletrendszer megoldása
MSF Mátrix spektrál felbontása
SCHUR Schur dekompozíció
QR QR dekompozíció

Feladat: $AX + XB = C$ (Sylvester) egyenlet megoldása X -re.

Megjegyzés: $AX + XA^T = -Q$ Ljapunov egyenlet is ilyen típus.

[LYE].1. A Lyapunov egyenlet megoldási koncepciója

Feladat: $AX + XB = C$ (Sylvester) egyenlet megoldása X -re.

Megoldás lépései:

1. Az egyenlet bővítése:

   $$\left(U^{-1}AU\right)\left(U^{-1}XV\right)+\left(U^{-1}XV\right)\left(V^{-1}BV\right)=\left(U^{-1}CV\right)$$

   Az U és V megválasztása különböző szempontok szerint lehet. Lásd [LYE].2 Bartels-Stewart és [LYE].3 Hessenbert-Schur módszert.

2. A hasonlósági transzformációk elvégzése A és B-re: $A_1 = U^{-1}AU$ $B_1 = V^{-1}BV$

3. Az $UF = CV$ egyenlet megoldása F -re.

4. Az $A_1Y + YB_1 = F$ megoldása Y-ra. Ez mind [LYE].2 Bartels-Stewart és [LYE].3 Hessenbert-Schur módszer esetén is könnyű, mivel a transzformált $A_1 = U^{-1}AU$ és $B_1 = V^{-1}BV$ speciális alakú. (Részletek [LYE].2 és [LYE].3 helyen.)

5. Az $XV = UY$ egyenlet megoldása X -re.

[LYE].2. A Bartels-Stewart Algoritmus

LYE.1/ 2.lépés konkrétan:

QR algoritmus használatával Schur faktorizációt hajtunk végre a Ljapunov egyenlet (LYE.1) megoldási koncepciójában U és V megválasztásánál (LYE.1/ 2.lépés) $\rightarrow$

$$U^T A U = R \qquad V^T B^T V = S$$

R, S felső (kvázi-) háromszögmátrixok
U, V ortogonális transzformációk

LYE.1/ 4 lépés konkrétan:

Megoldandó:

$$RY + YS^T = F \qquad (F = U^T C V, \quad Y = U^T X V)$$

A megoldás kihasználja, hogy a Schur dekompozíció után S felső háromszög matrix, azaz $s_{k,k-1} = 0$ $\rightarrow$

$$(R + s_{kk} I) y_k = f_k - \sum_{j=k+1}^{n} s_{kj} y_j \quad \text{ahol } Y = [y_1 \mid y_2 \mid \cdots \mid y_n] \qquad F = [f_1 \mid f_2 \mid \cdots \mid f_n]$$

Azaz y_k a speciális struktúra miatt könnyen számolható $y_{k+1}, \ldots, y_n$ ismeretében (hátratartó rekurzió)

Megjegyzés: $s_{k,k-1} \neq 0$ esetén (complex konjugált számok jönnek be) az y_k és y_{k-1} egyszerre számolandó.

Megjegyzés: Schur faktorizáció helyett elvileg a spektrális felbontást + Gauss eliminációt is használhatnánk, azonban az így definiált hasonlósági transzformációk nem ortogonálisak ($\rightarrow$ kondiciószámuk nagyobb mint 1) $\rightarrow$ numerikusan nem robusztus.

[LYE].3. Hessenberg-Schur módszer

LYE.1/ 2.lépés konkrétan:

$$U^T AU = H \qquad V^T B^T V = S$$

H felső ***Hessenberg matrix*** (előállítása QR algoritmusnál látható $\to$ QR.2)
S felső (kvázi-) háromszögmátrixok
U,V ortogonális transzformációk

LYE.1/ 4 lépés konkrétan:

Megoldandó: $HY + YS^T = F \qquad (F = U^T CV, \quad Y = U^T XV)$

A megoldás hasonló a Bartels-Stewart módszerhez, kihasználja a H Hessenberg matrix és a S felső háromszög matrix speciális alakját, azaz $s_{k,k-1} = 0$, $h_{ij} = 0$, $i > j+1 \to$

$$(H + s_{kk} I)y_k = f_k - \sum_{j=k+1}^{n} s_{kj} y_j \quad \text{ahol } Y = [y_1 \mid y_2 \mid \cdots \mid y_n] \qquad F = [f_1 \mid f_2 \mid \cdots \mid f_n]$$

