Megoldókulcs, Valószínűségszámítás vizsga

2010.06.11.

2010. június 8.

1. Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy egyszer dobunk fejet?

(b) Feltéve, hogy egyszer sem dobtunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy hatost dobtunk?

Megoldás.

- [1] (a) Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a kockával i-t dobtunk, B pedig azt, hogy pontosan egyszer dobtunk fejet. Mivel A_i-k teljes eseményrendszert alkotnak, és $P(A_i) = \frac{1}{6} > 0$ minden i-re, ezért a $P(B)$ valószínűség meghatározásához használhatjuk a teljes valószínűség tételt. Azaz $P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(B|A_i)P(A_i)$. (5 pont)

  Elegendő meghatározni tehát a $P(A_i)$, illetve $P(B|A_i)$ valószínűségeket:

  $P(A_i) = \frac{1}{6}$ $(i = 1 \ldots 6)$, $P(B|A_i) = i\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{i-1}$. Ezeket a képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy: $P(B) = \frac{10}{32}$. (5 pont)

  (b) Jelölje C azt az eseményt, hogy egyszer sem dobtunk fejet. Világos, hogy a $P(A_6|C) = \frac{P(C|A_6)P(A_6)}{P(C)}$ valószínűséget kell meghatároznunk. (3 pont)

  Ismét használhatjuk a teljes valószínűség tételt: $P(C) = \sum_{i=1}^{6} P(C|A_i)P(A_i)$. (3pont)

  (Hivatkozhatnak rögtön a Bayes-tételre is, és akkor arra 3+3 pont jár.)

  Itt $P(C|A_i) = (\frac{1}{2})^i$, $P(A_i) = \frac{1}{6}$. (2 pont) A képletbe behelyettesítve: $P(C) = \frac{1}{6}\frac{63}{64}$. Azaz $P(A_6|C) = \frac{P(C|A_6)P(A_6)}{P(C)} = \frac{(\frac{1}{2})^6\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\frac{63}{64}} = \frac{1}{63}$. (2 pont)

- [2] A pontozás az első verzióhoz hasonlóan.

  (a) Jelölje B azt az eseményt, hogy kétszer dobunk írást. Ekkor a $P(B|A_i) = \frac{i(i-1)}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{i-2}$, ha $2 \leq i \leq 6$, és 0, ha $i = 1$. Behelyettesítve: $P(B) = \sum_{i=2}^{6} \frac{i(i-1)}{2}(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^{i-2}\frac{1}{6} = \frac{119}{384}$.

  (b) Jelölje C azt az eseményt, hogy egyszer sem dobtunk fejet. A (b) részben tehát a $P(A_3|C) = \frac{P(C|A_3)P(A_3)}{P(C)}$ valószínűséget kell kiszámolni. $P(C|A_i) = (\frac{1}{2})^i$, $P(A_i) = \frac{1}{6}$. Ezt behelyettesítve: $P(C) = \frac{1}{6}\frac{63}{64}$, $P(A_3|C) = \frac{P(C|A_3)P(A_3)}{P(C)} = \frac{(\frac{1}{2})^3\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}\frac{63}{64}} = \frac{8}{63}$.

2. Egy üzemben gyártott harisnyák között átlagosan minden ezredik selejtes. A harisnyákat kétszázasával dobozokba csomagolják. 1000 dobozt véletlenszerűen kiválasztva, jelölje X az egyetlen selejtet sem tartalmazó dobozok számát! Adja meg X várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás.

- [1] Jelölje p annak a valószínűségét, hogy egy dobozban nincs selejt.

  Ekkor $p = (\frac{999}{1000})^{200}$ (3 pont) és $X \in B(1000, p)$. (3pont)

  Innen: $E(X) = 1000p$ (2 pont), $\sigma^2 X = 1000p(1-p)$ (2 pont).

- [2] Pontozás, mint az első esetben... $p = (\frac{999}{1000})^{100}$, $X \in B(500, p)$. $E(X) = 500p$, $\sigma^2 X = 500p(1-p)$.

3. ...

Megoldás.

- [1] Legyenek $X \in Po(\frac{1}{2})$, $Y \in Po(\frac{1}{10})$ független valószínűségi változók. Határozza meg $P(X+Y=2)$-t!

  Tudjuk, hogy független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege is Poisson eloszlású, paramétere pedig a paraméterek összege. Azaz: $X + Y \in Po(\frac{1}{2} + \frac{1}{10})$. (8 pont)

  Következésképp $P(X+Y=2) = \frac{(\frac{6}{10})^2}{2!} e^{\frac{6}{10}}$. (2 pont)

  (Megjegyzés: Erőből is ki lehet számolni, azaz $P(X+Y=2) = \sum_{k=0}^{2} P(X=k, Y=2-k)$ (2 pont), ami X és Y függetlensége miatt egyenlő $\sum_{k=0}^{2} P(X=k)P(Y=2-k)$-val. (4 pont) A behelyettesítés további 2 pont...)

