MEGOLDÁS

1.1 feladat:

(a)

FI:

A gerjesztés-válasz stabilitás szükséges és elégséges feltétele folytonos időben: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$

Behelyettesítve a konkrét feladatot:

$$h(t) = 2\varepsilon(t)e^{-0,3t}\cos(5t+1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |2\underbrace{\varepsilon(t)}_{\substack{=0,\ t<0 \\ =1,\ t>0}} e^{-0,3t}\cos(5t+1)|\, dt = 2\int_{0}^{\infty} |\underbrace{e^{-0,3t}}_{>0}\underbrace{\cos(5t+1)}_{\in[-1,\,1]}|\, dt \leqslant \frac{2}{-0,3}[e^{-0,3t}]_{t=0}^{\infty} = \frac{2}{0,3} < \infty$$

Tehát ez a rendszer gerjesztés-válasz stabil.

DI:

A gerjesztés-válasz stabilitás szükséges és elégséges feltétele diszkrét időben: $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |h[i]| < \infty$

Behelyettesítve a konkrét feladatot:

$$h[k] = 6\delta[k] + \varepsilon[k-1]\{4(0,8)^k + (-3)(-0,4)^k\}$$

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |\underbrace{6\delta[i]}_{\geqslant 0} + \underbrace{\varepsilon[i-1]}_{\substack{=0,\ i<1 \\ =1,\ i\geqslant 1}}\{4(0,8)^i + (-3)(-0,4)^i\}| \underset{*}{\overset{}{\leqslant}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{6\delta[i]}_{\substack{=6,\ i=0 \\ =0,\ i\neq 0}} + \sum_{i=1}^{\infty} |4(0,8)^i + (-3)(-0,4)^i| \underset{*}{\leqslant}$$

$$\underset{*}{\leqslant} 6 + 4\sum_{i=1}^{\infty} 0,8^i + 3\sum_{i=1}^{\infty} 0,4^i = 6 + 4\frac{0,8}{1-0,8} + 3\frac{0,4}{1-0,4} = 24 < \infty$$

A *-gal jelölt helyeken felhasználtam az általánosított háromszög-egyenlőtlenséget, miszerint $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

Tehát ez a rendszer gerjesztés-válasz stabil.

(b)

Folytonos időben az impulzusválaszban lévő e kivetőjében t együtthatóját egy pozitív számra cserélve a rendszer biztosan nem lesz gerjesztés-válasz stabil, hiszen így ez a hatvány divergens.

Diszkrét időben bármelyik k kitevőjű hatvány alapját egy 1-nél nagyobb abszolút értékű számra cserélve érhetjük el ugyanezt.

(c)

A megadott u[k] gerjesztés értéke 5, ha 0 ≤ k < 6, és 0 minden más esetben.

Az rendszer impulzusválaszát a megadott képletbe való behelyettesítéssel kaphatjuk:

$$h[0] = 6\underbrace{\delta[0]}_{=1} + \underbrace{\varepsilon[0-1]}_{=0}\{4(0{,}8)^0 + (-3)(-0{,}4)^0\} = 6$$

$$h[1] = 6\underbrace{\delta[1]}_{=0} + \underbrace{\varepsilon[1-1]}_{=1}\{4(0{,}8)^1 + (-3)(-0{,}4)^1\} = 4\cdot 0{,}8 + (-3)\cdot(-0{,}4) = 4{,}4$$

$$h[2] = 6\underbrace{\delta[2]}_{=0} + \underbrace{\varepsilon[2-1]}_{=1}\{4(0{,}8)^2 + (-3)(-0{,}4)^2\} = 4\cdot(0{,}8)^2 + (-3)\cdot(-0{,}4)^2 = 2{,}08$$

A gerjesztésválaszt pedig a tanult konvolúciós képlettel számolhatjuk ki:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]\cdot u[k-i]$$

Ezeket felhasználva a következőt kapjuk:

$$y[0] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[i]}_{=0,\ i<0} \cdot \underbrace{u[0-i]}_{=0,\ i>0} = h[0]\cdot u[0] = 6\cdot 5 = 30$$

$$y[1] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[i]}_{=0,\ i<0} \cdot \underbrace{u[1-i]}_{=0,\ i>1} = h[0]\cdot u[1] + h[1]\cdot u[0] = 6\cdot 5 + 4{,}4\cdot 5 = 52$$

$$y[2] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underbrace{h[i]}_{=0,\ i<0} \cdot \underbrace{u[2-i]}_{=0,\ i>2} = h[0]\cdot u[2] + h[1]\cdot u[1] + h[2]\cdot u[0] = 6\cdot 5 + 4{,}4\cdot 5 + 2{,}08\cdot 5 = 62{,}4$$

(d)

FI:

A folytonos idejű rendszer válaszjele konvolúcióval kapható meg:

$$y(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\,d\tau$$

A megadott impulzusválaszt és gerjesztést behelyettesítve:

$$y(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} 2\;\underbrace{\varepsilon(\tau)}_{=0,\ \tau<0}\; e^{-0{,}3\tau}\cos(5\tau+1)\cdot(-5)\,d\tau \;=\; -10\int_{0}^{\infty} e^{-0{,}3\tau}\underbrace{\cos(5\tau+1)}_{Euler-képlet}\,d\tau \;=$$

$$=\;-5\int_{0}^{\infty} e^{-0{,}3\tau}\left(e^{j(5\tau+1)}+e^{-j(5\tau+1)}\right)d\tau = -5\int_{0}^{\infty} e^{-0{,}3\tau}\cdot e^{j5\tau}\cdot e^{j} + e^{-0{,}3\tau}\cdot e^{-j5\tau}\cdot e^{-j}\,d\tau \;=$$

$$=\;-5\left[e^{j}\cdot\frac{e^{-0{,}3\tau+j5\tau}}{-0{,}3+j5}+e^{-j}\cdot\frac{e^{-0{,}3\tau-j5\tau}}{-0{,}3-j5}\right]_{\tau=0}^{\infty}$$

