1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra 1. ZH. 2022-11-10 **Neptun:** ______ **Név:** __________________________

A dolgozat feladatainak ***eredményeit*** *mind erre az oldalra kell írni, a* ***mellékszámításokot*** *a hátoldalra, ez elvben elegendő, de ha esetleg nem, a másik lap is beadandó, melynek jobb felső sarkára írja fel a nevét, Neptun-kódját!* ***Eredmény mellékszámítás nélkül*** *nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma 1-től 4-ig bármennyi lehet. Hibátlan válasz 1 pont, 1 hiba 0.5 pont, több hiba 0 pont.

1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
   - $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$ ☐
   - $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ ☒ X
   - $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{X})$ ☐
   - $\mathcal{O}(\mathbf{X}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{X}^\mathsf{H})$ ☒ X
2. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) lineáris egyenletrendszer **összes optimális megoldása** megkapható a következőképp
   - az $\mathbf{Ax} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ megoldásával, ☒ X
   - az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egy.rsz. megoldásával, ☒ X
   - az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ kiszámításával, ☐
   - a normálegyenlet megoldásával, feltéve hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konzisztens. ☐
3.
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ gyűrű. ☒ X
   - $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrű. ☐
   - $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ és $\mathbb{Z}_5$ test. ☒ X
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$ és $\mathbb{N}$ gyűrű. ☐
4.
   - A zérustér bármely test felett vektortér, melynek bázisa $\{\mathbf{0}\}$. ☐
   - A zérustér bázisa az üreshalmaz. ☒ X
   - Az összes valós $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat vektorteret alkot $\mathbb{R}$ fölött, melynek bázisát alkotják az $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ alakú sorozatok. ☐
   - Ha $\mathbb{F}$ egy test, akkor $\mathbb{F}[x]$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött, melynek $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ egy bázisa. ☒ X

2. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A PLU-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (5, 2, 0, 0)$ vektornak a $\operatorname{span}((0, 1, 0, 1), (1, 0, 2, 0))$ térre eső merőleges vetületét!

1. mo: Gram-mátrixszal: $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 2, 0)$, $\mathbf{G} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{Gc} = \mathbf{b}$ megoldása $c_1 = c_2 = 1 \rightsquigarrow \operatorname{proj} \mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, 1)$.
2. mo: A vetület $\mathbf{Pv} = (1, 1, 2, 1)$, ahol a $\mathbf{P}$ vetítőmátrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ és ahol } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. mo: A $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2, 0)$ ortonormált bázissal a vetület:

$$(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v})\mathbf{b}_1 + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v})\mathbf{b}_2 = \sqrt{2}\mathbf{b}_1 + \sqrt{2}\mathbf{b}_2 = (1, 1, 2, 1)$$

4. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer sortérbe eső megoldását!

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 4 \end{cases}$$

$(-1, 0, -2)$

5. *(4 pont)* Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (redukált) QR-felbontását!

GS-ortogonalizáció: $\mathbf{a}_i = \mathbf{A}_{*i}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (2, 2, 2, 2)$,
$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = (-1, 1, -1, 1)$
az egységvektorok $\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \frac{1}{2}(-1, 1, -1, 1)$
E két vektor adja $\mathbf{Q}$-t, onnan a QR-felbontás:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra 1. ZH. 2022-11-10 **Neptun:** ________ **Név:** ____________________

*A dolgozat feladatainak **eredményeit** mind erre az oldalra kell írni, a **mellékszámításokot** a hátoldalra, ez elvben elegendő, de ha esetleg nem, a másik lap is beadandó, melynek jobb felső sarkára írja fel a nevét, Neptun-kódját! **Eredmény mellékszámítás nélkül** nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma 1-től 4-ig bármennyi lehet. Hibátlan válasz 1 pont, 1 hiba 0.5 pont, több hiba 0 pont.

1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
   - $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$ ☐
   - $\mathcal{S}(\mathbf{B}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{B})$ ☐
   - $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ X
   - $\mathcal{O}(\mathbf{B}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{B}^\mathsf{H})$ X
2. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) lineáris egyenletrendszer **összes optimális megoldása** megkapható a következőképp
   - az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egy.rsz. megoldásával, X
   - a normálegyenlet megoldásával, feltéve hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konzisztens. ☐
   - az $\mathbf{Ax} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ megoldásával, X
   - az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ kiszámításával, ☐
3.
   - $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ és $\mathbb{Z}_5$ test. X
   - $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrű. ☐
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ gyűrű. X
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$ és $\mathbb{N}$ gyűrű. ☐
4.
   - A zérustér bázisa az üreshalmaz. X
   - A zérustér bármely test felett vektortér, melynek bázisa $\{\mathbf{0}\}$. ☐
   - Ha $\mathbb{F}$ egy test, akkor $\mathbb{F}[x]$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött, melynek $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ egy bázisa. X
   - Az összes valós $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat vektorteret alkot $\mathbb{R}$ fölött, melynek bázisát alkotják az $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ alakú sorozatok. ☐

2. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását!

$$\begin{bmatrix}1&3&5\\1&3&4\\1&1&2\end{bmatrix}$$

A PLU-felbontás:

$$\begin{bmatrix}1&3&5\\1&3&4\\1&1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&5\\0&-2&-3\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (2, 5, 0, 0)$ vektornak a $\operatorname{span}((1, 0, 1, 0), (0, 2, 0, 1))$ térre eső merőleges vetületét!

