Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2002. november 11.

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát, majd határozzuk meg az eredeti, illetve a duális feladat optimumértékét!

$$\begin{aligned}
&\max\{5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 - x_4 \leq 1\\
&x_1 + x_2 \leq 1\\
&x_2 + x_3 - x_4 \leq 1\\
&x_3 \geq 1\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

Megoldás. Mivel a feladatban ki van kötve a változók nemnegatív értékűsége, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakúnak tekinteni és a duálist a $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban felírni (lásd a Rendszeroptimalizálás jegyzet 15. oldalát). Ekkor tehát

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

és $c = (5, 2, 1, -5)$. Így tehát a duális feladat:

$$\begin{aligned}
&\min\{y_1 + y_2 + y_3 - y_4\}\\
&\text{ha}\\
&y_1 + y_2 \geq 5\\
&y_2 + y_3 \geq 2\\
&y_3 - y_4 \geq 1\\
&y_1 + y_3 \leq 5\\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

A kapott első és harmadik egyenlőtlenséget összeadva: $y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \geq 6$, így a duális minimuma legalább 6. Másrészt könnyű olyan megoldást találni a duális feladathoz (például: $y_1 = 1, y_2 = 4, y_3 = 1, y_4 = 0$), amikor a célfüggvény értéke éppen 6, ezért a duális feladat minimuma 6. A dualitástételből tudjuk, hogy ekkor a primál feladat maximuma is 6.

2. Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszernek van olyan megoldása, amelyben minden változó nemnegatív értékű. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van olyan megoldása is, amelyben minden változó nemnegatív, és a pozitív értékű változók száma legföljebb $r(A)$ (ahol r a mátrix rangját jelöli)!

Megoldás. A feladat szerint az $Ax = b, x \geq 0$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Caratheodory tételéből tudjuk, hogy ekkor viszont van (erős) bázismegoldása is; be fogjuk látni, hogy egy ilyenben a pozitív értékű változók száma legföljebb $r(A)$.

(Megjegyezzük, hogy ebben az esetben bázis és erős bázis között nincs különbség, mert a rendszert leíró mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.)

Az $Ax = b, x \geq 0$ rendszert $Ax \leq b$, $(-A)x \leq -b$, $(-E)x \leq 0$ alakban írhatjuk szokásos egyenlőtlenségrendszer alakba, ahol E az $n \times n$–es egységmátrixot jelöli (n pedig A oszlopainak száma). Tekintsünk egy x bázismegoldást; ebben tehát az egyenlőséggel teljesített sorok rangja meg kell egyezzen a rendszert leíró $A^* = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -E \end{pmatrix}$ mátrix rangjával, vagyis n–nel. Nyilván egyenlőséggel teljesülnek az $Ax \leq b$, $(-A)x \leq -b$–nek megfelelő sorok (hiszen ezzel éppen $Ax = b$–t fogalmaztuk át), továbbá $(-E)x \leq 0$–ból az x 0 komponenseinek megfelelő sorok; alkossák ezek a sorok az A^{**} mátrixot. Az $r(A^{**}) = r(A^*) = n$ feltétel azt jelenti, hogy A^{**} oszlopai lineárisan függetlenek.

Így tehát az x nemnulla komponenseinek megfelelő A^{**}–beli oszlopok is lineárisan függetlenek. Ezeknek az oszlopoknak az eredetileg $-E$–hez tartozó része csupa 0–t tartalmaz. Ezért az ő lineáris függetlenségük azt jelenti, hogy az x nemnulla komponenseinek megfelelő A–beli oszlopok is lineárisan függetlenek, ezért a számuk legföljebb $r(A)$. Így tehát az x nemnulla komponenseinek száma legföljebb $r(A)$ és éppen ezt akartuk belátni.

3. Bizonyítsuk be, hogy az n pontú összefüggő G gráf pontosan n élű összefüggő részgráfjai (ezek élhalmazai) egy matroid bázisait alkotják! Példán mutassuk meg, hogy ez nem minden G gráf esetén lesz grafikus matroid! (A feladatban részgráf alatt csak feszítő, vagyis a G minden pontját tartalmazó részgráfot értünk.)

Megoldás. Jelölje G körmatroidját $M(G)$ és jelölje M_2 azt az uniform matroidot, amelynek alaphalmaza $E(G)$ és a legföljebb 1 elemű részhalmazok függetlenek. Tekintsük az $M(G) \vee M_2$ összegmatroidot: ebben $E(G)$ egy részhalmaza pontosan akkor független, ha előáll egy körmentes élhalmazból legföljebb egy további él hozzávételével. Ezért $M(G) \vee M_2$ bázisai azok az élhalmazok, amelyek egy feszítőfából egyetlen új él hozzávételével keletkeznek. Ezek azonban éppen a pontosan n élű, összefüggő részgráfok élhalmazai. Így tehát a feladatban leírt élhalmazok pont az $M(G) \vee M_2$ matroid bázisai.

(Alternatív megoldásként nem nehéz ellenőrizni, hogy teljesülnek a „bázisaxiómák”, vagyis a Rendszeroptimalizálás jegyzet 2.5. Tételének feltételei.)

Végül legyen G az a gráf, amely 2 pontból és a köztük futó 4 párhuzamos élből áll. Ekkor a feladatbeli matroid bázisai $E(G)$ 2 elemű részhalmazai. Így a feladat az $U_{4,2}$ uniform matroidot definiálja, amely nem reguláris.

4. A k paraméter különböző (valós) értékei mellett milyen matroidokat reprezentál az alábbi mátrix (a valós test felett)? Minden ilyen matroidnak adjuk meg a duálisát is és döntsük el, hogy reguláris–e!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Megoldás. Mivel a mátrix oszlopai $\mathbb{R}^2$–beliek, ezért 2–nél több elemű független halmaz nincs a matroidban. Az első három oszlop közül semelyik kettő sem párhuzamos. Ha az utolsó oszlop sem párhuzamos az első három közül semelyikkel, akkor a mátrix az $U_{4,2}$ uniform matroidot koordinátázza (hiszen ilyenkor éppen a legföljebb két elemű halmazok függetlenek). Ez könnyen láthatóan a $k \neq 4, 1, 6$ esetekben következik be. Ilyenkor a matroid nem reguláris és a duálisa is az $U_{4,2}$ matroid.

A $k = 4, 1, 6$ esetekben pedig a független halmazok a legföljebb 1 elemű halmazok, valamint egy kivételével a 2 eleműek. Ez a matroid könnyen elképzelhető például annak a gráfnak a körmatroidjaként, amelyet egy háromszögből az egyik él megduplázásával nyerünk. Ez a matroid tehát grafikus, így reguláris. Mivel a gráf síkbarajzolható, ezért a matroid duálisát könnyen megkaphatjuk a gráf duálisának körmatroidjaként: kiderül, hogy ez a matroid is izomorf a duálisával.

5. Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf és ennek egy maximális élszámú, aciklikus (irányított kör mentes) részgráfját szeretnénk megtalálni. Adjunk erre a feladatra (polinom idejű) $\frac{1}{2}$–közelítő algoritmust!

