Felsőbb matematika / ML zh 2022 ősz

NÉV*: NEPTUN KÓD*:

Az összes feladatban: jelölje $\times$-el a helyesnek gondolt választ. Minden jó válasz $5/4$, minden rossz válasz $-5/8$ pontot ér. Ha nem jelöli meg egyik lehetőséget sem, vagy mindkettőt megjelöli, azért 0 pont jár.

1. Az alábbi formulák közül melyek érvényesek?

	érvényes	nem érvényes
$(\neg p \to (\neg q \vee p)) \to \neg q$		$\times$
$\neg q \to (\neg p \to (\neg q \vee p))$	$\times$	
$(\neg q \to p) \to (\neg q \vee p)$		$\times$
$(\neg q \to p) \to (q \vee p)$	$\times$	

Megoldás. $(\neg p \to (\neg q \vee p)) \to \neg q$ nem érvényes, mert hamis abban a modellben, amiben p és q igazak.

$(\neg q \to p) \to (\neg q \vee p)$ nem érvényes, mert hamis abban a modellben, amiben p hamis és q igaz.

$\neg q \to (\neg p \to (\neg q \vee p))$ érvényes, mert ha volna olyan $\mathcal{M}$ modell, amire $\mathcal{M} \not\models \neg q \to (\neg p \to (\neg q \vee p))$, akkor $\mathcal{M}(q) = 0$ és $\mathcal{M} \not\models \neg p \to (\neg q \vee p)$, ami lehetetlen, mert $\mathcal{M} \models \neg q \vee p$.

$(\neg q \to p) \to (q \vee p)$ érvényes, mert ha volna olyan $\mathcal{M}$ modell, amiben nem igaz, akkor $\mathcal{M} \models \neg q \to p$ és $\mathcal{M} \not\models q \vee p$; utóbbi miatt $\mathcal{M}(p) = \mathcal{M}(q) = 0$, de ez ellentmond annak, hogy $\mathcal{M} \models \neg q \to p$.

2. (A, B, C mindegyike vagy lovag, azaz mindig igazat mond, vagy lókötő, azaz mindig hazudik.)

A: „Lókötő vagyok, vagy B lovag, vagy C lókötő.” B: „C lókötő.”

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

	I	H
B lovag és C lókötő	$\times$	
A lovag és B lókötő		$\times$
legalább az egyikük lovag	$\times$	
ha A lókötő, akkor B is az	$\times$	

Megoldás. Az $\{ A \leftrightarrow (\neg A \vee B \vee \neg C), B \leftrightarrow \neg C \}$ formulahalmaz összes modelljét kell megtalálni.

A második formula miatt az első $A \leftrightarrow (\neg A \vee B)$-re egyszerűsödik, és ennek pontosan egy modellje van: amiben A és B is igaz. Tehát A és B lovagok, C pedig lókötő.

3. Legyen

$$\Sigma = \{p \leftrightarrow (q \wedge \neg r), q \leftrightarrow \neg p\} \text{ and } \Gamma = \{p \leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge r)), q \to (\neg r \wedge \neg p)\}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

	I	H
Σ konzisztens	$\times$	
Σ teljes	$\times$	
Γ konzisztens		$\times$
Γ teljes	$\times$	

Megoldás. Σ: a második formula miatt az első $p \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg r)$-re egyszerűsödik, ami miatt p csak hamis lehet, és így q igaz. De akkor r is igaz, különben $p \leftrightarrow (q \wedge \neg r)$ hamis volna (mivel p hamis, $q \wedge \neg r$ pedig igaz volna).

Σ-nak tehát pontosan egy modellje van, következésképp konzisztens és teljes.

Γ-nak nincs modellje: A Γ-beli első formula miatt p csak igaz lehet (ha hamis volna, ekvivalens lenne egy igazzal). Emiatt q csak hamis lehet, különben a második formula hamis lenne. De akkor az első formula hamis, mivel $(\neg p \vee (q \wedge r))$ hamis, miközben p igaz.

Következésképp Γ inkonzisztens és teljes.

4. Legyen $\Sigma = \{p \leftrightarrow (q \wedge \neg r), q \leftrightarrow \neg p\}$.

Az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak?

	I	H
$\Sigma \models p \to (\neg q \wedge r)$	$\times$	
$\Sigma \models (\neg q \wedge r) \to p$	$\times$	
$\Sigma \models q \to p$		$\times$
$\Sigma \models (r \vee \neg q) \to \neg p$	$\times$	

Megoldás. Σ-nak pontosan egy $\mathcal{M}$ modellje van, az, amiben p hamis és q és r igaz (ld. az előző feladat megoldását!). Következésképp egy formula pontosan akkor következik Σ-ból, ha igaz $\mathcal{M}$-ben.

213001230123