- [2] Legyenek $X \in G(\frac{1}{2})$, $Y \in G(\frac{1}{4})$ Határozza meg $P(X+Y=4)$ valószínűséget!

  $P(X+Y=4) = \sum_{i=1}^{3} P(X=i, Y=4-i)$ (2 pont)

  Kihasználva, hogy X és Y függetlenek: $P(X=j, Y=k) = P(X=j)P(Y=k)$ (4 pont), azaz:

  $P(X+Y=4) = \sum_{i=1}^{3} P(X=i)P(Y=4-i) = \sum_{i=1}^{3} (\frac{1}{2})^{i-1}\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^{4-i-1}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}\frac{7}{16}$. (4 pont)

4. Legyen X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, $Y = cos(2\pi X)$ és $Z = sin(2\pi X)$. Számolja ki az $(Y, Z)^T$ pár kovarianciamátrixát!

Megoldás.

- [1] $cov(Y,Z)^T = \begin{pmatrix} cov(Y,Y) & cov(Y,Z) \\ cov(Z,Y) & cov(Z,Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 Y & cov(Y,Z) \\ cov(Y,Z) & \sigma^2 Z \end{pmatrix}$ (3 pont)

  $cov(Y,Z) = E(YZ) - (EY)(EZ)$ (2 pont)

  Határozzuk meg a megfelelő várható értékeket:

  $EY = \int_0^1 cos(2\pi x) 1 dx = \frac{1}{2\pi}[sin(2\pi x]_0^1 = 0$. (2 pont)

  $EZ = \int_0^1 sin(2\pi x) 1 dx = \frac{1}{2\pi}[-cos(2\pi x]_0^1 = 0$. (2 pont)

  $E(YZ) = \int_0^1 sin(2\pi x) cos(2\pi x) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 sin(4\pi x) dx = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi}[-cos(4\pi x)]_0^1 = 0$. (3 pont)

  Azaz $cov(Y,Z) = 0$.

  A kovarianciamátrix felírásához szükségünk van még $\sigma^2 Y$-ra, és $\sigma^2 Z$-re is:

  $\sigma^2 Y = E(Y^2) = \int_0^1 cos^2(2\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1+cos(4\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2}$ (4 pont)

  $\sigma^2 Z = E(Z^2) = \int_0^1 sin^2(2\pi x) dx = \int_0^1 \frac{1-cos(4\pi x)}{2} dx = \frac{1}{2}$. (4 pont)

Így a kovarianciamátrix: $cov(Y,Z)^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

- [2] Teljesen hasonlóan.

5. Az X, Y pár együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = A(x^2+xy+2y^2)I_{\{(x,y):\ 0<x,y<1\}}$. Határozza meg A-t, és az $E(2X+Y)$ várható értéket.

Megoldás.

- [1] Ahhoz, hogy az f sűrűségfüggvény legyen, az A konstans értékét úgy kell beállítani, hogy $\int_0^1 \int_0^1 Af(x,y)\ dx\ dy = 1$ teljesüljön. (2 pont)

  Azaz $\frac{1}{A} = \int_0^1 \int_0^1 x^2 + xy + 2y^2\ dx\ dy = \frac{15}{12} \ \Rightarrow\ A = \frac{12}{15}$ (8 pont)

  $E(2X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (2x+y)f(x,y)\ dx\ dy$ (2 pont)

  Esetünkben ez $\int_0^1 \int_0^1 \frac{15}{12}(2x+y)(x^2+xy+y^2)\ dx\ dy = \frac{35}{12}$. (8 pont)

- [2] Az [1]-hez hasonlóan... $A = \frac{12}{19}$, $E(X+2Y) = \frac{36}{19}$.

6. ...

Megoldás.

- [1] Mondja ki a Moivre-Laplace tételt:

  Fegyeljük meg az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező egy pozitív valószínűségű A eseményét. Jelölje X_i az A esemény i-ik megfigyeléséhez tartozó indikátorváltozót.

  Legyenek tehát X_i-k ($i \in \mathbb{N}$) azonos eloszlású teljesen független indikátor változók: $P(X_i = 1) = P(A) = p$, illetve $P(X_i = 0) = P(\overline{A}) = 1 - p$. (10 pont)

  Ekkor a $Z_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi változókra fennáll, hogy:

  $F_{Z_n}(t) = P(Z_n < t) \to \Phi(t) \quad (n \to \infty)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén. (10 pont)

- [2] Mondja ki a centrális határeloszlás tételt!

  Legyenek X_i-k ($i \in \mathbb{N}$) független, azonos eloszlású valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Létezzék közös $E(X_i) := \mu$ várható érték, és $\sigma^2(X_i) := \sigma^2$ szórásnégyzet. (10 pont)

  Ekkor a $Z_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$ ($n \in \mathbb{N}$) valószínűségi változókra fennáll, hogy:

  $F_{Z_n}(t) = P(Z_n < t) \to \Phi(t) \quad (n \to \infty)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ esetén. (10 pont)