1.Adja meg az irányíthatóság és elérhetőség szabatos definícióját folytonos idejű rendszer esetén.

irányíthatóság:

(1)Legyen a rendszer τ időpillanatban az x állapotban. A rendszer (τ,x) eseménye a nulla állapotba irányítható, ha létezik véges t≤τ időpont és u(τ,t)→ R^n irányítás, hogy x(t)=P(t, τ, x, u())=0 $(\tau,x) \xrightarrow{u()} (t,0)$

(2)A rendszer a τ időpontból teljesen a nulla állapotba irányítható, ha minden x€R^n állapot esetén a (τ,x) esemény a nulla állapotba irányítható.

(3)A rendszer teljesen a nulla állapotba irányítható, ha minden τ időpontból teljesen a nulla állapotba irányítható.

elérhetőség:

(1)Legyen a rendszer a τ időpillanatban a nulla állapotban. A rendszer x állapota a (τ,0) eseményből elérhető, ha létezik véges t≤ τ időpont és u(τ,t)→ R^n irányítás, hogy

x(t))=P(t, τ, x, u())=0 $(\tau,x) \xrightarrow{u()} (t,0)$

(2)A rendszer a τ időpillanatból és a nulla állapotból teljesen elérhető, ha minden x€R^n állapota a (τ,0) eseményből elérhető.

(3)A rendszer a nulla állapotból teljesen elérhető, ha minden τ időpontból a nulla állapotból teljesen elérhető.

2. Adja meg a *P(τ,t)* irányíthatósági Gram-mátrixot időben változó (LTV) és időinvariáns (LTI) lineáris rendszer esetén, és kapcsolatát az irányítható és nem irányítható állapotok altereivel.

irányíthatósági Gram-mátrix

$$P(\tau,\mathrm{t}) = \int_{\tau}^{t} \Phi\,(\tau,\Theta)B(\Theta)B^T\Theta^T(\tau,\vartheta)d\vartheta$$

R^n=range (P) + kernel (P)

irányítható állapotok	nem irányítható állapotok

LTI:

$$P(0,\mathrm{t}) = \int_{0}^{t} \Phi\,(0,\Theta)B(\Theta)B^T\Theta^T(0,\vartheta)d\vartheta = \int_{0}^{t} e^{-A\vartheta}\,BB^Te^{-A^T\vartheta}d\vartheta$$

3. Adja meg az *c M* irányíthatósági mátrixot, az irányítható állapotok *L* alterét és a teljes irányíthatóság feltételét.

irányíthatósági mátrix

$M^c=[B,AB,\ldots, A^{n-1}B]$

$L=Span[B,AB,\ldots, A^{n-1}B]$

teljesen irányítható rendszer ⇔ rank M_c=n=dim x

4. Fogalmazza meg a pólusáthelyezési feladatot állapot-visszacsatolás esetén, és a megoldás meghatározására szolgáló Ackermann-képletet SISO rendszert feltételezve. Adja meg a zárt rendszer hatásvázlatát az állapot-visszacsatolás és mérhető állapot estén.

$x_{i+1}=Ax_i+Bu_i$ $\quad$ $U=-Kx_i$
$y_i=Cx_i$ $\quad$ $\dot{x}=(A-BK)x$
$u_i=-Kx_i$ $\quad$ $\det(sI-A)=\varphi(x)$
$\varphi_c(x)=\det(zI-(A-BK))$ $\quad$ $\det(sI-A)=\varphi_c(x)$
$M_c=[B,AB,\ldots,A^{n-1}B]$

$U=-Kx_i$
$(A,B)\xrightarrow[M_c]{\varphi_c(x)} K$ $\qquad$ $K(0 \ldots\ldots 0i)U_c^{-1}\,\varphi_c(x)$ $\qquad$ Ackermann-képlet

5. Mit értünk irányíthatósági lépcsős alak alatt, és erre alapozva adja meg a stabilizálható rendszer definícióját.

irányíthatósági lépcsős alak

A folytonos idejű idő invariáns lineáris rendszer állapotegyenletének van olyan $2^n=L+L^{\perp}$, $x=x_a+x_b$ felbontása, amelyben az állapotegyenlet alakja ún irányíthatósági lépcsős alakú

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_a\\x_b\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A_{aa} & A_{ab}\\0 & A_{bb}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_a\\x_b\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}B_a\\0\end{bmatrix}u$$