Azaz y_k a speciális struktúra miatt könnyen számolható $y_{k+1}, \ldots, y_n$ ismeretében (hátratartó rekurzió)

Megjegyzés: $s_{k,k-1} \neq 0$ esetén (complex konjugált számok jönnek be) az y_k és y_{k-1} egyszerre számolandó:

$$H[y_{k-1} \mid y_k] + [y_{k-1} \mid y_k]\begin{bmatrix} s_{k-1,k-1} & s_{k,k-1} \\ s_{k-1,k} & s_{k,k} \end{bmatrix} = [f_{k-1} \mid f_k] - \sum_{j=k+1}^{n} [s_{k-1,j} y_j \mid s_{kj} y_j]$$

Megjegyzés: A Hessenberg Schur módszer:

- Még a Bartels-Stewart módszernél is stabilabb
- Numerikusan gyorsabb, mint a Bartels-Stewart módszer

[LYE].4 Hessenberg-Schur módszer kiterjesztése

[LYE].4.1. Diszkrét Lyapunov egyenlet megoldása

Megoldandó X -re: $AXM + X = C$ $A \in R^{m\times m}, M \in R^{n\times n}, C \in R^{m\times n}, X \in R^{m\times n}$

LYE.1/ 2.lépés konkrétan: $U^T AU = H$ $V^T B^T V = S$

H felső ***Hessenberg matrix*** (előállítása QR algoritmusnál látható $\to$ QR.2)
S felső (kvázi-) háromszögmátrixok
U, V ortogonális transzformációk: $U^T U = I$, $V^T V = I$

LYE.1/ 4 lépés konkrétan:

Megoldandó: $HYS^T + Y = F$ $(F = U^T CV,\quad Y = U^T XV)$

A megoldás hasonló a Bartels-Stewart módszerhez, kihasználja a H Hessenberg matrix és a S felső háromszög matrix speciális alakját, azaz $s_{k,k-1} = 0$, $h_{ij} = 0$, $i > j+1 \to$

$$H\left(\sum_{j=k}^{n} s_{kj} y_j\right) + y_k = f_k \quad \to \quad (s_{kk} H + I) y_k = f_k - H \sum_{j=k+1}^{n} s_{kj} y_j$$

ahol $Y = [y_1 \mid y_2 \mid \cdots \mid y_n]$ $F = [f_1 \mid f_2 \mid \cdots \mid f_n]$

Azaz y_k a speciális struktúra miatt könnyen számolható $y_{k+1}, \ldots, y_n$ ismeretében (hátratartó rekurzió)

Megjegyzés: Diszkrét Ljapunov egyenletben $HYS^T + Y = F$ helyett $HYS^T - Y = F$ van. Ekkor a megoldás:

$$(s_{kk} H - I) y_k = f_k - H \sum_{j=k+1}^{n} s_{kj} y_j$$

[LYE].4.2. Egyenlet: $AXM + LXB = C$

Ha az M és L nemszinguláris, akkor a feladat visszavezethető az $AX + XB = C$ formára:

$$\left(L^{-1}A\right)X + X\left(BM^{-1}\right) = L^{-1}CM^{-1}$$

[ARE] Riccati Egyenlet Megoldása

Irodalom: A. J. Laub: A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equation. IEEE Transaction on Automatic Control Vol AC-24, No 6, 913-921, 1979.

Előismeret: Minimális Diadikus felbontás
LEM Lineáris egyenletrendszer megoldása
MSF Mátrix spektrál felbontása
SCHUR Schur dekompozíció
QR QR dekompozíció

Definíciók és jelölések:

Def. [Ortogonális matrix]: Az $A \in R^{n \times n}$ mátrix ortogonális, ha $A^T = A^{-1}$.

Def. [Unitér matrix]: Az $A \in R^{n \times n}$ mátrix unitér, ha $A^H = A^{-1}$.

Legyen I egy n-edrendű egységmátrix és legyen $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (J^T = J^{-1} = -J) \quad \rightarrow$

Def. [Hamilton matrix]: Az $A \in R^{2n \times 2n}$ mátrix Hamilton mátrix, ha $J^{-1} A^T J = -A^{-1}$.