Megoldás. Számozzuk meg a gráf csúcsait 1–től n–ig tetszőlegesen. Az élhalmazt két diszjunkt részre bontjuk: az egyik részbe tartoznak azok az élek, amelyek kisebb számú csúcsból nagyobb számúba mutatnak, a másik részbe pedig azok, amelyek nagyobból mutatnak kisebbe. Nyilván mindkét élhalmaz aciklikus (hiszen a számozás szerinti növekvő, illetve csökkenő sorrend egy–egy topologikus rendezést ad a két részgráfban).

Válasszuk a két élhalmaz közül azt, amelyiknek több éle van. Ezzel nyilván legalább fele annyi élt kiválasztottunk, mint ahány éle a gráfnak van. Magától értetődő, hogy a feladat optimumértéke legföljebb a gráf élszáma, így ezzel $\frac{1}{2}$–közelítő algoritmust mutattunk (amely triviálisan megvalósítható az élszámban lineáris időben).

6. Adjunk (polinom idejű) optimális algoritmust a $P||C_{\max}$ ütemezési feladatnak arra a speciális esetére, amikor a munkák száma legföljebb a gépek számának kétszerese és minden gép összesen legföljebb két munkát végezhet el.

Megoldás. Jelölje a gépek számát m. Feltehető, hogy a munkák száma pontosan $2m$, mert ha kevesebb volna, akkor kellő számú 0 megmunkálási idejű munkát hozzáveszünk a feladathoz, amivel az optimális megoldást nyilván nem befolyásoljuk.

Számozzuk a $J_1, \ldots, J_{2m}$ munkákat a megmunkálási idő szerinti nemcsökkenő (SPT) sorrend szerint, azaz $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_{2m}$. Mivel minden gép 2 munkát végez el, ezért az ütemezés nem más, mint a munkák egy alkalmas párbaállítása. Azt állítjuk, hogy optimális ütemezést kapunk, ha J_1–et a J_{2m}–mel, J_2–t a J_{2m-1}–gyel, stb., minden $1 \leq i \leq m$ esetén J_i–t J_{2m+1-i}–vel állítjuk párba (vagyis ezeket a párokat végzi el ugyanaz a gép). Jelölje ezt az ütemezést S_0.

Vegyünk egy tetszőleges S ütemezést és legyen $1 \leq i \leq m$ a legkisebb olyan index, amelyre J_i *nem* J_{2m+1-i}–vel áll párban. Legyen ekkor J_i párja J_k és J_{2m+1-i} párja J_l. Változtassuk meg ezt az ütemezést annyiban, hogy J_i párja J_{2m+1-i} és J_k párja J_l legyen (de az összes többi pár maradjon érintetlen); jelölje az így kapott ütemezést S'. Az i választása miatt $p_i \leq p_l, p_k \leq p_{2m+1-i}$, így $p_i + p_{2m+1-i} \leq p_l + p_{2m+1-i}$, valamint $p_k + p_l \leq p_l + p_{2m+1-i}$. Ez tehát azt jelenti, hogy $C_{\max}^{S'} \leq C_{\max}^{S}$, vagyis a célfüggvény értéke nem nőtt.

Ilyen változtatások (legföljebb m–szeri) alkalmazásával elérhetjük, hogy egy tetszőleges S ütemezésből megkapjuk az S_0 ütemezést, miközben a célfüggvény értéke végig nem nőtt. Ez éppen azt jelenti, hogy S_0 optimális.

Az S_0 ütemezés nyilván megvalósítható polinomiális ($O(m \log m)$ idejű) algoritmussal. Megjegyezzük, hogy a fenti megoldást fogalmazhattuk volna úgy is, hogy LPT sorrend szerinti listás ütemezést alkalmazunk; könnyen látható, hogy ez ugyanehhez az ütemezéshez vezetett volna.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2002. december 16.

1. a) Adjuk meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek egy erős bázismegoldását!

b) Adjuk meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek egy olyan bázismegoldását, ami *nem* erős bázismegoldás!

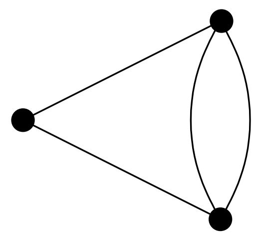
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_2 - x_3 &\leq 1 \\ x_3 - x_4 &\leq 1 \\ &\vdots \\ x_{99} - x_{100} &\leq 1 \\ x_{100} - x_1 &\leq 1 \end{aligned}$$

2. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b_0$ lineáris egyenlőtlenségrendszer nem megoldható. Bizonyítsuk be, hogy ekkor tetszőleges olyan b-re, amire $Ax \leq b$ megoldható, b-nek egyetlen, alkalmasan megválasztott koordinátája megváltoztatható úgy, hogy a kapott b'-re $Ax \leq b'$ már nem megoldható!

3. Bizonyítsuk be, hogy az n pontú összefüggő G gráf pontosan $n-2$ élű körmentes részgráfjai (ezek élhalmazai) egy matroid bázisait alkotják! Példán mutassuk meg, hogy ez nem minden G gráf esetén lesz grafikus matroid!

4. Meg lehet-e a p paraméter értékét úgy választani, hogy a

$$\begin{pmatrix} p & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$



mátrix a valós test felett az ábrán látható gráf körmatroidját koordinátázza?

5. Adjunk polinom idejű algoritmust az $1|r_j|C_{\max}$ ütemezési feladatra!

6. Bizonyítsuk be, hogy a Steiner-fa probléma metrikus esetének mindig van olyan optimális megoldása, amely legföljebb a terminálpontok számánál kettővel kevesebb Steiner-pontot használ! (A probléma metrikus esete alatt azt értjük, hogy a gráf élein adott súlyfüggvény kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget és a gráf teljes.)

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2003. november 14.

1. A Fourier-Motzkin elimináció segítségével döntsük el, hogy van-e megoldása az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek. Ha van megoldás, adjunk is meg egyet.

$$\begin{aligned}
&2x + y - z \geq 4\\
&x + 3y + z \leq 3\\
&x + y + 2z \geq 4\\
&x \geq 0\\
&y \geq 0\\
&z \geq 0
\end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -4\\ 3\\ -4\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az eliminációt a jegyzet (2003-as kiadásának) 9–10-edik oldalán írtak szerint végezzük:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 3\\ -1 & -1/2 & 1/2 & -2\\ -1 & -1 & -2 & -4\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 5/2 & 3/2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3/5 & 2/5\\ 1 & -1/2 & -1/2\\ 1 & 1/3 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 3/5 & 2/5\\ 0 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/3 & 1\\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{r|r} 1 & 2/3\\ 1 & 3\\ -1 & -1\\ -1 & 0 \end{array}\right)$$

A kapott alak első sora azt fejezi ki, hogy $z \leq \frac{2}{3}$, a harmadik sor szerint viszont $z \geq 1$. Ezért a rendszernek nincs megoldása.

2. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát.

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat megoldáshalmazán a célfüggvény felülről korlátos-e.

$$\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\}\\
&\text{ha}\\
&x_1 + x_2 \leq 1\\
&x_2 + x_3 \leq 2\\
&x_3 + x_4 \leq 3\\
&x_4 + x_5 \leq 4
\end{aligned}$$

Megoldás. A feladat $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A duális feladat definíció szerint $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakú. Ezt részletezve a duális a következő:

$$\begin{aligned}
&\min\{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4\} \\
&\text{ha} \\
&y_1 = 1 \\
&y_1 + y_2 = 1 \\
&y_2 + y_3 = 1 \\
&y_3 + y_4 = 1 \\
&y_4 = 1 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy a duális nem megoldható (mert az első négy egyenletből $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$, ami ellentmond az ötödik egyenletnek). Ebből pedig következik, hogy a primál feladat célfüggvénye a megoldáshalmazon nem felülről korlátos (mert ez a jegyzet 2003-as kiadásának 1.6-os tétele szerint azzal volna ekvivalens, hogy a duálisnak van megoldása).