A nevezőket átírva exponenciális alakra:

$$\alpha=\arctan\left(\frac{5}{0{,}3}\right);\quad r=\sqrt{(0{,}3)^2+5^2};\qquad -0{,}3+j5=r\cdot e^{j(\pi-\alpha)};\quad -0{,}3-j5=r\cdot e^{j(\pi+\alpha)}$$

$$y(t)\;=\;-\frac{5}{r}\left[e^{j}\cdot\frac{e^{-0{,}3\tau+j5\tau}}{e^{j(\pi-\alpha)}}+e^{-j}\cdot\frac{e^{-0{,}3\tau-j5\tau}}{e^{j(\pi+\alpha)}}\right]_{\tau=0}^{\infty}\;=$$

$$=\;-\frac{5}{r}\left[e^{j}\cdot e^{-0{,}3\tau+j5\tau}\cdot e^{-j(\pi-\alpha)}+e^{-j}\cdot e^{-0{,}3\tau-j5\tau}\cdot e^{-j(\pi+\alpha)}\right]_{\tau=0}^{\infty}\;=$$

$$=\;-\frac{5}{r}\left[e^{-0{,}3\tau}\left(e^{j}\cdot e^{j5\tau}\cdot e^{-j(\pi-\alpha)}+e^{-j}\cdot e^{-j5\tau}\cdot e^{-j(\pi+\alpha)}\right)\right]_{\tau=0}^{\infty}\;=$$

$$=\;-\frac{10}{r}\left[e^{-0{,}3\tau}\cdot\frac{\left(e^{j(1+5\tau-(\pi-\alpha))}+e^{-j(1+5\tau-(\pi-\alpha))}\right)}{2}\right]_{\tau=0}^{\infty}\;=$$

$$=\;-\frac{10}{r}\left[\underbrace{e^{-0{,}3\tau}}_{\to 0,\ \tau\to\infty}\cdot\underbrace{\cos\left(1+5\tau-(\pi-\alpha)\right)}_{Euler-képletből}\right]_{\tau=0}^{\infty}\;=$$

$$=\;\frac{10}{\sqrt{(0{,}3)^2+5^2}}\cos\left(1-\pi+\arctan\left(\frac{5}{0{,}3}\right)\right)\;\approx\;1{,}612301$$

DI:

A diszkrét idejű rendszer válaszjele konvolúcióval kapható meg:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \cdot u[k-i]$$

A megadott impulzusválaszt és gerjesztést behelyettesítve:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 10(-9)^{(k-i)} \cdot \left(6\delta[i] + \varepsilon[i-1]\left\{4(0{,}8)^i + (-3)(-0{,}4)^i\right\}\right) =$$

$$= 6\sum_{i=-\infty}^{\infty} 10(-9)^{(k-i)} \cdot \underbrace{\delta[i]}_{=0,\ i\neq 0} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} 10(-9)^{(k-i)} \underbrace{\varepsilon[i-1]}_{=0,\ i<1} \left\{4(0{,}8)^i + (-3)(-0{,}4)^i\right\} =$$

$$= 6 \cdot 10 \cdot (-9)^k + 10\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{(-9)^{(k-i)}}_{=\frac{(-9)^k}{(-9)^i}} \left\{4(0{,}8)^i + (-3)(-0{,}4)^i\right\} =$$

$$= (-9)^k \left(60 + 10\left(4\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{0{,}8}{-9}\right)^i + (-3)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{-0{,}4}{-9}\right)^i\right)\right) =$$

$$= (-9)^k \left(60 + 10\left(4\left(\frac{0{,}8/(-9)}{1-(0{,}8/(-9))}\right) + (-3)\left(\frac{0{,}4/9}{1-(0{,}4/9)}\right)\right)\right) \approx$$

$$\approx (-9)^k \left(60 + 10\left(4(-0{,}0816327) + (-3)\,0{,}0465116\right)\right) = 55{,}339344\,(-9)^k$$

1.2 feladat:

(a)

FI:

Az A mátrix sajátértékei:

$$\begin{vmatrix} -0{,}4-\lambda & 0{,}6 \\ -0{,}4 & -1{,}4-\lambda \end{vmatrix} = (-0{,}4-\lambda)(-1{,}4-\lambda) - 0{,}6(-0{,}4) = \lambda^2 + 1{,}8\lambda + 0{,}8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1{,}8\pm\sqrt{1{,}8^2-4\cdot 1\cdot 0{,}8}}{2\cdot 1} = \frac{-1{,}8\pm 0{,}2}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= -0{,}8 \end{aligned}$$

Lagrange-mátrixai:

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}}-\lambda_2\underline{\underline{I}}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}6 \\ -0{,}4 & -1{,}4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}8 & 0 \\ 0 & -0{,}8 \end{bmatrix}}{-0{,}2} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{L}}_2 = \frac{\underline{\underline{A}}-\lambda_1\underline{\underline{I}}}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{\begin{bmatrix} -0{,}4 & 0{,}6 \\ -0{,}4 & -1{,}4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}{0{,}2} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Az impulzusválasz kiszámítása a tanult képletekkel:

$$h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t}\underline{B}$$

$$e^{\underline{\underline{A}}t} = e^{\lambda_1 t}\underline{\underline{L}}_1 + e^{\lambda_2 t}\underline{\underline{L}}_2$$

$$\underline{C}^T\underline{\underline{L}}_1\underline{B} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -1{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ -0{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -1{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = -1{,}25$$