Def. [Szimplektikus matrix]: Az $A \in R^{2n \times 2n}$ mátrix szimplektikus mátrix, ha $J^{-1} A^T J = A^{-1}$.

[ARE].1. Folytonos idejű algebrai Riccati egyenlet megoldása

[ARE]1.1. A Feladat

Megoldandó (X -re): $F^T X + XF - XGX + H = 0$ (ARE/41-1)

$$F, X, G, H \in R^{n\times n}, \quad G = G^T \geq 0, \quad H = H^T \geq 0$$

Feltevés [ARE].1: (F, B) stabilizáló pár, ahol $BB^T = G$ és $rank(B) = rank(G)$

(B a G teljes rangú faktorizációja: lásd diadkus felbontás: Megjegyzés TRF)

(F, C) detektálható pár, ahol $C^T C = H$ és $rank(C) = rank(H)$

(C a H teljes rangú faktorizációja: lásd diadkus felbontás: Megjegyzés TRF)

Def. [(Folytonos) Stabilizálható mátrixpár]. Az (A, B), $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ pár stabilizáló pár a folytonos idejű rendszerelméletben, ha $\mathrm{rank}[\lambda I - A, B] = n$ *minden* nemnegatív valós részű komplex $\lambda \in C$ esetén.

Def. [(Folytonos) Detektálható mátrixpár]. Az (A, B) detektálható, ha $\left(A^T, B^T\right)$ stabilizálható.

Megoldhatóság: Ha a **Feltevés [ARE].1** teljesül, akkor a folytonosidejű (ARE/41-1) Riccati egyenletnek van egyértelmű (pozitív szemidefinit) megoldása.

[ARE].1.2. Megoldás1.

1.lépés: Az ARE-hez Hamilton matrix defininiálása:

$$Z = \begin{bmatrix} F & -G \\ -H & -F^T \end{bmatrix} \in R^{2n\times 2n}$$

Feltevés [ARE].1 biztosítja, hogy Z sajátértékei nem tisztán képzetesek.

2. lépés: Z matrix spektrális előállítása:

$$V^{-1}ZV = \begin{bmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \qquad \Lambda \in R^{n\times n} \text{ diagonális,} \qquad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

3. lépés:

Tétel [ARE].1. Ha **Feltevés [ARE].1** fennáll, akkor

- V_{11} invertálható és az ARE megoldása: $\boxed{X = V_{21}V_{11}^{-1}}$ ahol $X = X^T \geq 0$

Bizonyítás:

A 2. lépésben szereplő egyenletet átalakítva és az első n oszlopát tekintve:

$$V^{-1}ZV = \begin{bmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad ZV = V\begin{bmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad Z\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}(-\Lambda) \rightarrow \qquad \text{(ARE/43-5)}$$

$$FV_{11} - GV_{21} = V_{11}(-\Lambda) \qquad / \; V_{21}V_{11}^{-1} * \textbf{ és } \; *V_{11}^{-1} \qquad \text{(ARE/43-2)}$$
$$-HV_{11} - F^{T}V_{21} = V_{21}(-\Lambda) \qquad /*V_{11}^{-1} \qquad \text{(ARE/43-3)}$$

$\rightarrow \; V_{21}V_{11}^{-1} *$ (ARE/43-2) $*V_{11}^{-1}$ **és** (ARE/43-3) $*V_{11}^{-1}$

$$V_{21}V_{11}^{-1}F - V_{21}V_{11}^{-1}GV_{21}V_{11}^{-1} = V_{21}(-\Lambda)V_{11}^{-1} \qquad \text{(ARE/43-3)}$$
$$-H - F^{T}V_{21}V_{11}^{-1} = V_{21}(-\Lambda)V_{11}^{-1} \qquad \text{(ARE/43-4)}$$

(ARE/43-3) és (ARE/43-4) jobboldaluk egyenlő, így baloldaluk is:

$$V_{21}V_{11}^{-1}F - V_{21}V_{11}^{-1}GV_{21}V_{11}^{-1} = -H - F^{T}V_{21}V_{11}^{-1}$$

Amit nullára rendezve és $X = V_{21}V_{11}^{-1}$ jelölést bevezetve látható, hogy $X = V_{21}V_{11}^{-1}$ a Riccati egyenlet megoldása:

$$F^{T}X + XF - XGX + H = 0$$

Q.E.D.