(1,4,1,2)

4. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer sortérbe eső megoldását!

$$\begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y \phantom{{}-z} = 2 \end{cases}$$

Gauss–Jordan: $\begin{bmatrix}1&3&-1&2\\2&4&0&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\end{bmatrix}$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix} t$$

A sortérbe eső megoldás merőleges a $(-2, 1, 1)$-re:

$$\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\\-2&1&1&0\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\frac12\\0&0&1&-\frac12\end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

a sortérbe eső megoldás (mely a minimális abszolút értékű is egyben): $(0, 0.5, -0.5)$

5. *(4 pont)* Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0\\1&4\\1&4\\1&0\end{bmatrix}$ (redukált) QR-felbontását!

A QR-felbontás

$$\mathbf{QR} = \frac12\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\\1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\0&4\end{bmatrix}$$

1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra 1. ZH. 2022-11-10 **Neptun:** ________ **Név:** ____________________

*A dolgozat feladatainak **eredményeit** mind erre az oldalra kell írni, a **mellékszámításokat** a hátoldalra, ez elvben elegendő, de ha esetleg nem, a másik lap is beadandó, melynek jobb felső sarkára írja fel a nevét, Neptun-kódját! **Eredmény mellékszámítás nélkül** nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma 1-től 4-ig bármennyi lehet. Hibátlan válasz 1 pont, 1 hiba 0.5 pont, több hiba 0 pont.

1. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
   - $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ [X]
   - $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{O}(\mathbf{A})$ [ ]
   - $\mathcal{S}(\mathbf{C}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{C})$ [ ]
   - $\mathcal{O}(\mathbf{C}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{C}^\mathsf{H})$ [X]
2. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) lineáris egyenletrendszer **összes optimális megoldása** megkapható a következőképp
   - az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ kiszámításával. [ ]
   - az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egy.rsz. megoldásával. [X]
   - a normálegyenlet megoldásával, feltéve hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konzisztens. [ ]
   - az $\mathbf{Ax} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ megoldásával. [X]
3.
   - $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ és $\mathbb{Z}_5$ test. [X]
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_6$ és $\mathbb{N}$ gyűrű. [ ]
   - $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ egységelemes, kommutatív, nullosztómentes gyűrű. [ ]
   - $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ gyűrű. [X]
4.
   - A zérustér bármely test felett vektortér, melynek bázisa $\{\mathbf{0}\}$. [ ]
   - A zérustér bázisa az üreshalmaz. [X]
   - Az összes valós $(x_1, x_2, \dots)$ sorozat vektorteret alkot $\mathbb{R}$ fölött, melynek bázisát alkotják az $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ alakú sorozatok. [ ]
   - Ha $\mathbb{F}$ egy test, akkor $\mathbb{F}[x]$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött, melynek $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ egy bázisa. [X]

2. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A PLU-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg a $\mathbf{v} = (2, 5, 0, 0)$ vektornak a $\operatorname{span}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 2))$ térre eső merőleges vetületét!

$(1, 1, 1, 2)$

4. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer sortérbe eső megoldását!

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

$(0, 0.5, 0.5)$

5. *(4 pont)* Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (redukált) QR-felbontását!

GS-ortogonalizáció: $\mathbf{a}_i = \mathbf{A}_{*i}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 = (2, 2, 2, 2)$,
$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1)$
az egységvektorok $\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$, $\frac{\mathbf{b}_2}{|\mathbf{b}_2|} = \frac{1}{2}(-1, -1, 1, 1)$
E két vektor adja $\mathbf{Q}$-t, onnan a QR-felbontás:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 1/1. feladathoz:
Valós $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, komplex $\mathbf{C}$ mátrixra $\mathcal{S}(\mathbf{C}) \neq \mathcal{S}(\bar{\mathbf{C}}) = \mathcal{O}(\mathbf{C}^\mathsf{H}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{C})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{C}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{C}^\mathsf{H})$

1/2. feladathoz:
Az (esetleg inkonzisztens) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ összes optimális megoldása definíció szerint egyenlő az $\mathbf{Ax} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ megoldásaival, amik megkaphatóak az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ normálegyenlet összes megoldásával. (Az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ csak egyetlen megoldást ad, a sortérbe esőt, az „$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konzisztens" kikötés ellentmond az egész értelmének.)

1/3. feladathoz:
Testek: $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Z}_p$, ha p prím.
Gyűrűk: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_m$ és minden test.
$\mathbb{Z}_m$ nem nullosztómentes, ha m összetett.
$\mathbb{N}$ nem gyűrű.

1/4. A zérustér bázisa az üreshalmaz (mert az üreshalmaz bármely lineáris kombinációja a nullvektor), másrészt bázisnak nem lehet a nullvektor eleme!
A valós sorozatoknak a $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ vektorok halmaza nem lehet bázisa, mert pl. az $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ sorozat nem áll elő ezek közül véges sok lineáris kombinációjaként!