Markov-láncok és egyéb finomságok

Diszkrét idejű sztochasztikus (véletlen) folyamat (tulajdonképpen egy v.v. sorozat OI[1]-ben).
$\{X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ általában X_n függ az összes előzőtől.
Egyszerűbb, ha csak az őt megelőzőtől függ közvetlenül. Ennél is egyszerűbb eset, ha csak az őt követlenül megelőzőtől függ. Ez az elsőrendő **Markov-lánc:**

$$\boxed{\forall n-\text{re}\ \ \forall x_1 \dots x_n \in S\ \ P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})}$$

Itt **S** az állapottér: x_i –k lehetséges értékiet tartalmazza (az állapotokat). Általában S={0,1,2**…**}**.**

<u>**Példa:**</u>

X_n = első *n* dobás közül a legnagyobb értéke (nyilván csak az előző *n-1* -től függ)

$X_n = \max\{X_{n-1}, n.\ \text{dobás értéke}\}$

Pl. $X_{n-1} = 3$ Xn nem lehet **1** vagy **2**

$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 3) = 0$

$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 3) = 0$

$P(X_n = 3 \mid X_{n-1} = 3) = P(n.\ \text{dobás} \leq 3) = \frac{1}{2}$

X_0 kezdeti állapot $P^{(0)}$ eloszlása: $P_i^{(0)} = P(X_0 = i)$: $P^{(0)} = [\ P^{(0)}] = [P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)} \dots]$ vektor.

- A **Markov-láncot** meghatározza a $P^{(0)}$ kezdeti eloszlás és
  $\forall$ *n*-re $\forall$ *i,j* – re $P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$
- Homogén **Markov-lánc**cal $P^{(0)}$ és $\forall$ *i,j* $\in$ **S** –re $p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$

Ezt mátrixba rendezzük (mi annak a valószínűsége, hogy egy lépésben a következő állapotba kerülünk):

$$\prod^{i} = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \\ p_{10} & & \\ & & p_{ij} \\ & & \end{bmatrix} \text{átmenetmátrix.}$$

p3j -t már meghatároztuk.

p4j = $P(X_1 = j \mid X_0 = 4) = 0$ ha j = 1, 2, 3 $p_{44} = \frac{4}{6}$ $p_{45} = \frac{1}{6}$ $p_{46} = \frac{1}{6}$

p5j = $P(X_1 = j \mid X_0 = 5) = 0$ ha j = 1, 2, 3, 4 $p_{55} = \frac{5}{6}$ $p_{56} = \frac{1}{6}$

p6j = $P(X_1 = j \mid X_0 = 5) = 0$ ha j = 1, 2, 3, 4, 5 $p_{66} = 1$ ebből a mátrix:

$$\prod = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[1] Ez fogalmam nincs, mit jelöl…

$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$ *n* lépéses átmenetvalószínűségek.

$\prod^{n} = [p_{ij}^{(n)}] = \prod^{n}$ utóbbi egyenlőség teljes indukcióval belátható.

$\prod^{2}$ $p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_2 = j \mid X_1 = k) P(X_1 = k \mid X_0 = i)$

…[2] => $\prod^{(n)} = \prod^{k} \prod^{n-k}$ ez a **Chapman – Kolmogorov** egyenlőség

Továbbá: $\forall 0 \le k \le n-1$: $p^{(n)} = p^{(k)} \prod^{(n-k)}$

Ezen felül $\prod$ (illetve $\prod^{(n)}$) szotchasztikus mátrix: *Minden eleme nemnegatív,* valamint *a sorok összege 1.*

$\sum_j p_{ij} = \sum_j P(X_1 = j \mid X_0 = i) = 1$. ($X_1$ eloszlása $X_0 = i$ feltétel mellett)

Példa:

- X_n: első *n* dobás összege: $X_n = X_{n-1} +$ n. dobás értéke => **Markov láncot** alkot (a dobások függetlenek)
- Végtelen állapotú **Markov-lánc**: S={0,1,2…} $X_0 = 0$ **1**valószínűséggel $P^{(0)} = (1,0,0\ldots)$

$$\prod = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix}$$

Általánosságban $W_n \ge 0$ W_n függetlenek és azonos eloszlásúak.

$X_n = X_{n-1} + W_n$ Markov lánc $P(W_i = \mathbf{i}) = q_i$ *(annak a valószínűsége, hogy **i**-vel nő az összeg)*

$$\prod = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & .. \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & .. \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix}$$

Előző esetben: $P(W_i = i) = \frac{1}{6}$ ($i = 1,2,\ldots,6$)

- Bolyongások: $W_n \ge 0$ $p = P(W_n = 1)$ $q= (W_n = -1)$
  - Szimmetrikus bolyongás: $p = q = \frac{1}{2}$
- Elnyelő falak esete: Ha elérünk a $\prod$ szélére, akkor 1 valószínűséggel ott maradunk
- Visszaverődő falak: Visszafele lehet lépni, de ha továbblépnénk, a falban maradnánk

Evolúciós egyenlet: $X_n = (X_{n-1} - V_n)^{+} + Y_n$

[2] Ez egy bonyolult levezetés a fotózott jegyzetben, most itt nem kívántam részletezni, kisZH esetén úgysem kell.

Y_n = beérkezett igények száma (független, azonos eloszlású)
V_n = kiszolgált igények száma (független, azonos eloszlású)
egymással is

X_{n-1} = sorhossz

Speciális esete, ha $V_n = 1$ **1** valószínűséggel $X_n = (X_{n-1} - 1)^+ + Y_n$

$b_i = P(Y_n = i)$
$$\prod = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & .. & .. \\ b_0 & b_1 & b_2 & .. & .. \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix}$$

$P^{(n)}$ $P^{(\infty)}$ határértéke a kérdéses, ha létezik, akkor eloszlást ad , független $P^{(0)}$ –tól

$$p_j = \lim_{n \longrightarrow +\infty} p_j^{(n)}$$

Ekkor áll fenn, hogy a **Markov-lánc** stabil, $P^{(\infty)}$ *határeloszlás* (stacionárius eloszlásnak is jó).

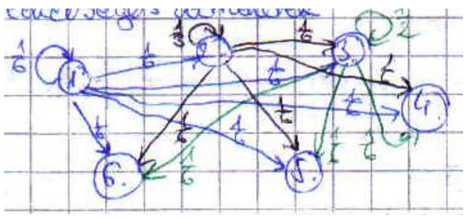
$$P^{(\infty)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} P^{(n)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (P^{(n-1)} \prod) \overset{\text{higgyükel}}{=} (\lim_{n \longrightarrow +\infty} P^{(n-1)}) \prod = P^{(\infty)} \prod$$

ez a $P = P \prod$ egyenlet megoldása (a levezetés nem teljes, higgyük el).

Példa, kockadobós

X_n: n dobás maximuma $P^{(\infty)} = (000001)$ – előbb-utóbb csak 6-os lesz a maximum, csak az lehet a határeloszlás.

Ez állapotátmenet-gráffal ábrázolható. **Pontok** az állapotok, **élek** a lehetséges átmenetek, és **súlyok** az átmenetek valószínűségei



Azt hiszem, ennyi a Markov-láncok témája, hiba bőven lehet benne, ezekért elnézést, kisZH előtt állítottam össze ☺. Továbbá nem teljesen értem én ezt, fotózott előadásjegyzet alapján digitalizáltam. Észrevételek arnongoth@gmail.com címre előfordulhatnak. Pál Balázs ©