[ARE].1.2. Megoldás 2.

Ugyanaz, mint [ARE].1 Megoldás 1. csak:

2. lépés: Z matrix Schur faktorizációjának előállítása ortogonális transzformációval (spektális felbontás helyett):

$$U^T ZU = S = \begin{bmatrix} S_{11} & \bar{S}12 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \qquad S_{ij} \in R^{n\times n} \qquad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \qquad U^T U = I$$

3.lépés:

Tétel [ARE].2. Ha **Feltevés [ARE].1** fennáll, akkor

- U_{11} invertálható és az ARE megoldása: $\boxed{X = U_{21}U_{11}^{-1}}$ ahol $X = X^T \geq 0$
- A zárt kör spektruma: $\sigma\left(S_{11}\right) = \sigma\left(F - GX\right)$

Megjegyzés: Tétel [ARE].2. megoldása azért előnyös **Tétel [ARE].1**-hez képest, mert

- Numerikusan stabilabb Schur dekompozíció miatt, főleg, ha többszörös multiplicitású sajátértékek vannak.
- A sajátvektorokat QR algoritmussal számova a Schur dekompozíció egyébként is előáll (azaz számításigény megtakarítás)

Bizonyítás (Tétel [ARE].2.):

A 2. lépésben szereplő egyenletet átalakítva és az első n oszlopát tekintve:

$$U^T ZU = S = \begin{bmatrix} S_{11} & \bar{S}12 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \quad \to \quad ZU = U\begin{bmatrix} S_{11} & \bar{S}12 \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix} \quad \to \quad Z\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} S_{11} \quad \to$$

Transzformálja $T \in R^{n \times n}$ az S_{11} mátrixot a diagonális $-\Lambda$ Jordan alakra, akkor

$$Z\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} TT^{-1} S_{11} T = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} T(-\Lambda)$$

Ezt összehasonlítva $Z\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}(-\Lambda)$, azaz (ARE/43-5)-el $\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} T$, pontosabban elég, ha $\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} T$ a sajátvektorok valahányszorosa, akkor is teljesíti (ARE/43-5)-öt:

$$\begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} T \qquad (D \text{ diagonális}) \quad \to \quad \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix} DT^{-1}$$

Azonban $X = U_{21} U_{11}^{-1}$ szintén megoldása az ARE-nak, mivel

$$U_{21} U_{11}^{-1} = V_{21} DT^{-1} \left(V_{11} DT^{-1} \right)^{-1} = V_{21} V_{11}^{-1}$$

És $X = V_{21} V_{11}^{-1}$ a Tétel [ARE].1 miatt megoldás.

[ARE].2. Diszkrét idejű algebrai Riccati egyenlet megoldása

Megoldandó (X -re): $F^T XF - X - F^T XG_1\left(G_2 + G_1^T XG_1\right)^{-1} G_1^T XF + H = 0$ (ARE/D46-1)

$F, X, H \in R^{n\times n}$, $G_1 \in R^{n\times m}$, $G_2 \in R^{m\times m}$, $m < n$ $G_2 = G_2^T > 0$, $H = H^T \geq 0$

Feltevés [ARE].2: (F, G_1) stabilizálható pár
(F, C) detektálható pár

ahol $C^T C = H$ és $rank(C) = rank(H)$

(C a H teljes rangú faktorizációja: lásd diadkus felbontás: Megjegyzés TRF)

F invertálható

Megoldás:
Analóg a folytonos esethez, csak most itt nem Hamilton, hanem a következő szimplektikus mátrixból kell indulni: (Schur módszert alkalmazva)

$$Z = \begin{bmatrix} F + GF^{-T} H & -GF^{-T} \\ -F^{-T} H & F^{-T} \end{bmatrix} \qquad G = G_1 G_2^{-1} G_1^T$$

(A feltételek garantálják, hogy Z -nek nincsenek sajátértékei az egységkörön)

Megjegyzés: A zárt kör spektruma: $\sigma(S_{11}) = \sigma\left(F - G_1\left(G_2 + G_1^T XG_1\right)^{-1} G_1^T XF\right)$