Analízis(2) VD1 (B kurzus)
2000. május 24.
Munkaidő: 90 perc

1. feladat (8 pont)
$u = 2x - y$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(6x - 3y + 1)}{(2x - y)}$$

2. feladat (18 pont)
a) A tanult módon mutassa meg, hogy

$$\operatorname{arctg}(x) = \ x \ - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \ \ldots$$

Mi a sor konvergenciatartománya?
b) Irja fel szummás alakban az $f(x) = \ \operatorname{arctg}(3x^2)$ függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak a konvergenciasugarát!
Mi lesz f 102. deriváltja 0-ban?

3. feladat (17 pont)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+1)y^3}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq \ (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = \ (0,0) \end{cases}$$

a) Irja fel $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ értékét, ahol az létezik!
b) Adja meg a kétváltozós függvény (x_0, y_0) pontbeli totális deriválhatoságának definícióját!
c) Totálisan derivalható-e f a (0,0) pontban?

4. feladat (13 pont)

$$\iiint\limits_V 3z^2(9 - x^2 - y^2)^{2.5} \ \mathrm{d}V = \ ?$$

$V: z \geq 0 \ \ z \leq 9 - x^2 - y^2; \ \ x^2 + y^2 \leq 8; \ \ x \leq 0$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő térrész.
(Lehetőleg hengerkoordinátás transzformációval dolgozzon!)

5. feladat (11 pont)
$f(z) = \operatorname{ch}(5jz)$

a) Hol konform az f által létesített leképezés?
b) Határozza meg a $z_0 = 2j$ pontban a nyújtási együtthatót és az elforgatás szögét!
c) $I = \int\limits_L f'(z)dz \quad Re(I) = ?; \ Im(I) = ?$; L: A (0,0) kezdőpontú és (3,0) végpontú szakasz.

6. feladat (17 pont)

$$f(z) = \frac{e^{(z+1)}}{(z+2)^4}$$

a) írja fel a függvény $z_0 = -2$ körüli Laurent sorfejtését es adja meg a sor konvergenciatartományát!
Vizsgálja meg a szingularitás jellegét és adja meg a függvény residuumát a szinguláris pontban!
b)

$$\oint_{|z+j|=5} f(z)dz = ?$$

$$\oint_{|z+5j|=1} f(z)dz = ?$$

7. feladat (16 pont)
Definiálja az uniform normát! Mit értünk azon, hogy (f_n) uniform normában konvergál f-hez? Mi a kapcsolat az egyenletes konvergencia és az uniform normában való konvergencia között? Állítását bizonyítsa be!

Csak az elégségeshez javítjuk:

8. feladat (12 pont)

$$f(x, y) = \frac{y}{(2y^2 + 1)e^{(3x-1)}}$$

a) grad f = ? Hol es miért létezik a gradiens?
b) $\frac{df}{de}$ mennyi a ($\frac{1}{3}$, -1) pontban, ha $e \parallel -4i + 3j$;
max($\frac{df}{de}$) a ($\frac{1}{3}$,-1) pontban) = ?

9. feladat (8 pont)
Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = 6x^2 - y^2 + j(3y^2 + x^2 + 6x)$ függvény?

Analízis(2) VD2 (B kurzus)

2000.máj. 24
Munkaidő: 60 perc

1. feladat (20 pont)

$$y' = (x + 1)y^4 + 3y - 3$$

a) Mutassa meg, hogy létezik az $x_0 = -1,\ y_0 = 1$ ponton áthaladó megoldás!
b) Milyen lokális tulajdonsága van ennek a megoldásnak az adott pontban?
c) Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = -1$ pont körüli harmadrendű Taylor polinomját! (Ne próbálja megoldani a differenciálegyenletet!)

2. feladat (20 pont)
Iránymenti derivált definíciója, elégséges tétel kiszámítására (bizonyítással). Ismertesse a gradiensvektor tulajdonságait! (Indokoljon!)

3. feladat (10 pont)
Adja meg egy kétváltozós függvény első- és másodrendű differenciáljának definícióját! írja fel mátrixos alakban egy háromváltozós függvény másodrendű differenciálját!

4. feladat (25 pont)

a) Definiálja az egyváltozós f függvény x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát! E definíció felhasználásával állítsa elő a cos$x$ függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor sorát!
b) írja fel a maradékösszeg Lagrange-féle alakját!
c) Bizonyítsa be, hogy a cos$x$ függvény Taylor sora minden x pontban cos$x$-et állítja elő!

5. feladat (25 pont)
a) Adja meg $f'(z_0)$ definícióját! Mondja ki es bizonyítsa be a tanult szükséges és elégséges tételt!
b) Definiálja az $\ln(z)$ függvényt és vezesse le a kiszámítására szolgáló képletet!

Ezt a LaTeX/PDF verziót készítette Visontay Péter (sentinel@sch.bme.hu)
InfoSite: http://info.sch.bme.hu