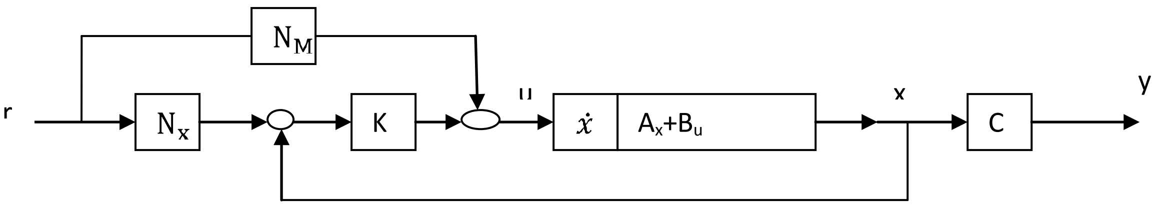
továbbá az L-beli állapotok teljesen a nulla állapotba irányíthatók az $L^{\perp}$-beli állapotok pedig nem.

Az időinvariáns lineáris rendszert stabilizálhatónak nevezik, ha a nem irányítható (az irányíthatósági lépcsős alakban A_{bb}-hez tartozó) sajátértékek stabilak.

6. Adja meg az alapjel miatti korrekcióhoz szükséges *x u N* , *N* mátrixok számítási szabályát, méretüket speciálisan SISO rendszer esetén, és a zárt rendszer hatásvázlatát állapot-visszacsatolás és az alapjel miatti korrekció feltüntetésével.

alapjel miatti korrekció
$N_x=n\ x\ m$ $\qquad$ SISO rendszer esetén m=1
$M_M=m\ x\ m$

$$\begin{bmatrix}A & B\\C & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}N_x\\N_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_{m\,x\,m}\\I_m\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}N_x\\N_M\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\C & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0_{m\,x\,m}\\I_m\end{pmatrix}$$



7. Adja meg a megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság szabatos definícióját, és értelmezését speciálisan lineáris rendszer esetén.

Megfigyelhetőség:

(1)A folytonos idejű lineáris rendszer esetén (τ,x) esemény nem megfigyelhető, ha a $(\tau,0)$ megfigyelhetőségi osztályához tartozik, azaz $C(\varphi)\Phi(\vartheta,\tau)x=0$ minden $\vartheta\geq\tau$ esetén. Ellenkező esetben (τ,x) megfigyelehető.

(2)A folytonos idejű lineáris rendszer teljesen megfigyelhető a τ időpontban, ha minden $x\in R^n$ állapot esetén (τ,x) megfigyelhető.

(3)Teljesen megfigyelhető, ha minden τ időpontban teljesen megfigyelhető.

Rekonstruálhatóság:

(1)A folytonos idejű lineáris rendszer (t,x) eseménye nem rekonstruálható, ha a $(t,0)$ rekonstruálhatósági osztályhoz tartozik, azaz $C(\varphi)\Phi(\vartheta,\tau)x=0$ minden $\vartheta\leq t$ esetén . Ellenkező esetben (t,x) rekonstruálható.

(2)A folytonos idejű lineáris rendszer teljesen rekonstruálható a t időpontban, ha minden $x\in R^n$ állapot esetén (t,x) rekonstruálható.

(3)A rendszer telesen rekonstruálható, ha minden időpontban teljesen rekonstruálható.

8. Adja meg a $Q(\tau,t)$ megfigyelhetőségi Gram-mátrixot időben változó (LTV) és időinvariáns (LTI) lineáris rendszer esetén. Adja meg azt a fiktív rendszert, amelynek $P(\tau, t)$ II t irányíthatósági Gram-mátrixa azonos a $Q(\tau,t)$ megfigyelhetőségi Gram-mátrixszal (megfigyelhetőség és irányíthatóság dualitása).

LTV:

$$Q(\tau,\mathrm{t}) = \int_{\tau}^{t} \Phi^T(\vartheta,\tau)C^T(\vartheta)C(\vartheta)\Phi(\vartheta,\tau)d\vartheta$$

LTI:

$$Q(0,t) = \int_{0}^{t} e^{A^T\vartheta}CC^Te^{A\vartheta}d\vartheta$$

Dualitás: $(A,C)_I$ valósi rendszer
$(A,C)_{II}$ fiktív rendszer

$$P(0,t) = \int_{0}^{t} e^{-(-A^T)\vartheta}(-C)(-C^T)e^{-(-A^T)^T\vartheta}d\vartheta = Q_A(0,t)$$

9. Adja meg az *o M* megfigyelhetőségi mátrixot, a megfigyelhetőségi lépcsős alakot, és erre alapozva a detektálható rendszer definícióját.