3. Adjunk példát olyan nem grafikus matroidra, melynek minden minorja grafikus. (Állításunkat bizonyítsuk is be.)

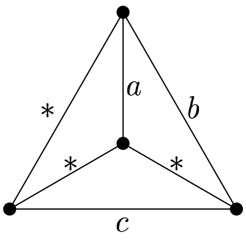
Megoldás. Az egyik lehetséges megoldás az $U_{4,2}$ uniform matroid. Erről ismert, hogy nem grafikus (de ez közvetlenül is könnyen ellenőrizhető). Ha egy elemet elhagyunk $U_{4,2}$-ből, akkor $U_{3,2}$-t, vagyis a háromszög körmatroidját kapjuk (ami persze így grafikus). Ha $U_{4,2}$-ben összehúzunk egy elemet, akkor $U_{3,1}$-et kapjuk, ami viszont a két csúcs között futó, három párhuzamos élből álló gráf körmatroidja, így szintén grafikus. Ezzel beláttuk, hogy $U_{4,2}$ minden minorja grafikus, hiszen további elemek elhagyásával, vagy összehúzásával a matroid grafikus marad.

Megjegyezzük, hogy a jegyzet 2.42-es tételéből közvetlenül is látszik, hogy $U_{4,2}$ minden minorja grafikus, hiszen nem tartalmazhatja minorként az ott felsorolt matroidokat (mert túl kevés eleme van).

Az ugyanebben a tételben szereplő $M = [M(K_5)]^*$ matroid is jó megoldás a feladatra. Ismert, hogy ez sem grafikus. Ha most X az alaphalmaz tetszőleges részhalmaza, akkor (a jegyzet 2.21-es tételét alkalmazva) az $M \setminus X = (M(K_5)/X)^*$, illetve az $M/X = (M(K_5) \setminus X)^*$ összefüggést kapjuk. Így elég belátni, hogy $M(K_5)$ minden minorának a duálisa grafikus. Azonban K_5 minden minora már síkbarajzolható, így a (síkbarajzolásából nyerhető) duális gráfjához tartozó grafikus matroid bizonyítja az állítást. Ugyanez elmondható az $[M(K_{3,3})]^*$ matroidról is, így az is jó megoldás a feladatra.

4. Egy egyiptomi piramisban találtak egy sajnos megrongálódott papiruszdarabot, amelyen ez állt:

Körülbelül 4500 év múlva fel fogják fedezni a matroi∗okat és például az alábbi gráf körmatroidját az alábbi mátrix fogja reprezentálni a valós test felett.

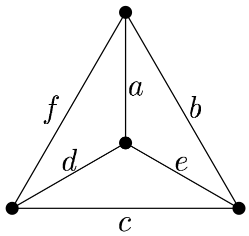


$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pótoljuk az olvashatatlan részeket (amelyeket ∗-gal jelöltünk).

Megoldás. Az első ∗ helyén „p" állt (az írnok hibázott).

A mátrixban az $\{a, b, e\}$, illetve a $\{b, c, f\}$ oszlophalmazok lineárisan összefüggőek, így a gráf megfelelő éleinek kört kell alkotniuk. Ezért az e és az f élek helye egyértelmű. Ebből a gráf élei rekonstruálhatók (hiszen d helyére már csak egy lehetőség marad):



Ahhoz, hogy a kapott gráf mátrixreprezentációja helyes legyen, a $\{d, a, f\}$ és a $\{d, e, c\}$ oszlophalmazoknak lineárisan összefüggőknek kell lenni (mert a megfelelő élhalmazok kört alkotnak). Előbbiből következik, hogy a mátrix d oszlopának alsó eleme 15, utóbbiból következik, hogy a d oszlop felső eleme 10.

5. Tekintsük az {`a`,`b`,`c`,`e`,`é`,`g`,`i`,`k`,`m`,`r`,`s`,`v`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

```
béka (2), maki (3),  egér (4),  réce (4),   maci (4),
bika (4), csiga (5), veréb (5), gébics (6), vércse (6).
```

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló közelítő algoritmust.

Megoldás. Egyesével választjuk a halmazokat, mindig olyan H halmazt választva, melyre H költségének és az általa lefedett, addig még fedetlen elemek számának hányadosa minimális.

Elsőként a `béka` halmazt kell választanunk, mert ebben a legkisebb az egy elemre eső költség ($\frac{1}{2}$). A következő halmaz a `vércse` kell legyen, ez a hátralévő 8 betűből 5-öt fed le, 6 költséggel, ez $\frac{6}{5}$ költséget jelent betűnként, ami a legkisebb a hátralévő szavak közül. Ekkor a `g,i,m` betűk vannak még hátra. A `maki` halmaz ezek közül kettőt is fed (hármat semelyik halmaz sem), 3 költséggel, így nyilván ezt kell bevenni a harmadik lépésben, végül a hátramaradó `g` betűhöz a legolcsóbb, `g`-t tartalmazó még ki nem választott szót kell vegyük, ez pedig a 4 költségű `egér`. A kapott fedés tehát: {`béka, maki, egér, vércse`}, költsége 15.

6. Igazoljuk, hogy a munkák p_j/w_j értékek szerint nemcsökkenő sorrendben történő ütemezése optimális megoldás az $1||\sum w_jC_j$ feladatra.

Megoldás. Tekintsünk egy optimális ütemezést, legyen ez $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Belátjuk, hogy nem fordulhat elő, hogy valamely i indexre $p_i/w_i > p_{i+1}/w_{i+1}$ teljesüljön, amiből már következik, hogy a munkák p_j/w_j szerint nem csökkenő sorrendben vannak, ellenkező esetben ugyanis valamely i. munka után egy nála kisebb (p_j/w_j) költségű kéne hogy következzen.

Tegyük fel indirekten, hogy létezik olyan i index, melyre $p_i/w_i > p_{i+1}/w_{i+1}$. Cseréljük fel az i. és az $(i+1)$. munkát! Legyenek a csere utáni befejezési idők $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$. Ekkor $C'_1 = C_1,\ C'_2 = C_2,\ \ldots, C'_{i-1} = C_{i-1}$ és $C'_{i+1} = C_{i+1},\ C'_{i+2} = C_{i+2},\ \ldots, C'_n = C_n$, továbbá $C'_i = C_i + p_{i+1} - p_i$.

Jelöljük az új sorrend szerinti j. munka súlyát w'_j-vel. Ekkor $w'_1 = w_1,\ w'_2 = w_2,\ \ldots, w'_{i-1} = w_{i-1}$ és $w'_{i+2} = w_{i+2},\ w'_{i+3} = w_{i+3},\ \ldots, w'_n = w_n$, továbbá $w'_i = w_{i+1}$ és $w'_{i+1} = w_i$.

