

3. mérés // Jelek alapsávi leírása – beugró

1. Írja fel az ekvivalens alapsávi jel kvadratúra felbontását!

A könnyebb érthetőség kedvéért először összefoglaljuk a jelek alapsávi leírásáról tanultakat. Egy amplitúdó- és/vagy szögmodulált szinuszos jel a következő alakban írható fel:

$$s(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (1)$$

ahol $a(t)$ az amplitúdót, $\varphi(t)$ pedig a fázist (vagy a frekvenciát) moduláló jel. Egyszerű trigonometrikus átalakításokkal a jel ún. kvadratúra alakra hozható:

$$s(t) = s_I(t) \cos(\omega_0 t) - s_Q(t) \sin(\omega_0 t),$$

ahol

$$s_I(t) = a(t) \cos(\varphi(t)) \quad (2)$$

$$s_Q(t) = a(t) \sin(\varphi(t)).$$

Az $s_I(t)$ neve a jellel fázisban lévő (in phase), vagy normál komponense, $s_Q(t)$ pedig a kvadratúrában lévő komponens. E két összetevő ismeretében definiálható az (1) szerinti jel komplex alapsávi ekvivalense:

$$s_{\text{ekv}}(t) = s_I(t) + j s_Q(t).$$

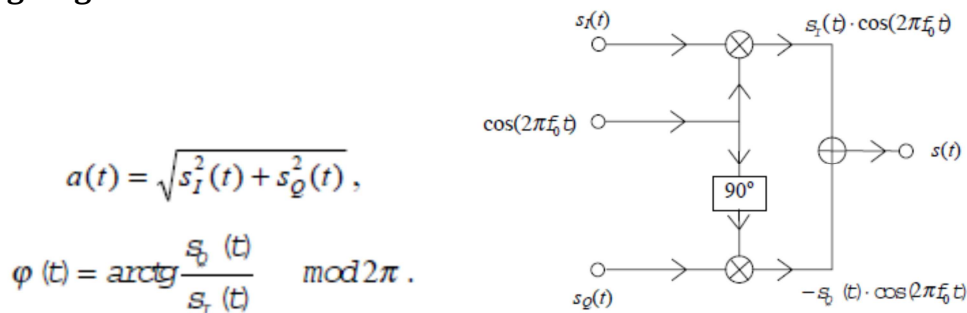
2. Mit nevezünk komplex előburkolónak?

Láthatóan ez egy komplex értékű időfüggvény, a (2) szerinti valós és képzetes résszel. Ismerve a komplex számok Euler féle (exponenciális) alakját, könnyen belátható, hogy:

$$s(t) = \operatorname{Re} \left\{ s_{\text{ekv}}(t) e^{j\omega_0 t} \right\}, \quad (3)$$

ahol ω_0 a szinuszos vivő körfrekvenciája. Az $s_{\text{ekv}}(t) e^{j\omega_0 t}$ komplex kifejezés elnevezése az $s(t)$ jel komplex előburkolója.

3. Írja fel a jel amplitúdóját és fázisát a fázisban lévő és kvadratúra komponensek segítségével.



Maga az $s(t)$ jel pedig egy $a(t)$ szerint változó hosszú, $\varphi(t)$ szerint változó szögű, ω_0 körfrekvenciával forgó fazort jelent.

4. Mit mondhatunk egy valós $s(t)$ jel spektrumáról (nyilván csak a lényeg kell)?

Az $s(t)$ jelet a frekvenciatartományban is vizsgálhatjuk, spektrumát $S(f)$ -fel jelöljük. A spektrum és annak konjugáltja között érvényes a valós jelek spektrumára korábban megismert összefüggés, azaz :

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\}; \quad S(f) = S^*(-f).$$

Kérdéses ekkor a jel és a komplex ekvivalense frekvenciatartománybeli kapcsolata. Az alapsávi ekvivalens spektrumának meghatározásához a (3) szerinti összefüggést a következő alakba érdemes átírni:

$$s(t) = \frac{1}{2} [s_{\text{ekv}}(t) e^{j2\pi f_0 t} + s_{\text{ekv}}^*(t) e^{-j2\pi f_0 t}]. \quad (4)$$

Az egyenlet mindkét oldalát Fourier-transzformálva az alapsávi ekvivalens és a jel spektrumai közti összefüggéshez jutunk. Ehhez tudni kell a komplex függvény és konjugáltja spektrumai közti összefüggést, hiszen (4)-ben az alapsávi ekvivalens konjugáltja is szerepel.