M_0 megfigyelhetőségi mátrix

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{rank } M_0 = n = \dim x$$

A folytonos idejű idő invariáns lineáris rendszer állapotegyenletének van olyan $R^n = L + L^{\perp}$, $x = x_a + x_b$ felbontása, amelyben az állapotegyenlet alakja ún megfigyelhetőségi lépcsős alakú

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & 0 \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_a & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} + Du$$

L-beli állapotok teljesen megfigyelhetők, $L^{\perp}$-beli állapotok pedig nem.
Az idő invariáns lineáris rendszert detektálhatónak nevezzük, ha a nem megfigyelhető (a megfigyelhetőségi lépcsős alakban A_{bb}-hez tartozó) sajátértékek stabilak.

10. Adja meg a folytonos idejű teljes rendű megfigyelő állapotegyenletét és a benne szereplő mátrixok megválasztását.

Teljes rendű lineáris állapot megfigyelő:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = F\hat{x} + Gy - Hu$$

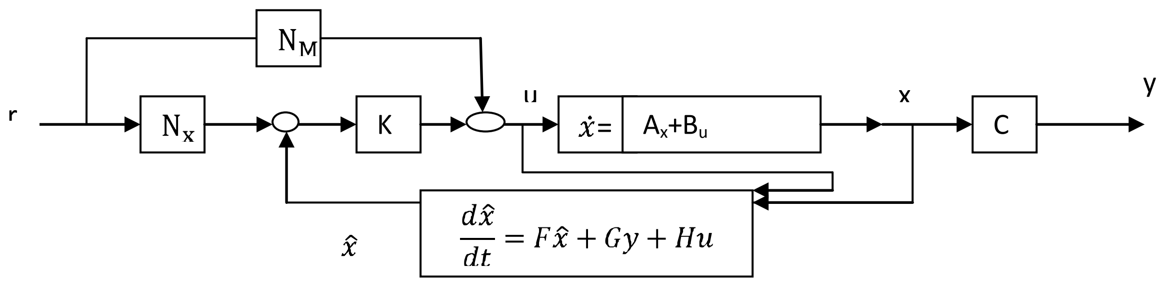
dim $\hat{x}$= dim x = n

F = A-GC   H:=B   továbbá $\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x}$ Stabil és gyors $\tilde{x} = x - \hat{x}$

11. Adja meg a megfigyelőtervezési feladat megoldásának sémáját a dualitás elve és az Ackermann-képlet felhasználásával.

$$(A, C)_I \longleftrightarrow (A^T, C^T)_{II} \xrightarrow{\varphi_c(s);M_{c,II}} K_{II} \rightarrow G = K_{II}{}^T \rightarrow \; F = A - GC\,, H = B$$

12. Adja meg az állapot-visszacsatolás, alapjel miatti korrekció és állapot megfigyelő együttes alkalmazása esetén a zárt rendszer hatásvázlatát.



13.

13. Fogalmazza meg az integrátort is tartalmazó állapot-visszacsatolási feladatot, adja meg a tervezés lépéseit és rajzolja fel alkalmazása esetén a zárt rendszer hatásvázlatát.

$$x_1 = \int y\,dt \;\Rightarrow\; \dot{x_1} = y = Cx$$

$\tilde{x} = (x^T, {x_1}^T)^T$ bővített állapotváltozó

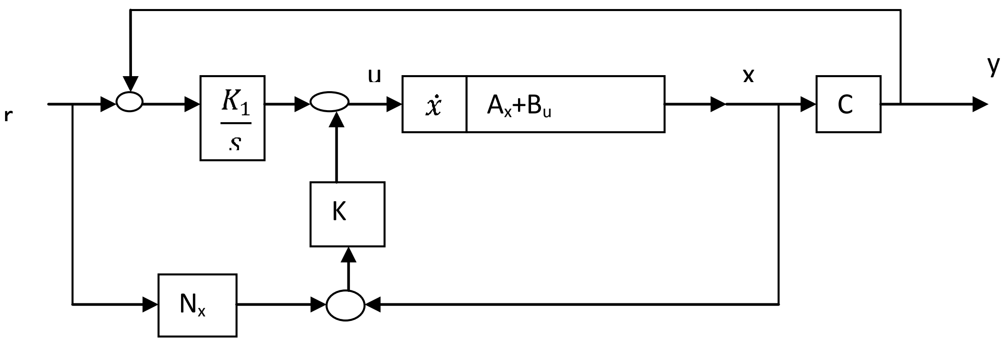
$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{x_1}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}A & 0\\ C & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ x_1\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u \longrightarrow \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$U = -\tilde{K}\tilde{x} = -[K \quad K_1]\begin{pmatrix}x\\ x_1\end{pmatrix}$$

Megoldás sémája:

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \xrightarrow{\varphi_c(s);M_{c,II}} \tilde{K} = [K \quad K_1]$$

A relációnál felhasználjuk, hogy az integrátor állandósult állapotban nulla bemenet mellett is tud nem nulla kimenetet biztosítani, ezért $N_M r$ hatását is realizálni tudja.