Így

$$\sum_{j=1}^{n} w'_jC'_j = \sum_{j=1}^{i-1} w'_jC'_j + w'_iC'_i + w'_{i+1}C'_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n} w'_jC'_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{i-1} w_jC_j + w_{i+1}(C_i + p_{i+1} - p_i) + w_iC_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n} w_jC_j.$$

Mivel $C_{i+1} = C_i + p_{i+1}$, az utolsó sor

$$\sum_{j=1}^{i-1} w_jC_j + w_{i+1}(C_{i+1} - p_i) + w_i(C_i + p_{i+1}) + \sum_{j=i+2}^{n} w_jC_j$$

alakba írható, ami éppen

$$\sum_{j=1}^{n} w_jC_j - w_{i+1}p_i + w_ip_{i+1},$$

ami kisebb, mint $\sum_{j=1}^{n} w_jC_j$, hiszen

$$w_{i+1}p_i > w_ip_{i+1}$$

teljesül, $p_i/w_i > p_{i+1}/w_{i+1}$ miatt. Az eredeti ütemezés tehát nem volt optimális, ami ellentmondás, ezzel a bizonyítást befejeztük.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2003. december 19.

1. Döntsük el, hogy az
a) $x = 1, y = -1, z = -2$
b) $x = 0, y = 1, z = 1$
c) $x = 1, y = 0, z = -1$
választással bázismegoldását, illetve erős bázismegoldását adtuk-e meg az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek:

$$x + y \le 1$$
$$y - z \le 1$$
$$x + 2y - z \le 1$$

2. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát.
b) Határozzuk meg a (primál) feladat maximumát.

$\max\{2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5\}$
ha
$x_1 - x_2 \le 1$
$x_2 - x_3 \le 2$
$x_3 - x_4 \le 3$
$x_4 - x_5 \le 4$

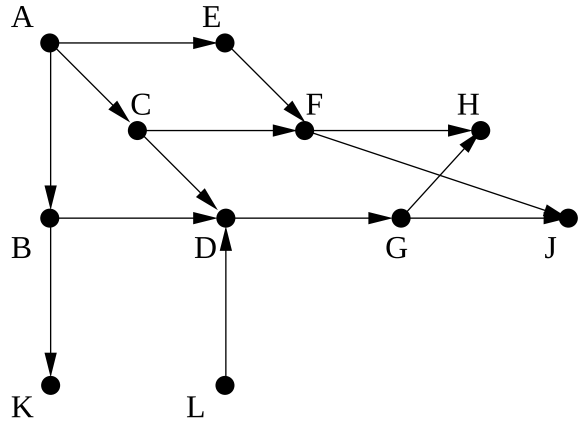
3. Adjunk példát olyan G gráfra, melyre $M(G) \vee M(G)$ (tehát a G gráf körmatroidjának az önmagával vett összege) nem grafikus. (Állításunkat bizonyítsuk is be.)

4. Hány pontja lehet annak az összefüggő gráfnak, melynek a körmatroidját az alábbi mátrix reprezentálja a valós test felett? (A $*$-gal jelölt szám olvashatatlan, de nem is kell tudni a válaszhoz.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & * & 3 \end{pmatrix}$$

5. Adjunk 2-approximációs algoritmust egy tetszőleges gráf maximális élszámú vágásának meghatározására. (Segítség: keressünk olyan vágást, ami az összes élnek legalább a felét tartalmazza.)

6. Adjuk meg az alábbi precedenciagráffal megadott $P2|prec, p_j = 1|C_{max}$ feladat egy optimális megoldását **a Coffman-Graham algoritmus segítségével**.



Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2004. november 24.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás olyan alakú legyen, mint a primál feladat felírása.)

b) Határozzuk meg a (primál) feladat maximumát.

$$\begin{aligned}
&\max\{8x_1 + 7x_2 + 8x_3\}\\
&\text{ha}\\
&3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1\\
&x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 1\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Megoldás. A feladat $\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$c = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

A duálist ezért érdemes a Rendszeroptimalizálás könyv (2004-es kiadásának) 23-24. oldalán leírt ekvivalens alakjában felírni. (Dolgozhatunk persze a duális eredeti, definíció szerinti alakjával is, ekkor azonban a feladat mátrixos felírásában szerepeltetni kell az $x \geq 0$ feltételnek megfelelő egyenlőtlenségeket is.) Eszerint a duális $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$, ami részletezve a következő:

$$\begin{aligned}
&\min\{y_1 + y_2\}\\
&\text{ha}\\
&3y_1 + y_2 \geq 8\\
&2y_1 + y_2 \geq 7\\
&y_1 + 2y_2 \geq 8\\
&y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

A primál feladat maximuma helyett a dualitástétel értelmében megtehetjük, hogy a most meghatározott duális feladat minimumát számítjuk ki. Ez azért egyszerűbb, mert a duális (fenti alakja) két változós, ezért a megoldáshalmaz síkban ábrázolható és a minimum kiszámítható a Rendszeroptimalizálás könyv 13-14. oldalán bemutatott egyszerű módszerrel. A részletes számolást itt mellőzzük; a kapott eredmény szerint a duális minimumértéke 5 (ami az $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ értékekre adódik). Ezért a primál feladat maximumértéke is 5.

2. Legyen adott egy A totálisan unimoduláris mátrix. A feladatunk az, hogy kiválasszuk a mátrix néhány (de legalább 1) oszlopát úgy, hogy a kiválasztott oszlopok által alkotott A' mátrix minden sorában az elemek összege 0 legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan polinomiális idejű algoritmus, amely eldönti, hogy ilyen kiválasztás létezik-e!

Megoldás. Megmutatjuk, hogy a feladat megfogalmazható lineáris programozási feladatként. Mivel ismert, hogy ezek megoldására van polinom idejű algoritmus, ezzel a feladatot megoldjuk.

Első közelítésben egészértékű programozási problémaként fogalmazzuk meg a feladatot. Ha az A mátrix n oszlopú, akkor egy olyan n-dimenziós x oszlopvektort keresünk, amelynek minden komponense 0 vagy 1: az 1-es koordinátáknak megfelelő oszlopok alkotják majd a kiválasztott részhalmazt. A feladat feltétele úgy fogalmazható meg, hogy a kiválasztott oszlopok összege a nullvektor, vagyis az x vektorra $A \cdot x = 0$ teljesül. Könnyű garantálni, hogy x minden komponense 0 vagy 1 legyen: a $0 \le x \le (1, 1, \ldots, 1)^T$ feltétel éppen ezt mondja, ha x egészértékűségét is kikötjük. A most kapott rendszernek persze az $x = 0$ megoldása; a kérdés éppen az, hogy van-e ezen kívül más megoldás is. Ehhez egyszerűen válasszuk c célfüggvéynek a csupa 1 sorvektort; ekkor cx az x koordinátáinak összege, ami pontosan akkor lesz pozitív, ha x koordinátái között van nemnulla is. Ezzel tehát a

$$\max\{(1, \ldots, 1)x : Ax = 0, 0 \le x \le (1, \ldots, 1)^T, x \text{ egész}\}$$

egészértékű programozási feladathoz jutottunk; pontosan akkor létezik a feladat szövegének megfelelő kiválasztás, ha ennek a programnak a maximuma pozitív.