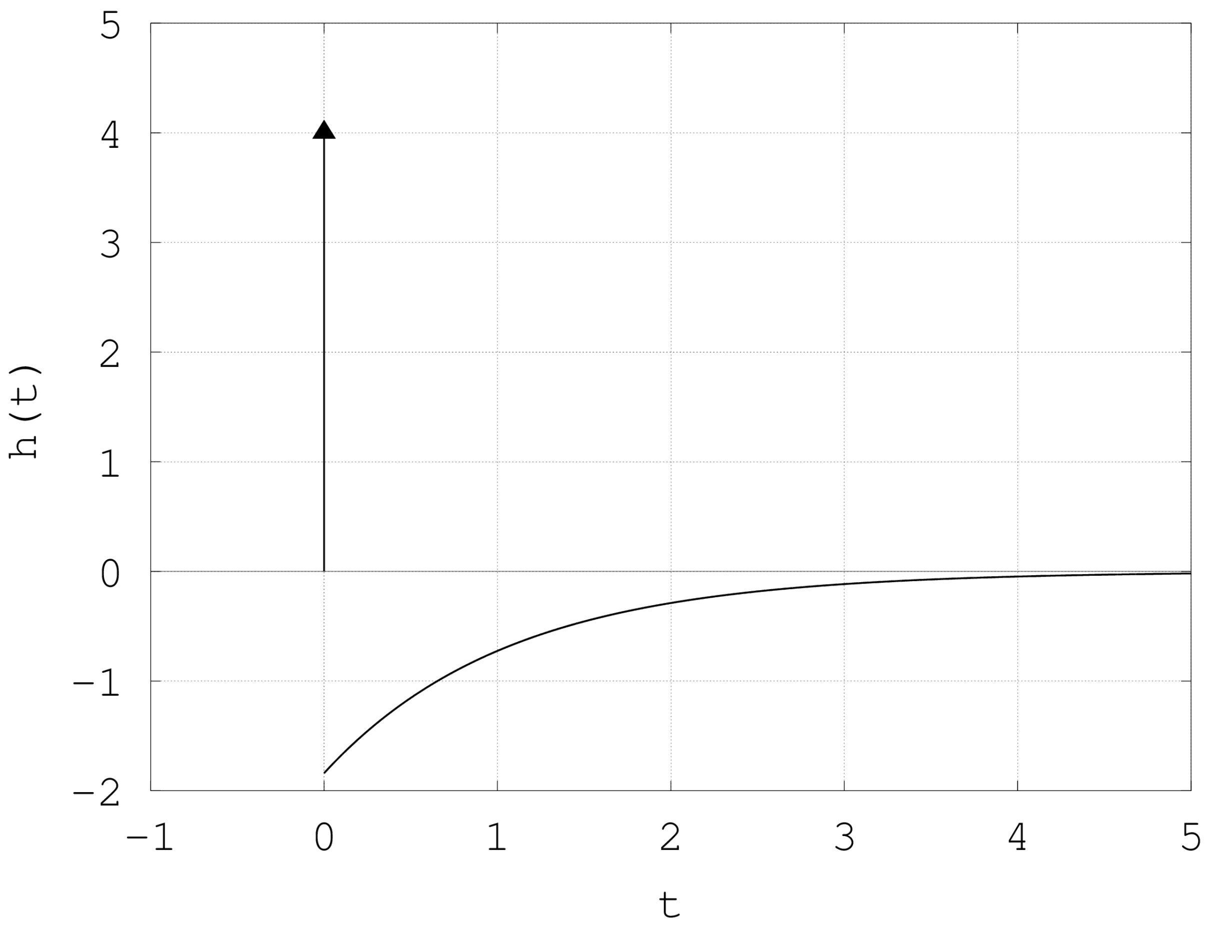
$$\underline{C}^T\underline{\underline{L}}_2\underline{B} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -1{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ -0{,}7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 & -1{,}6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}3 \\ 0{,}2 \end{bmatrix} = -0{,}59$$

$$\underline{C}^T e^{\underline{\underline{A}}t}\underline{B} = e^{\lambda_1 t}\underline{C}^T\underline{\underline{L}}_1\underline{B} + e^{\lambda_2 t}\underline{C}^T\underline{\underline{L}}_2\underline{B} = e^{-1t}(-1{,}25) + e^{-0{,}8t}(-0{,}59)$$

A megkapott impulzusválasz tehát:

$$h(t) \;=\; 4\,\delta(t) + \varepsilon(t)\left\{(-1{,}25)\,e^{-1\,t} + (-0{,}59)\,e^{-0{,}8\,t}\right\}$$

Grafikonon ábrázolva:



DI:

Az A mátrix sajátértékei:

$$\begin{vmatrix} 0{,}6-\lambda & -1{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}4-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}6-\lambda)(0{,}4-\lambda)-(-1{,}7)0{,}1 = \lambda^2-\lambda+0{,}41 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot0{,}41}}{2\cdot1} = \frac{1\pm0{,}8j}{2} \quad\rightarrow\quad \begin{matrix}\lambda_1 = 0{,}5+0{,}4j \\ \lambda_2 = 0{,}5-0{,}4j\end{matrix}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^* \;\rightarrow\; \underline{\underline{L}}_2 = \underline{\underline{L}}_1^* \;\rightarrow\; \underline{\underline{A}}^k = \underline{\underline{L}}_1\lambda_1{}^k+\underline{\underline{L}}_2\lambda_2{}^k = \underline{\underline{L}}_1\lambda_1{}^k+\underline{\underline{L}}_1^*\lambda_1^{*k}$$

Tehát elég csak az egyik Lagrange-mátrixot meghatározni:

$$\underline{\underline{L}}_1 = \frac{\underline{\underline{A}}-\lambda_2\underline{\underline{I}}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\begin{bmatrix}0{,}6 & -1{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}5-0{,}4j & 0 \\ 0 & 0{,}5-0{,}4j\end{bmatrix}}{0{,}8j} =$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}0{,}1+0{,}4j & -1{,}7 \\ 0{,}1 & -0{,}1+0{,}4j\end{bmatrix}\cdot(-0{,}8)j}{0{,}8j\cdot(-0{,}8)j} = \frac{\begin{bmatrix}0{,}32-0{,}08j & 1{,}36j \\ -0{,}08j & 0{,}32+0{,}08j\end{bmatrix}}{0{,}64} =$$

$$= \begin{bmatrix}0{,}5-0{,}125j & 2{,}125j \\ -0{,}125j & 0{,}5+0{,}125j\end{bmatrix}$$