14. Adja meg a terhelésbecslést (bemeneti zavaráskompenzálást) alkalmazó állapot megfigyelő tervezési lépéseit, a benne szereplő mátrixok megválasztását és az Ackermann-képletre visszavezethető feladat alakját.

$\dot{d} = 0$ legyen d ismeretlen konstans

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{x_d}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}A & B\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ x_d\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u \longrightarrow \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

$$y = [C \quad 0]\begin{pmatrix}x\\ x_d\end{pmatrix} \longrightarrow y = \tilde{C}\tilde{x}$$

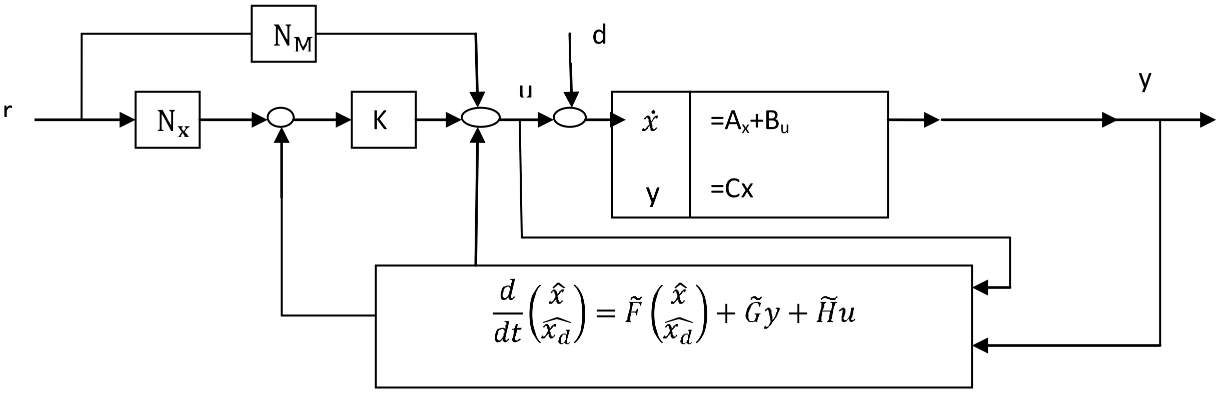
Az állapot-visszacsatolás az eredeti (A,B,C) rendszerhez kell megtervezni, az állapotmegfigyelő az $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ rendszehez, N_x és N_M –t az eredetihez.

$$\tilde{F} = \tilde{A} - \tilde{G}\tilde{C} \qquad \tilde{H} = \tilde{B}$$

$$(\tilde{A}^T, \tilde{C}^T) \xrightarrow{\varphi_c(s);M_{c,II}} \tilde{K}_{II} \rightarrow \tilde{G} = \widetilde{K_{II}}^T$$

$$\begin{pmatrix}N_x\\ N_M\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0_{m\,x\,m}\\ I_m\end{pmatrix} \qquad (A, B) \xrightarrow{\varphi_c(s);M_{c,II}} K$$

15. Adja meg az állapot-visszacsatolást, alapjel miatti korrekciót és terhelésbecslőt alkalmazó szabályozó tervezési lépéseit, és a zárt rendszer hatásvázlatát együttes alkalmazásukkor.



16. Adja meg az idő invariáns lineáris rendszer Kalman-féle felbontását rajzban és a felbontásnak megfelelő állapotegyenletet. Melyik rendszer rész befolyásolja az átviteli függvényt, és mit okoz a többi rendszerkomponens?

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \\ X_D \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{AA} & 0 & A_{AC} & 0 \\ A_{BA} & A_{BB} & A_{BC} & A_{BC} \\ 0 & 0 & A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 & A_{DC} & A_{DD} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \\ X_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_A \\ B_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} C_A & 0 & C_C & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \\ X_C \\ X_D \end{pmatrix}$$

$X_A \longrightarrow$ irányítható és megfigyelhető
$X_B \longrightarrow$ irányítható, nem megfigyelhető
$X_C \longrightarrow$ nem irányítható, megfigyelhető
$X_D \longrightarrow$ nem irányítható, nem megfigyelhető

$$\varphi(s) = \varphi_{AA}(s)\varphi_{BB}(s)\varphi_{CC}(s)\varphi_{DD}(s)$$

Az átviteli függvényt csak az irányítható és megfigyelhető alrendszer befolyásolja. A többi alrendszer pólus-zérus kiejtést eredményez.