A fenti feladathoz tartozó együtthatómátrix

$$\begin{pmatrix} A \\ -A \\ E \\ -E \end{pmatrix},$$

ami a tanult triviális lemma szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.13. lemma) szintén totálisan unimoduláris, ha A az volt. Mivel az egyenlőtlenségek jobb oldalain is egészek állnak (mindenhol 0 vagy 1), ezért a fenti IP feladat helyett megoldhatjuk a megfelelő LP feladatot is, a tanult tétel szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.12. tétel) a két optimum azonos. Így a feladatot valóban sikerült LP feladatként megfogalmazni.

3. Legyen $(E, \mathcal{F})$ egy matroid, melyben a bázisok p eleműek valamely $p \ge 1$ egészre, vagyis $r(E) = p$. A matroid *csonkolásának* hívjuk azt az $(E, \mathcal{F}')$ matroidot, melynek bázisai az eredeti matroid $p - 1$ elemű függetlenjei.

a) Bizonyítsuk be, hogy ez is matroid!

b) Adjunk példát olyan grafikus matroidra, aminek a csonkoltja is grafikus, és olyanra is, aminek a csonkoltja nem!

Megoldás. A feladat szövege szerint $\mathcal{F}'$ elemei az $\mathcal{F}$-be tartozó halmazok közül a legföljebb $p - 1$ eleműek. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}'$ kielégíti a függetlenségi axiómákat (Rendszeroptimalizálás könyv, 2.2. tétel). (F_1) nyilvánvalóan teljesül, mert $p \ge 1$ miatt az üres halmaz legföljebb $p - 1$ elemű $\mathcal{F}$-beli. (F_2) is nyilván igaz, hiszen egy legföljebb $p - 1$ elemű $\mathcal{F}$-beli halmaznak minden részhalmaza is nyilván ilyen tulajdonságú (mert $\mathcal{F}$-re teljesül az (F_2) axióma). (F_3) ellenőrzéséhez válasszunk $\mathcal{F}'$-ből egy X és egy Y halmazt, amelyekre $|X| > |Y|$. Mivel $\mathcal{F}$-re fennáll az (F_3) axióma, ezért van olyan $x \in X - Y$, melyre $Y + x \in \mathcal{F}$. Mivel $|X| > |Y|$ miatt $|Y| \le p - 2$, ezért $Y + x \in \mathcal{F}'$ is igaz.

A b) feladat megoldásához tekintsük először az $U_{4,3}$ uniform matroidot. Ez persze grafikus (hiszen a négy hosszú kör körmatroidja). A csonkolás után ebből az $U_{4,2}$ uniform matroidot kapjuk, amiről ismert, hogy nem grafikus. Ha viszont az $U_{3,2}$ matroidot csonkoljuk, akkor az $U_{3,1}$-et kapjuk; ezek közül mindkettő grafikus, hiszen az első a háromszög, a második pedig a három párhuzamos élből álló gráf körmatroidja. (Persze mindkét esetben számtalan más jó példa is adható.)

4. Legyen M_x az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & x & 1 & x \end{pmatrix}$$

mátrixszal reprezentált matroid. Az x valós paraméter minden értékére határozzuk meg, hogy milyen matroid lesz az $M_x \vee M_x$ összeg!

Megoldás. Jelölje a mátrix négy oszlopát (sorrendben) m_1, m_2, m_3 és m_4.

Ha $x = 0$, akkor m_2 hurok (semmilyen független halmazban nincs benne). Az $\{m_1, m_3\}$ és az $\{m_4\}$ halmazok viszont függetlenek M_x-ben (mindkét rendszer lineárisan független). Így $M_x \vee M_x$-ben ezek uniója, $\{m_1, m_3, m_4\}$ is független, valamint persze ennek minden részhalmaza is. Ezzel az $x = 0$ esetben megadtuk az $M_x \vee M_x$-beli függetleneket; jól látható, hogy a 3 elemű szabad matroid és az 1 elemű triviális matroid direkt összegéről, $(U_{3,3} + U_{1,0})$-ról van szó.

Ha viszont $x \neq 0$, akkor az $\{m_1, m_4\}$ és az $\{m_2, m_3\}$ halmazok függetlenek M_x-ben. Így $M_x \vee M_x$-ben ezek uniója, $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ is független, valamint ennek minden részhalmaza. Ezért az $x \neq 0$ esetben az $M_x \vee M_x$ matroid az $U_{4,4}$ szabad matroid.

5. Tekintsük a RÉSZLETÖSSZEG probléma következő esetét. Legyenek az S halmaz elemei 15, 16, 18, 22, 24, és legyen a részletösszegként megcélzott t érték 44. Hajtsuk végre és dokumentáljuk az előadáson tanult $(1 - \varepsilon)$-közelítő algoritmust az $\varepsilon = 0,5$ értékre.

Megoldás. A (bizonyos) részletösszegeket tartalmazó listák az összefésülések, ritkítások $(\delta = \varepsilon/n = 0.1)$ és a t-nél nagyobb elemek kihagyása után a következőképpen alakulnak:

$$\begin{aligned}
&L_0 = \{0\}, \;\; L_0' = \{15\} \\
&L_1 = \{0, 15\}, \;\; L_1' = \{16, 31\} \\
&L_2 = \{0, 15, 31\}, \;\; L_2' = \{18, 33, (49)\} \\
&L_3 = \{0, 15, 18, 31\}, \;\; L_3' = \{22, 37, 40, (53)\} \\
&L_4 = \{0, 15, 18, 22, 31, 37\}, \;\; L_4' = \{24, 39, 42, (46), (55), (61)\} \\
&L_5 = \{0, 15, 18, 22, 31, 37, 42\}.
\end{aligned}$$

A kapott közelítő érték az L_5 halmaz legnagyobb eleme, vagyis 42.

6. Tekintsük a $\mathrm{P2}|prec, p_j = 1|C_{max}$ feladatnak azon speciális eseteit, amelyben a precedenciákat leíró gráf egy emeletekre bontásában minden emeleten páros számú csúcs van. Adjunk meg ezen speciális esetekre egy optimális ütemezési algoritmust, és bizonyítsuk is az optimalitást.(A Coffmann-Graham algoritmusra való hivatkozást mellőzzük.)

(A feladatot úgy kell érteni, hogy az említett emeletekre bontás az input része. Emellett értelemszerűen polinom idejű algoritmust kell megadni.)

Megoldás. Tekintsük a precedenciagráf egy olyan emeletekre bontását, melyben minden emeleten páros sok csúcs található (ilyen emeletekre bontás előállítása az algoritmusban nem volt elvárás). Először az első emelet munkáit tesszük fel a két gépre kettesével (vagyis mindkettőre egyet-egyet) Ez nyilván megtehető, hiszen az ezen az emeleten levő munkák nem függnek egyetlen más munkától sem. Mivel az emeleten páros sok csúcs van, ez a fázis az emelet pontjainak elfogyásával ér véget. Folytassuk az ütemezést most a második emelet munkáival hasonlóképp. Ez azért tehető meg, mert azon munkák, melyektől a második emelet munkái függhetnek, mind az első emeleten kell legyenek, tehát az adott időpontra valamennyien elkészültek ($p_j = 1$ minden j-re!). Ugyanígy látható be, hogy az eljárás folytatható a további emeletekre is. Az ütemezés során mindkét gép mindvégig dolgozik, így az ütemezés optimális kell legyen, hiszen párhuzamos gépekről van szó. Az ütemezés az emeletekre bontás ismeretében lineáris időben megadható.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2004. december 20.