Az impulzusválasz kiszámítása a tanult képletekkel:

$$\underline{C}^T\underline{\underline{A}}^k\underline{B} = \underline{C}^T\left(\underline{\underline{L}}_1\lambda_1{}^k+\underline{\underline{L}}_1^*\lambda_1^{*k}\right)\underline{B} = \underline{C}^T\underline{\underline{L}}_1\lambda_1{}^k\underline{B}+\underline{C}^T\underline{\underline{L}}_1^*\lambda_1^{*k}\underline{B} =$$

$$= 2\Re\left\{\lambda_1{}^k\underline{C}^T\underline{\underline{L}}_1\underline{B}\right\} = 2\Re\left\{\lambda_1{}^k\begin{bmatrix}0{,}4 & -0{,}6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}5-0{,}125j & 2{,}125j \\ -0{,}125j & 0{,}5+0{,}125j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}8 \\ 0{,}9\end{bmatrix}\right\} =$$

$$= 2\Re\left\{(-0{,}11+0{,}7175j)(0{,}5+0{,}4j)^k\right\} \approx 2\Re\left\{\left(\sqrt{0{,}527}\,e^{1{,}723j}\right)\left(\sqrt{0{,}41}\,e^{\arctan(0{,}8)j}\right)^k\right\} \approx$$

$$\approx 2\Re\left\{\left(0{,}7259\,e^{1{,}723j}\right)\left(0{,}6403\,e^{0{,}6747j}\right)^k\right\} \approx$$

$$\approx 1{,}4518\cdot0{,}6403^k\cdot\Re\left\{e^{(1{,}723+0{,}6747k)j}\right\} \approx 1{,}4518\cdot0{,}6403^k\cdot\cos(1{,}723+0{,}6747k)$$

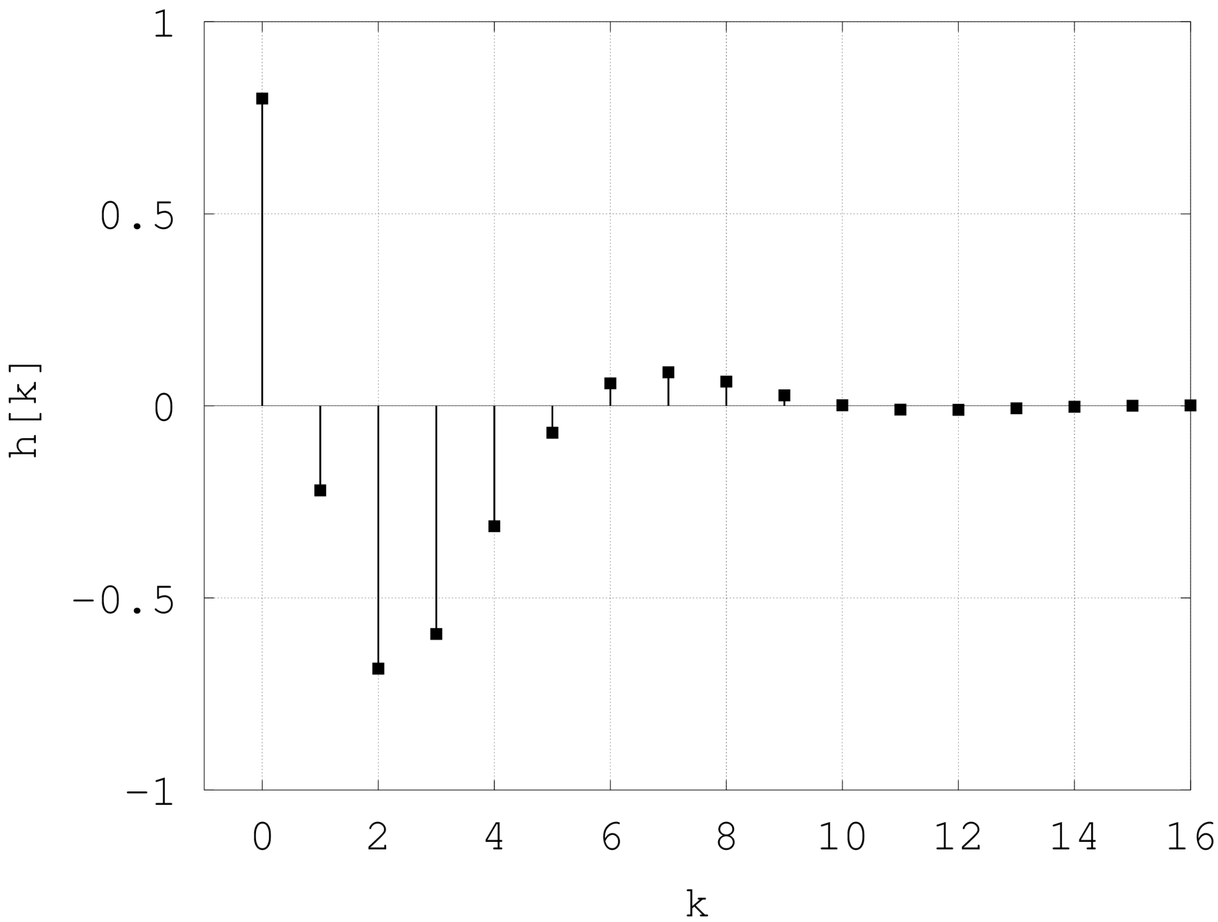
A megkapott impulzusválasz tehát:

$$h[k] \;=\; D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\underline{C}^T \underline{\underline{A}}^{k-1}\underline{B} \;\approx$$

$$\approx\; 0{,}8\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left\{1{,}4518\cdot 0{,}6403^{(k-1)}\cdot\cos\left(1{,}723 + 0{,}6747(k-1)\right)\right\} \;\approx$$

$$\approx\; 0{,}8\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left\{2{,}2673\cdot 0{,}6403^{k}\cdot\cos\left(1{,}0482 + 0{,}6747\,k\right)\right\}$$

Grafikonon ábrázolva:



(b)