Egy $x(t) = u(t) + jv(t)$ komplex jel Fourier-transzformáltja:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) + jv(t)) e^{-j2\pi ft} dt.$$

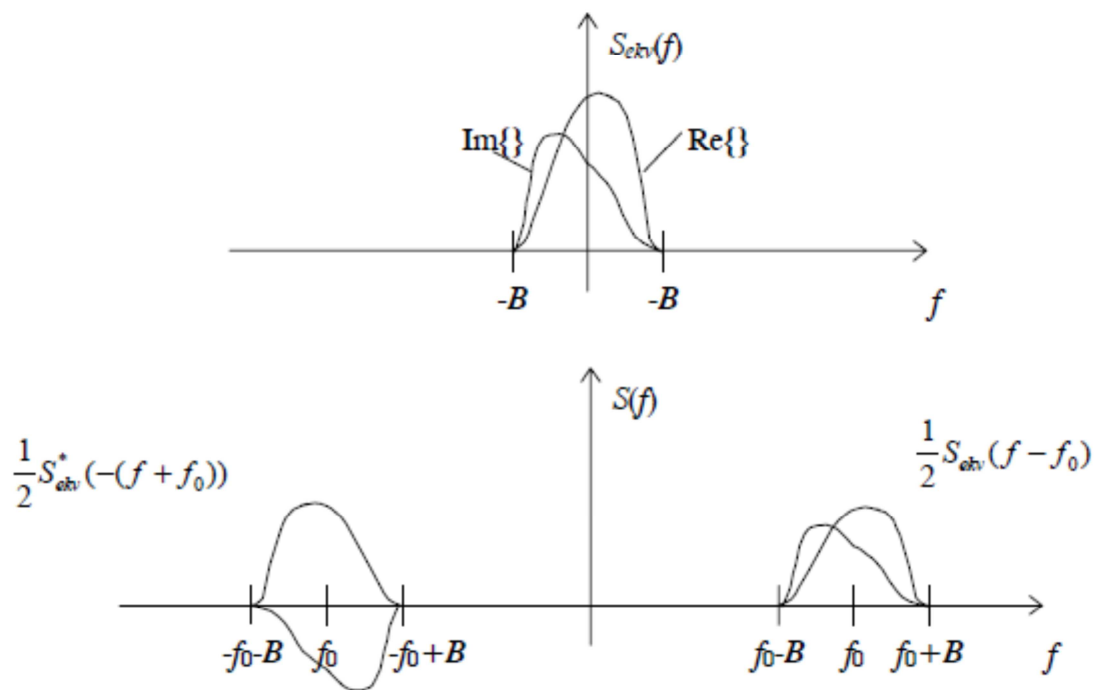
Ekkor $x(t)$ konjugáltjának transzformáltja:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) - jv(t)) e^{-j2\pi ft} dt = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (u(t) + jv(t)) e^{j2\pi ft} dt \right)^* = X^*(-f). \quad (5)$$

Felhasználva továbbá, hogy a (3)-ban és (4)-ben szereplő exponenciális tag frekvenciatartományban f_0 -val való eltolást jelent, a (4) egyenlet Fourier transzformáltja a következő:

$$S(f) = \frac{1}{2} [s_{\text{ekv}}(f - f_0) + s_{\text{ekv}}^*(-(f + f_0))]. \quad (6)$$

Az összefüggés jelentése szemléletesen a 2. ábrán tanulmányozható.