1. a) Adjuk meg az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszer egy erős bázismegoldását!
b) Adjuk meg az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek egy olyan bázismegoldását, amely nem erős bázismegoldás!

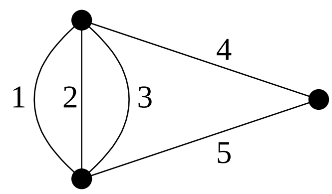
$$\begin{array}{rcrcl} x & - & y & \leq & 1 \\ y & - & z & \leq & 1 \\ x & - & z & \leq & 1 \end{array}$$

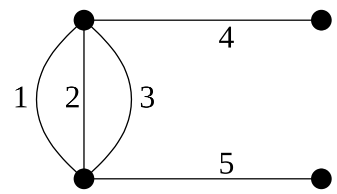
2. Ha egy G (egyszerű) gráf éleihez nemnegatív valós számokat rendelünk úgy, hogy minden v csúcsra a v-re illeszkedő élekhez rendelt számok összege legföljebb 1, akkor ezt a hozzárendelést *törtpárosításnak* nevezzük. Egy törtpárosítás *mérete* a gráf összes éléhez rendelt számok összege. Ha egy G (egyszerű) gráf csúcsaihoz rendelünk nemnegatív valós számokat úgy, hogy minden e élre az e két végpontjához rendelt számok összege legalább 1, akkor ezt a hozzárendelést *törtlefogásnak* nevezzük. Egy törtlefogás *mérete* a gráf összes csúcsához rendelt számok összege. Bizonyítsuk be, hogy minden G (egyszerű) gráfra a maximális méretű törtpárosítás mérete megegyezik a minimális méretű törtlefogás méretével!

3. Példákon mutassuk meg, hogy az a, b, c valós paraméterek különböző választása mellett az alábbi M mátrix által koordinátázott matroid lehet grafikus is és nem grafikus is!

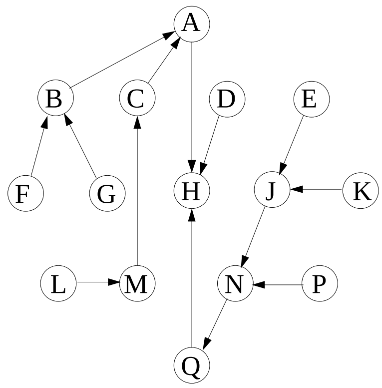
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

4. Grafikus-e az alábbi ábrákon látható gráfok körmatroidjainak az összege?





5. Adjuk meg az alábbi precedenciagráfhoz tartozó $P3|prec, p_j = 1|C_{\max}$ probléma egy optimális megoldását **Hu algoritmusa segítségével**.



6. Adjunk $\frac{2}{3}$-approximációs algoritmust az alábbi problémára: keressük meg egy adott G gráf csúcshalmazának egy olyan három részekre bontását, melyre a részek között menő élek száma maximális.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2005. november 23.

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás olyan alakú legyen, mint a primál feladat felírása.)

$$\begin{aligned}
&\min\{x_1+x_2+x_3+x_4\}\\
&\text{ha}\\
&x_1+2x_2\geq 2\\
&x_2+3x_3\geq 3\\
&x_3+4x_4\geq 4\\
&x_4+x_1\geq 1
\end{aligned}$$

Megoldás. Ismert, hogy a célfüggvény minimuma egyenlő a célfüggvény ellentettje maximumának ellentettjével. Ezért a feladat $(-1)\cdot\max\{cx : Ax\leq b\}$ alakú, ahol

$$A=\begin{pmatrix}-1&-2&0&0\\0&-1&-3&0\\0&0&-1&-4\\-1&0&0&-1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\-1\end{pmatrix},$$
$$c=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

A duális feladat ezért $(-1)\cdot\min\{yb : yA=c, y\geq 0\}$ alakú (Rendszeroptimalizálás könyv, 22. oldal). Ha itt a minimum ellentettje helyett ismét az ellentett célfüggvény maximumára térünk át (és a lineáris egyenleteket is (-1)-gyel szorozzuk), a duális feladat végül is a következő:

$$\begin{aligned}
&\max\{2y_1+3y_2+4y_3+y_4\}\\
&\text{ha}\\
&y_1+y_4=1\\
&2y_1+y_2=1\\
&3y_2+y_3=1\\
&4y_3+y_4=1\\
&y_1,y_2,y_3,y_4\geq 0
\end{aligned}$$

2. Legyen adott egy tetszőleges (valós, nem feltétlen négyzetes) mátrix. A feladatunk az, hogy kiválasszuk a mátrix néhány elemét úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban legalább 1 kiválasztott elem legyen, de az összes kiválasztott elem összege a lehető legkisebb legyen. Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus ennek a feladatnak a megoldására!

Megoldás. Készítsünk egy G páros gráfot, melynek egyik pontosztályában lévő csúcsai az adott mátrix sorainak, másik pontosztályában lévő csúcsai a mátrix oszlopainak feleljenek meg. Minden sornak megfelelő csúcsot kössünk össze minden oszlopnak megfelelő csúccsal és az így keletkező e élhez rendeljünk egy $w(e)$ súlyt: a megfelelő sor és oszlop kereszteződésében álló mátrixelemet. A feladat mostmár az, hogy G-ben olyan élhalmazt találjunk, amely minden csúcsot lefed és a benne szereplő élek összsúlya minimális.

Megmutatjuk, hogy ez a feladat megfogalmazható lineáris programozási feladatként. Mivel ismert, hogy ezek megoldására van polinom idejű algoritmus, ezzel a feladatot megoldjuk.

Első közelítésben egészértékű programozási problémaként fogalmazzuk meg a feladatot. Minden e élhez rendeljünk egy $x(e)$ változót, amelyre írjuk fel az $0\leq x(e)\leq 1$ egyenlőtlenségeket és deklaráljuk $x(e)$-t egészértékűnek. Ezzel nyilván azt garantáljuk, hogy minden

$x(e)$ 0, vagy 1 értékű. Célunk, hogy az 1 értékű változóknak megfelelő élek lefogó élhalmazt alkossanak. Ehhez elég minden v csúcsra felírni egy egyenlőtlenséget: ha v-re az $e_1, \dots, e_d$ élek illeszkednek, akkor $\sum_{i=1}^{d} x(e_i) \geq 1$ éppen azt fejezi ki, hogy v-re illeszkedik legalább 1 kiválasztott él. Ezért a kapott egyenlőtlenségrendszer egész megoldásain a $\sum w(e)x(e)$ lineáris függvényt minimalizálva (vagy annak ellentettjét maximalizálva) valóban megkaptuk a kitűzött feladat egészértékű programozási megfogalmazását.

Vegyük észre, hogy a fenti feladathoz tartozó együtthatómátrix

$$\begin{pmatrix} -B \\ E \\ -E \end{pmatrix},$$

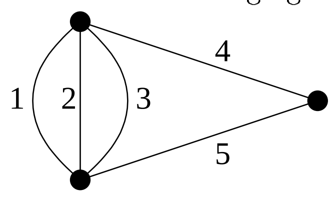
ahol B a G páros gráf illeszkedési mátrixa. Mivel B totálisan unimoduláris (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.14. tétel), a tanult triviális lemma szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.13. lemma) a fenti együtthatómátrix szintén az. Mivel az egyenlőtlenségek jobb oldalain is egészek állnak (mindenhol ± 1 vagy 0), ezért a fenti IP feladat helyett megoldhatjuk a megfelelő LP feladatot is, a tanult tétel szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.12. tétel) a két optimum azonos. Így a feladatot valóban sikerült LP feladatként megfogalmazni.