Az impulzusválasz kiszámítása az állapotegyenlet lépésről lépésre történő megoldásával:

$$u[k] = \delta[k]$$
$$h[k] = y[k]$$

$$\begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textit{Mert energiamentes állapotból indítjuk a rendszert}\,.$$

$$k = 0$$

$$y[0] = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0{,}8 \cdot 1 = 0{,}8$$

$$\begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix}$$

$$k = 1$$

$$y[1] = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} + 0{,}8 \cdot 0 = 0{,}4 \cdot 0{,}8 + (-0{,}6) \cdot 0{,}9 = -0{,}22$$

$$\begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} 0 = \begin{bmatrix} 0{,}6 \cdot 0{,}8 + (-0{,}7) \cdot 0{,}9 \\ 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}05 \\ 0{,}44 \end{bmatrix}$$

$$k = 2$$

$$y[2] = \begin{bmatrix} 0{,}4 & -0{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}05 \\ 0{,}44 \end{bmatrix} + 0{,}8 \cdot 0 = 0{,}4 \cdot -1{,}05 + (-0{,}6) \cdot 0{,}44 = -0{,}684$$

Az előzőleg kiszámolt formulába behelyettesítve:

$$h[0] = 0{,}8 \cdot 1 + 0\left\{2{,}2673 \cdot 0{,}6403^0 \cdot \cos(1{,}0482 + 0{,}6747 \cdot 0)\right\} = 0{,}8$$

$$h[1] = 0{,}8 \cdot 0 + 1\left\{2{,}2673 \cdot 0{,}6403^1 \cdot \cos(1{,}0482 + 0{,}6747 \cdot 1)\right\} \approx -0{,}219966373$$

$$h[2] = 0{,}8 \cdot 0 + 1\left\{2{,}2673 \cdot 0{,}6403^2 \cdot \cos(1{,}0482 + 0{,}6747 \cdot 2)\right\} \approx -0{,}683940548$$

Mint látható, az eredmények az első esetben természetesen egészen pontosak, a másodikban pedig a kerekítésekből adódóan érthető módon körülbelül 4 tizedesjegyig helyesek.

(c)

FI:

A folytonos idejű rendszer megadott gerjesztésre adott válasza:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(4\underbrace{\delta(\tau)}_{=0,\ \tau\neq 0} + \underbrace{\varepsilon(\tau)}_{=0,\ \tau<0}\left\{(-1,25)e^{-\tau} + (-0,59)e^{-0,8\tau}\right\}\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\underbrace{\varepsilon(t-\tau)}_{=0,\ \tau>t}\left\{10+(-5)e^{-0,8(t-\tau)}\right\}\Big)d\tau =$$

$$= 4\int_{-0}^{+0}\delta(\tau)\Big(\varepsilon(t-\tau)\left\{10-5e^{-0,8(t-\tau)}\right\}\Big)d\tau -$$

$$-5\int_{0}^{t}\left(-1,25e^{-\tau}-0,59e^{-0,8\tau}\right)\left(10-5e^{-0,8(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= 40-20e^{-0,8t}+10\int_{0}^{t}-1,25e^{-\tau}-0,59e^{-0,8\tau}d\tau -$$

$$-5\int_{0}^{t}\left(-1,25e^{-\tau}-0,59e^{-0,8\tau}\right)e^{-0,8t+0,8\tau}d\tau =$$

$$= 40-20e^{-0,8t}+10\int_{0}^{t}-1,25e^{-\tau}d\tau+10\int_{0}^{t}-0,59e^{0,8\tau}d\tau -$$

$$-5\int_{0}^{t}-1,25e^{-\tau}e^{-0,8t+0,8\tau}d\tau-5\int_{0}^{t}-0,59\underbrace{e^{-0,8\tau}e^{-0,8t+0,8\tau}}_{=e^{-0,8t}}d\tau =$$

$$= 40-20e^{-0,8t}-12,5\left(\frac{1}{-1}\left(e^{-t}-1\right)\right)-5,9\left(\frac{1}{-0,8}\left(e^{-0,8t}-1\right)\right)+$$

$$+6,25\left(\frac{1}{-0,2}\left(e^{-0,2t}-1\right)\right)e^{-0,8t}+2,95\cdot t\cdot e^{-0,8t} =$$

$$= 40-12,5-\frac{5,9}{0,8}+e^{-0,8t}\left(-20+\frac{5,9}{0,8}+2,95+31,25\cdot t\right)+e^{-t}\left(-31,25+12,5\right) =$$