2. ábra A jel és alapsávi ekvivalens spektruma

Jól látható, hogy az ekvivalens alapsávi jel spektruma az $s(t)$ jel spektrumának pozitív frekvenciákra eső részével van közvetlen kapcsolatban. Ugyanis az ekvivalens spektruma az eredeti modulált jel $+f_0$ körüli részének kétszerese. Ezért vezessük be azt a komplex jelet, amely csak a pozitív spektrális összetevőket tartalmazza, azaz :

$$s_+(t) \Leftrightarrow S_+(f) = S(f) + \operatorname{sgn}(f) S(f)$$

Ezt a kifejezést egyszerű átalakítással a következő alakra érdemes hozni:

$$S_+(f) = S(f) + j(-j \operatorname{sgn}(f)) S(f) \quad (7)$$

5. Hogyan számítható egy $h_{ekv}(t)$ ekvivalens alapsávi impulzusválasz függvénnyel jellemezhető rendszer kimenetére érkező jel alapsávi ekvivalense, ha a bemeneti jel $s(t)$?

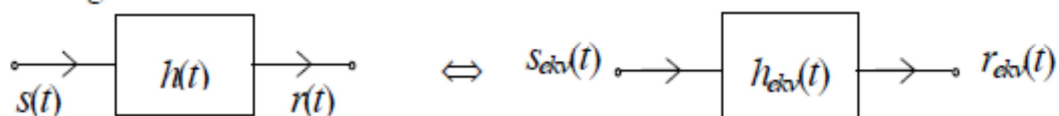
Fourier-transzformáltját az átviteli függvény ekvivalensével szorozva a kimenő alapsávi jel Fourier-transzformáltját kapjuk. Formálisan:

$$r(t) = s(t) * h(t) \Leftrightarrow r_{ekv}(t) = s_{ekv}(t) * h_{ekv}(t),$$

valamint

$$R(f) = S(f)H(f) \Leftrightarrow R_{ekv}(f) = S_{ekv}(f)H_{ekv}(f),$$

Blokkdiagramként ábrázolva



az időtartományban:

$$\begin{aligned} r_{\text{ekv}}(t) &= s_{\text{ekv}}(t) * h_{\text{ekv}}(t) = [s_I(t) + js_Q(t)] * [h_I(t) + jh_Q(t)] = \\ &= s_I(t) * h_I(t) - s_Q(t) * h_Q(t) + \\ &+ j[s_I(t) * h_Q(t) + s_Q(t) * h_I(t)] \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} r_{\text{ekv}}(t) &= s_{\text{ekv}}(t) * h_{\text{ekv}}(t) = [s_I(t) + js_Q(t)] * [h_I(t) + jh_Q(t)] = \\ &= s_I(t) * h_I(t) - s_Q(t) * h_Q(t) + \\ &+ j[s_I(t) * h_Q(t) + s_Q(t) * h_I(t)] \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Ekvivalens szűrés} \\ \text{az alapsávban.} \end{array}$$

$$r(t) = \text{Re}\{r_{\text{ekv}}(t) e^{j2\pi f_0 t}\} = r_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - r_Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

+1 Hilbert transzformáció

Az (7) ben szereplő $-j \text{sgn}(f)$ a Hilbert-transzformálás átviteli függvénye. A Hilbert-transzformáció nem más, mint az $\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{t}$ függvénnyel való konvolúció, ami Fourier-transzformált tartományban $-j \text{sgn}(f)$ -fel való szorzást jelent. Összefoglalva:

$$\mathcal{F}^{-1}(-j \text{sgn}(f)) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{t} \text{ a Hilbert transzformáció súlyfüggvénye,}$$

$$\mathcal{H}\{s(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \text{ a Hilbert-transzformáció konvolúciós integrálja.}$$

Házi feladat

Mindenki gondolkodjon el azon, hogy hogyan lehet megvalósítani egy ideális Hilbert-szűrőt az ismert blokkok felhasználásával.

Egy lehetséges megvalósítás:

