1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra pót-ZH. 2022-11-24 **Neptun:** ________ **Név:** ________________________________

A dolgozat feladatainak ***végeredményeit*** *mind erre az oldalra* ***a keretbe*** *kell írni, a* ***mellékszámításokot*** *a hátoldalra, vagy bárhová a kereten kívülre, végszükség esetén külön papírra (jobb felső sarkában a név, Neptun-kód)!* ***Eredmény mellékszámítás nélkül*** *nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma 1-től 4-ig bármennyi lehet. Hibátlan válasz 1 pont, 1 hiba 0.5 pont, több hiba 0 pont.

1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$.
   - Az $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{A}^+\mathbf{y}$ lineáris leképezés inverze az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezésnek $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$ között. [X]
   - Az $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ merőleges vetítés $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$-ra. [X]
   - Az $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ merőleges vetítés $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-ra. [X]
   - Az $\mathbf{A}^\mathsf{H}$ és az $\mathbf{A}^+$ is a $\mathbf{0}$-vektorba képzi $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$ minden vektorát. [X]

2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
   - $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$ [X]
   - $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \oplus \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathbb{R}^m$ [ ]
   - $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{X}) = \mathbb{C}^n$ [ ]
   - $\mathcal{O}(\mathbf{X}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{X}^\mathsf{H}) = \mathbb{C}^m$ [X]

3. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) lineáris egyenletrendszer összes optimális megoldása megkapható a következőképp
   - az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\mathbf{b}$ megoldásával, [X]
   - az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egy.rsz. megoldásával, [X]
   - az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ kiszámításával, [ ]
   - az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ kiszámításával, ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú [X]

4.
   - Az üres vektorhalmaz lineáris kombinációja a zérusvektor. [X]
   - Egyetlen vektorból álló vektorrendszer nem lehet lineárisan független, mert nincs mitől függetlennek lennie. [ ]
   - A zérustér bázisa az üreshalmaz. [X]
   - A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_n \in \mathbb{R}$) hatványsorok vektorterének $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ egy bázisa. [ ]

2. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A PLU-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását (a normálegyenletből)!

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$(4/5, 8/5)$

4. Határozzuk meg azt a mátrixot, mely az $\mathbb{R}^4$ teret a $\operatorname{span}((1,1,0,1)(1,0,0,1))$ térre vetíti!

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg azt az ortonormált bázist, melyet a Gram–Schmidt-ortogonalizációval kapunk az $(1,2,2)$, $(3,0,3)$, $(1,1,0)$ vektorokból kiindulva.

$\frac{1}{3}(1,2,2)$, $\frac{1}{3}(2,-2,1)$, $\frac{1}{3}(2,1,-2)$

1	2	3	4	5	$\sum$

Alkalmazott algebra 1. ZH. 2022-11-10 **Neptun:** ______ **Név:** ________________

*A dolgozat feladatainak **végeredményeit** mind erre az oldalra **a keretbe** kell írni, a **mellékszámításokot** a hátoldalra, vagy bárhová a kereten kívülre, végszükség esetén külön papírra (jobb felső sarkában a név, Neptun-kód)! **Eredmény mellékszámítás nélkül** nem kap pontot. A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. *(4 pont)* Jelöljünk meg minden helyes választ egy X-szel! A lehetséges jó válaszok száma 1-től 4-ig bármennyi lehet. Hibátlan válasz 1 pont, 1 hiba 0.5 pont, több hiba 0 pont.

1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$.
   - Az $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ merőleges vetítés $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-ra. [X]
   - Az $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ merőleges vetítés $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$-ra. [X]
   - Az $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ és az $\mathbf{A}^+$ is a $\mathbf{0}$-vektorba képzi $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ minden vektorát. [X]
   - Az $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{A}^+\mathbf{y}$ lineáris leképezés inverze az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezésnek $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ között. [X]

2. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.
   - $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) \oplus \mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}) = \mathbb{R}^m$ [ ]
   - $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$ [X]
   - $\mathcal{O}(\mathbf{X}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{X}^{\mathsf{H}}) = \mathbb{C}^m$ [X]
   - $\mathcal{S}(\mathbf{X}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{X}) = \mathbb{C}^n$ [ ]

3. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$) lineáris egyenletrendszer összes optimális megoldása megkapható a következőképp
   - az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$ megoldásával, [X]
   - az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ kiszámításával, [ ]
   - az $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ kiszámításával, ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú [X]
   - az $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$ egy.rsz. megoldásával, [X]

4.
   - A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($a_n \in \mathbb{R}$) hatványsorok vektorterének $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ egy bázisa. [ ]
   - Az üres vektorhalmaz lineáris kombinációja a zérusvektor. [X]
   - Egyetlen vektorból álló vektorrendszer nem lehet lineárisan független, mert nincs mitől függetlennek lennie. [ ]
   - A zérustér bázisa az üreshalmaz. [X]

2. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A PLU-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. *(4 pont)* Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását (a normálegyenletből)!

$$\begin{cases} x + 3y = 15 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$(1, 3)$

4. Határozzuk meg azt a mátrixot, mely az $\mathbb{R}^4$ teret a $\mathrm{span}((1,0,1,1)(1,0,1,0))$ térre vetíti!

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg azt az ortonormált bázist, melyet a Gram–Schmidt-ortogonalizációval kapunk a $(2,1,2)$, $(0,3,3)$, $(1,1,0)$ vektorokból kiindulva.

$\frac{1}{3}(2,1,2),\ \frac{1}{3}(-2,2,1),\ \frac{1}{3}(1,2,-2)$