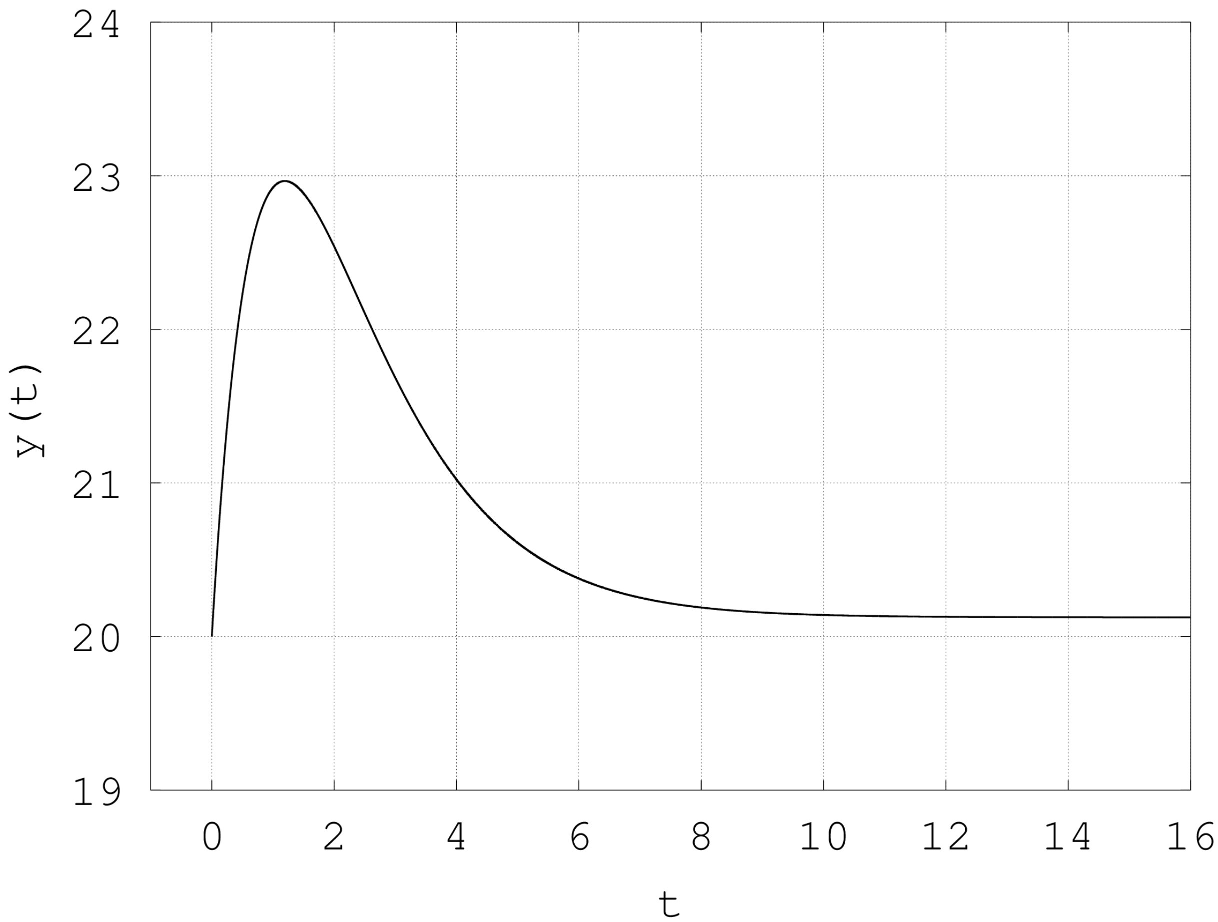
$$= \left(20,125-18,75e^{-t}+(18,625+2,95\cdot t)e^{-0,8t}\right)\cdot\varepsilon(t)$$

Mert a rendszer kauzális és a gerjesztés belépő.

A kapott gerjesztésválasz tehát:

$$y(t) = \left(20{,}125 - 18{,}75\,e^{-t} + (18{,}625 + 2{,}95 \cdot t)\,e^{-0{,}8\,t}\right) \cdot \varepsilon(t)$$

Grafikonon ábrázolva:



DI:

A megadott gerjesztés: $u[k] = 5\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-6]\}$
A rendszer LTI mivoltából adódóan az erre adott válasz felírható az egységugrásra adott válaszból.

Határozzuk meg tehát először az ugrásválaszt:

$$g[k] \;=\; \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(0{,}8\,\delta[i] + \varepsilon[i+1]\left\{2{,}2673 \cdot 0.6403^i \cdot \cos(1{,}0482 + 0{,}6747 \cdot i)\right\}\right) \cdot \varepsilon[k-i] \;=$$

$$= \sum_{i=0}^{0} 0{,}8 \cdot \varepsilon[k-i] + \sum_{i=1}^{k} 2{,}2673 \cdot 0{,}6403^i \cdot \frac{e^{(1{,}0482\,+\,0{,}6747\cdot i)\,j} + e^{-(1{,}0482\,+\,0{,}6747\cdot i)\,j}}{2} \;=$$

$$= \;0{,}8 + 1{,}13365 \cdot \sum_{i=1}^{k} 0{,}6403^i \cdot \left(e^{1{,}0482\cdot j} \cdot e^{0{,}6747\cdot i\cdot j} + e^{-1{,}0482\cdot j}\cdot e^{-0{,}6747\cdot i\cdot j}\right) \;=$$

$$= \;0{,}8 + 1{,}13365 \cdot \left(e^{1{,}0482\,j} \sum_{i=1}^{k} \left(0{,}6403\cdot e^{0{,}6747\,j}\right)^i + e^{-1{,}0482\,j} \sum_{i=1}^{k} \left(0{,}6403\cdot e^{-0{,}6747\,j}\right)^i\right) \;=$$

$$= \;0{,}8 + 1{,}13365 \cdot \left(\underbrace{e^{1{,}0482\,j} \cdot \sum_{i=1}^{k} (0{,}5 + 0{,}4\,j)^i}_{M} + \underbrace{e^{-1{,}0482\,j} \cdot \sum_{i=1}^{k} (0{,}5 - 0{,}4\,j)^i}_{M^*}\right) \;=$$

$$= \;0{,}8 + 1{,}13365 \cdot 2 \cdot \Re\left\{e^{1{,}0482\,j} \cdot \sum_{i=1}^{k} (0{,}5 + 0{,}4\,j)^i\right\} \;=$$

$$= \;0{,}8 + 1{,}13365 \cdot 2 \cdot \Re\left\{e^{1{,}0482\,j} \cdot \left((0{,}5 + 0{,}4\,j) \cdot \frac{(0{,}5 + 0{,}4\,j)^k - 1}{(0{,}5 + 0{,}4\,j) - 1}\right)\right\} \;=$$

$$= \;0{,}8 + 1{,}13365 \cdot 2 \cdot \Re\left\{e^{1{,}0482\,j} \cdot (0{,}5 + 0{,}4\,j) \cdot \left(\frac{(0{,}5 + 0{,}4\,j)^k}{-0{,}5 + 0{,}4\,j} - \frac{1}{-0{,}5 + 0{,}4\,j}\right)\right\} \;=$$

$$= 0{,}8 + 2{,}2673\ \Re\left\{e^{1{,}0482\,j} \cdot (0{,}64031\cdot e^{0{,}67474\,j}) \cdot \left(\frac{(0{,}64031\cdot e^{0{,}67474\,j})^k}{0{,}64031\cdot e^{2{,}4669\,j}} - \frac{1}{0{,}64031\cdot e^{2{,}4669\,j}}\right)\right\} =$$

$$= \;0{,}8 + 2{,}2673\ \Re\left\{e^{(1{,}0482\,+\,0{,}67474)\,j} \cdot \left(\frac{(0{,}64031\cdot e^{0{,}67474\,j})^k}{e^{2{,}4669\,j}} - e^{-2{,}4669\,j}\right)\right\} \;=$$