3. Hányféle nemizomorf matroidot reprezentálhat a valós test felett az alábbi mátrix x különböző választásai mellett? Ahol a matroid grafikus, ott gráffal is adjuk meg!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}$$

Megoldás. A 3 elemű alaphalmaz 2 elemű részhalmazai mind függetlenek, hiszen semelyik két oszlopvektor nem lehet párhuzamos (x értékétől függetlenül). A mátrix determinánsa (például az első oszlop szerinti kifejtésből) $x - 6$. Ezért az $x \neq 6$ esetben az összes oszlop független, vagyis ekkor a mátrix az $U_{3,3}$ (szabad) matroidot reprezentálja. Ez a matroid grafikus, például egy 3 élű út körmatroidja. Az $x = 6$ esetben viszont csak a legföljebb 2 elemű halmazok függetlenek, ezért ekkor a mátrix az $U_{3,2}$ matroidot reprezentálja. Ez is grafikus, egy három élű kör körmatroidja.

4. Az ábrán látható gráf körmatroidja legyen M. Határozzuk meg az $M \vee M$ és az $M \vee U_{5,2}$ matroid-összegeket! Ahol az összeg grafikus, ott gráffal is adjuk meg!



Megoldás. Az $M \vee M$ matroidban pontosan azok a halmazok függetlenek, amelyek az $\{1, 2, 3\}$ elemek közül legföljebb kettőt tartalmaznak. Ugyanis minden M-beli független legföljebb egyet tartalmazhat az $\{1, 2, 3\}$ elemek közül, ezért két ilyen halmaz uniója (vagyis egy $(M \vee M)$-beli független) valóban legföljebb kettőt. Másrészt, ha például egy részhalmaz nem tartalmazza az 1-es elemet, akkor független, mert részhalmaza a $\{2, 3, 4, 5\}$-nek; utóbbi pedig független, mert a $\{2, 4\}$ és a $\{3, 5\}$ körmentes részhalmazok uniója. Hasonló okokból független minden olyan halmaz, ami a 2-es, vagy a 3-as elemet nem tartalmazza.

$M \vee M$ mostmár könnyen láthatóan grafikus: a G gráfban $\{1, 2, 3\}$ alkossanak háromszöget, a 4-es és 5-ös éleknek pedig legföljebb egy közös csúcsa legyen a háromszöggel; ekkor G körmatroidja éppen $M \vee M$.

Az $M \vee U_{5,2}$ matroidban a legföljebb 4 elemű részhalmazok függetlenek, vagyis $M \vee U_{5,2}$ izomorf $U_{5,4}$-gyel. Ugyanis M-ben minden független legföljebb 2 elemű (az adott gráfban nincs 3 élű körmentes részhalmaz), ezért egy M-beli független és egy legföljebb 2 elemű halmaz uniója (vagyis egy $(M \vee U_{5,2})$-beli független) valóban legföljebb 4 elemű. Másrészt ha egy 4 elemű részhalmazból például az 1-es elem hiányzik, akkor előáll például $\{2,4\} \cup \{3,5\}$ alakban, vagyis egy M-beli és egy $U_{5,2}$-beli uniójaként, és így valóban független $(M \vee U_{5,2})$-ben. Hasonló a helyzet, ha a 2-es, vagy 3-as elem hiányzik. Ha pedig a 4-es elem hiányzik, akkor a részhalmaz előáll $\{3,5\} \cup \{1,2\}$ alakban, vagyis $(M \vee U_{5,2})$-beli; hasonló a helyzet, ha az 5-ös elem hiányzik.

$M \vee U_{5,2}$ ezek szerint ismét grafikus, hiszen $U_{5,4}$ az 5 élű kör körmatroidja.

5. Tekintsük az {`a,á,b,d,g,i,n,o,r,s,v`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

```
ida (1),   vid (2),   andi (2), sára (3),  andrás (3), bori (4),
andor (4), sándor (4), iván (4), virág (5), gábor (7).
```

Hajtsuk végre és dokumentáljuk ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

Megoldás. Egyesével választjuk a halmazokat, mindig olyan H halmazt választva, melyre H költségének és az általa lefedett, addig még fedetlen elemek számának hányadosa minimális.

Elsőként az `ida` halmazt kell választanunk, mert ebben a legkisebb az egy elemre eső költség $(\frac{1}{3})$. A következő halmaz az `andrás` kell legyen, ez a hátralévő 8 betűből 4-et fed le, 3 költséggel, ez $\frac{3}{4}$ költséget jelent betűnként, ami a legkisebb a hátralévő szavak közül. A következő két lépésben a `bori` és `vid` halmazokat kell választanunk tetszőleges sorrendben, ugyanis ezekre lesz minimális (nevezetesen 2) az egy elemre jutó költség. Végül a hátramaradó `g` betűhöz a legolcsóbb, `g`-t tartalmazó még ki nem választott szót kell vegyük, ez pedig az 5 költségű `virág`. A kapott fedés tehát: {`ida, andrás, bori, vid, virág`}, költsége 15.

6. Adjunk polinomiális algoritmust az $1|r_i|C_{max}$ ütemezési feladatra.

Megoldás. Tekintsük az elsőként rendelkezésre álló munkát. Ezt (is) el kell végezni előbb-utóbb, így ha nem kezdünk el rajta azonnal dolgozni, azzal nem nyerünk semmit (sőt), kezdjük tehát el. A másodikként rendelkezésre álló munkával is hasonló a helyzet, azzal a különbséggel, hogy ha az elsőn még dolgozik a gépünk, akkor csak annak befejezése után kezdhetünk hozzá. Általában a k. munkát akkor fogjuk elkezdeni, amikor már rendelkezésre áll és minden korábban beérkezett munkával végeztünk. Ily módon

$$\max\{r_k + \sum_{i=k}^{n} p_i \;\mid\; 1 \le k \le n\}$$

idő alatt végzünk, ahol $r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n$ a rendelkezésre állási idők. Könnyen látható, hogy ez optimális, hiszen azon értékek, melyekre a maximumot tekintjük, mind alsó becslések C_{max}-ra. Az algoritmus polinomialitása pedig triviális.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2005. december 20.

1. Döntsük el, hogy az $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$ választással

a) bázismegoldását

b) erős bázismegoldását

adtuk-e meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszernek:

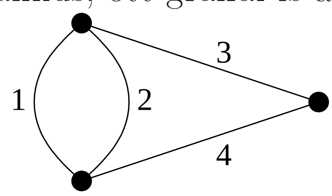
$$\begin{aligned} x - y + z &\le 6 \\ 2x + y - 2z &\le -6 \\ 3x - z &\le 1 \end{aligned}$$

2. Egy G irányított gráfban irányított körök egy $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ halmazát nevezzük *irányított körpakolásnak*, ha a C_i körök páronként éldiszjunktak. Adott G irányított gráf és $w : E(G) \mapsto \mathbb{R}^+$ nemnegatív élsúlyozás esetén feladatunk egy maximális összsúlyú irányított körpakolás megtalálása. (Egy körpakolás súlya a benne szereplő körök élei súlyának összege.) Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus ennek a feladatnak a megoldására!