$$= 0{,}8+2{,}2673\ \Re\left\{ e^{(1{,}0482\,+\,0{,}67474)\,j}\cdot\left(\frac{(0{,}64031\cdot e^{0{,}67474\,j})^k}{e^{2{,}4669\,j}}-e^{-2{,}4669\,j}\right)\right\} =$$

$$= 0{,}8+2{,}2673\ \Re\left\{ e^{(1{,}0482+0{,}67474-2{,}4669)\,j}\cdot(0{,}64031\cdot e^{0{,}67474\,j})^k-e^{(1{,}0482+0{,}67474)\,j}\cdot e^{-2{,}4669\,j}\right\} =$$

$$= 0{,}8+2{,}2673\left(\Re\left\{0{,}64031^k\cdot e^{(0{,}67474\cdot k-0{,}74396)\,j}\right\}-\Re\left\{e^{-0{,}74396\,j}\right\}\right) =$$

$$= 0{,}8+2{,}2673\left(0{,}64031^k\cdot\cos(0{,}67474\cdot k-0{,}74396)-\cos(-0{,}74396)\right) =$$

$$= (2{,}2673\cdot 0{,}64031^k\cdot\cos(0{,}67474\cdot k-0{,}74396)-0{,}86826)\cdot\varepsilon[k]\ (\textit{kauzalitás}, \textit{belépő})$$

Ebből pedig a tényleges gerjesztésre adott válasz:

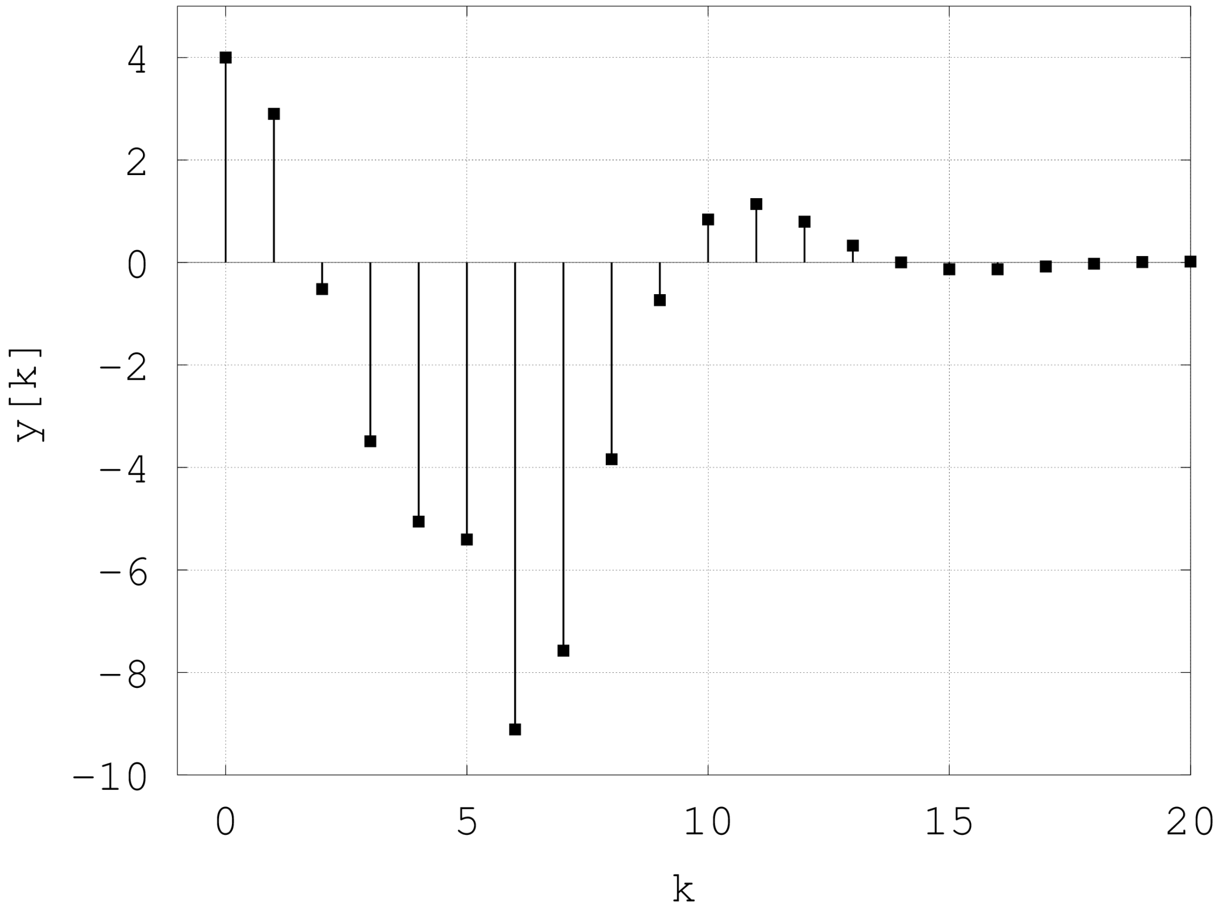
$$y[k] = 5\{g[k]-g[k-6]\} =$$

$$= 5\{(2{,}2673\cdot 0{,}64031^k\cdot\cos(0{,}67474\cdot k-0{,}74396)-0{,}86826)\cdot\varepsilon[k]-$$
$$-(2{,}2673\cdot 0{,}64031^{(k-6)}\cdot\cos(0{,}67474\cdot(k-6)-0{,}74396)-0{,}86826)\cdot\varepsilon[k-6]\} =$$

$$= 5\{(2{,}2673\cdot 0{,}64031^k\cdot\cos(0{,}67474\cdot k-0{,}74396)-0{,}86826)\cdot\varepsilon[k]-$$
$$-(32{,}89783\cdot 0{,}64031^k\cdot\cos(0{,}67474\cdot k-4{,}7924)-0{,}86826)\cdot\varepsilon[k-6]\} =$$

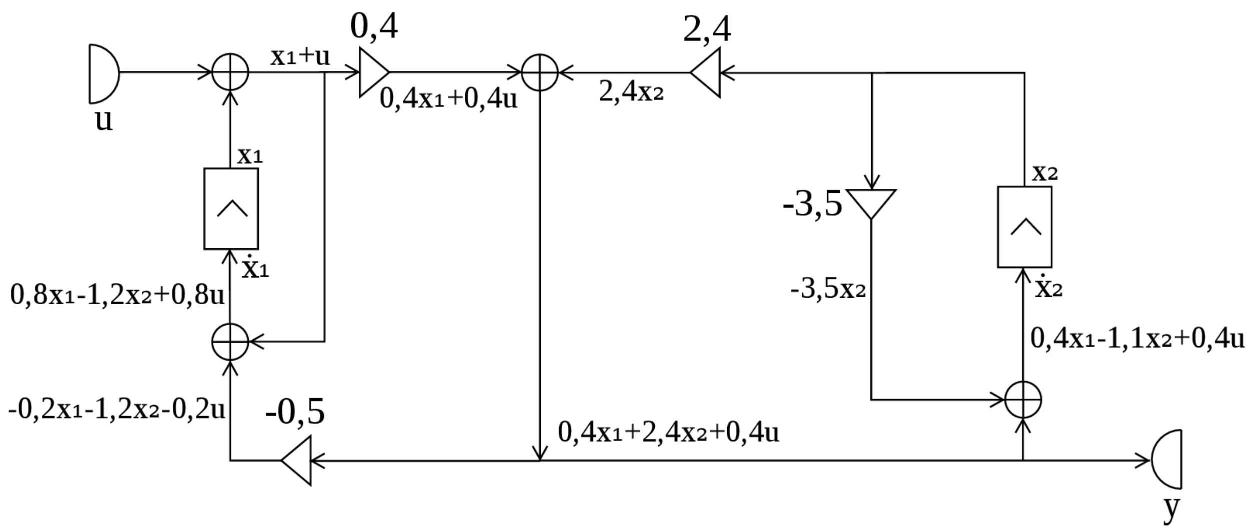
$$= \varepsilon[k]\cdot(11{,}3365\cdot 0{,}64031^k\cdot\cos(0{,}67474\cdot k-0{,}74396)-4{,}3413)-$$
$$-\varepsilon[k-6]\cdot(164{,}48916\cdot 0{,}64031^k\cdot\cos(0{,}67474\cdot k-4{,}7924)-4{,}3413)$$

Grafikonon ábrázolva:



1.2 feladat:

(a)



Az ẋ-ak kifejezéseiben lévő együtthatókból leolvashatóan:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -1{,}2 \\ 0{,}4 & -1{,}1 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} \qquad \underline{C}^T = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 2{,}4 \end{bmatrix} \qquad D = 0{,}4$$

DI:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= 0{,}8\,x_1[k] - 1{,}2\,x_2[k] + 0{,}8\,u[k] \\ x_2[k+1] &= 0{,}4\,x_1[k] - 1{,}1\,x_2[k] + 0{,}4\,u[k] \\ y[k+1] &= 0{,}4\,x_1[k] + 2{,}4\,x_2[k] + 0{,}4\,u[k] \end{aligned}$$

FI:

$$\begin{aligned} x_1{}'(t) &= 0{,}8\,x_1(t) - 1{,}2\,x_2(t) + 0{,}8\,u(t) \\ x_2{}'(t) &= 0{,}4\,x_1(t) - 1{,}1\,x_2(t) + 0{,}4\,u(t) \\ y'(t) &= 0{,}4\,x_1(t) + 2{,}4\,x_2(t) + 0{,}4\,u(t) \end{aligned}$$

(b)

A stabilitás vizsgálatához szükség lesz az A mátrix sajátértékeire:

$$|\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{I}}| = \begin{vmatrix} 0{,}8-\lambda & -1{,}2 \\ 0{,}4 & -1{,}1-\lambda \end{vmatrix} = (0{,}8-\lambda)\cdot(-1{,}1-\lambda) + 1{,}2\cdot 0{,}4 = 0$$

$$-1{,}1\cdot 0{,}8 + 1{,}1\lambda - 0{,}8\lambda + \lambda^2 + 0{,}48 = 0$$

$$\lambda^2 + 0{,}3\lambda - 0{,}4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0{,}3\pm\sqrt{0{,}3^2+4\cdot 0{,}4}}{2} = \frac{-0{,}3\pm 1{,}3}{2}$$

$$\lambda_1 = -0{,}8 \qquad \lambda_2 = 0{,}5$$

DI:

A diszkrét idejű rendszer stabilitásvizsgálata a Jury kritérium segítségével:

$$\left.\begin{aligned} |\lambda_1| &= 0{,}8 < 1 \\ |\lambda_2| &= 0{,}5 < 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \textit{aszimptotikusan stabil} \rightarrow \textit{gerjesztés}-\textit{válasz stabil}$$

FI:

A folytonos idejű rendszer stabilitásvizsgálata a Routh-Hurwitz kritérium segítségével:

$$\left.\begin{aligned} \Re\{\lambda_1\} &= -0{,}8 < 0 \\ \Re\{\lambda_2\} &= 0{,}5 \not< 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \textit{nem aszimptotikusan stabil}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|0{,}4\cdot\delta(t) + \varepsilon(t)\cdot\underline{C}^T\cdot e^{\underline{\underline{A}}t}\cdot\underline{B}\right| dt =$$

$$= 0{,}4 + \int_0^{\infty} \left|0{,}66462\,e^{-0{,}8t} + 0{,}61538\,e^{0{,}5t}\right| dt =$$

$$= 0{,}4 + 0{,}66462\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-0{,}8t}\,dt}_{=1{,}25} + 0{,}61538\underbrace{\int_0^{\infty} e^{0{,}5t}\,dt}_{=\infty} = \infty \rightarrow$$

$$\rightarrow \textit{nem gerjesztés}-\textit{válasz stabil}$$