3. Hányféle nemizomorf matroidot reprezentálhat a valós test felett az alábbi mátrix x különböző választásai mellett? Ahol a matroid grafikus, ott gráffal is adjuk meg!

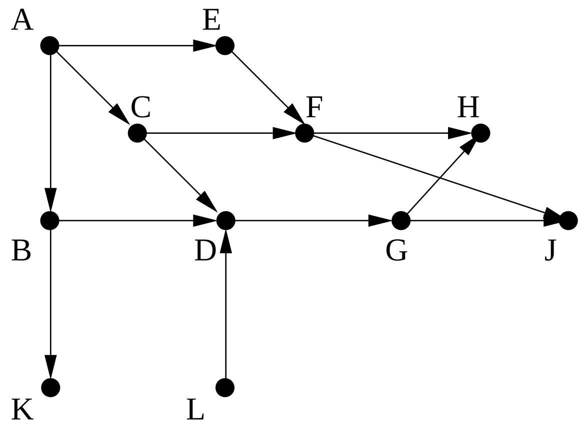
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Az ábrán látható gráf körmatroidja legyen M. Határozzuk meg az $M \vee M$ és az $M \vee U_{4,2}$ matroid-összegeket! Ahol az összeg grafikus, ott gráffal is adjuk meg!



5. Mutassuk meg, hogy a Graham-féle listás ütemezési algoritmus approximációs faktora két gép esetén nem lehet jobb, mint 3/2. (Azaz mutassunk példát olyan ütemezési feladatra, amelyre az algoritmus által adott eredmény az optimumnak legalább 3/2-szerese.)

6. Adjuk meg az alábbi precedenciagráffal megadott $P2|prec, p_j = 1|C_{max}$ feladat egy optimális megoldását **a Coffman-Graham algoritmus segítségével**.



A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok és megoldások
2006. december 9.

1. Döntsük el, hogy az $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ választással
a) bázismegoldását
b) erős bázismegoldását
adtuk-e meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_3 &\le 2 \\ x_2 + x_4 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\le 4 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \le b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy A utolsó sora az előző kettő összege, az első három sor viszont lineárisan független, így $r(A) = 3$. A megadott $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ megoldás az A második, harmadik és negyedik sorának megfelelő egyenlőtlenségeket teljesíti egyenlőséggel, az elsőt nem. Ezért az egyenlőséggel teljesített sorok alkotta mátrix rangja csak 2 (mert az utolsó sor az előző kettő összege), így a megadott megoldás nem bázismegoldás (és így persze nem is erős bázismegoldás).

2. Egy G irányított gráfban irányított körök egy $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ halmazát nevezzük *irányított körfedésnek*, ha a C_i körök páronként csúcsdiszjunktak és a gráf minden csúcsa rajta van valamelyik körön. Legyen adott egy G irányított gráf, amelyről tudjuk, hogy van benne irányított körfedés. Legyen adott továbbá egy $w : E(G) \to \mathbb{R}$ élsúlyozás. A feladatunk egy maximális összsúlyú irányított körfedés megtalálása. (Egy körfedés súlya a benne szereplő körök élei súlyának összege.) Bizonyítsuk be, hogy létezik polinomiális idejű algoritmus ennek a feladatnak a megoldására!

Első megoldás. Megmutatjuk, hogy ez a feladat megfogalmazható lineáris programozási feladatként. Mivel ismert, hogy ezek megoldására van polinom idejű algoritmus, ezzel a feladatot megoldjuk.

Első közelítésben egészértékű programozási problémaként fogalmazzuk meg a feladatot. Minden e élhez rendeljünk egy $x(e)$ változót, amelyre írjuk fel az $0 \le x(e) \le 1$ egyenlőtlenségeket és deklaráljuk $x(e)$-t egészértékűnek. Ezzel nyilván azt garantáljuk, hogy minden $x(e)$ 0, vagy 1 értékű. Célunk, hogy az 1 értékű változóknak megfelelő élek irányított körfedést alkossanak.

Az irányított körfedés más megfogalmazásban az élek egy olyan E_0 részhalmaza, amelyre teljesül, hogy minden csúcsba pontosan egy E_0-beli él lép be és minden csúcsból egy E_0-beli él lép ki. Ezért elég minden v csúcsra felírni két egyenletet: ha v-be az $e_1, \ldots, e_r$ élek lépnek be és v-ből az $f_1, \ldots, f_d$ élek lépnek ki, akkor az $\sum_{i=1}^{r} x(e_i) = 1$ és $\sum_{i=1}^{d} x(f_i) = 1$ egyenletek éppen azt fejezik ki, hogy v-be egy kiválasztott él lép be és v-ből egy kiválasztott él lép ki. (Avagy, a hálózati folyamok kapcsán a Rendszeroptimalizálás könyv 36. oldalán bevezetett jelöléseket alkalmazva: $\varrho_x(v) = 1$ és $\delta_x(v) = 1$.) Így a kapott egyenlőtlenségrendszer egész megoldásain a $\sum w(e)x(e)$ lineáris függvényt maximalizálva valóban megkaptuk a kitűzött feladat egészértékű programozási megfogalmazását.

Célunk azt megmutatni, hogy a fenti rendszert leíró mátrix totálisan unimoduláris, mert ebből (tekintve, hogy az egyenlőtlenségek jobb oldalán álló számok egészek – mindenhol ± 1 vagy 0) valóban következik (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.12. tétel), hogy a fenti IP feladat helyett megoldhatjuk a megfelelő LP feladatot is, a két optimum azonos.

Ehhez a rendszert leíró mátrixból elég csak a $\sum_{i=1}^{r} x(e_i) \le 1$ és $\sum_{i=1}^{d} x(f_i) \le 1$ (azaz: $\varrho_x(v) \le 1$ és $\delta_x(v) \le 1$) soroknak megfelelő részt – jelöljük ezt M-mel — vizsgálni, mert ebből a teljes rendszert leíró mátrixot úgy kapjuk, hogy először M sorainak ellentettjét vesszük hozzá M-hez (hogy a fenti egyenlőtlenségekből egyenletet csináljunk), majd az egységmátrixot és annak ellentettjét vesszük még hozzá (a $0 \le x(e) \le 1$ feltételek miatt). Ezek a kiegészítések azonban a tanult triviális lemma szerint (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.13. lemma) megőrzik a mátrix totális unimodularitását.

M sorai kétfelé választhatók: az $\sum_{i=1}^{r} x(e_i) \le 1$ (azaz $\varrho_x(v) \le 1$), illetve az $\sum_{i=1}^{d} x(f_i) \le 1$ (azaz $\delta_x(v) \le 1$) egyenlőtlenségeknek megfelelő sorokra; jelöljük az első részt M_1-gyel, a másodikat M_2-vel. Mivel minden irányított él egyetlen csúcsból lép ki és egy csúcsba lép be, ezért M minden oszlopában pontosan két darab 1-es van, az egyik M_1-ben, a másik M_2-ben; minden más elem 0. Ezért M egy páros gráf illeszkedési mátrixa: a páros gráf mindkét osztálya az irányított gráf csúcshalmazának felel meg, és minden irányított élből a páros gráf egy éle keletkezik. Ezért M valóban totálisan unimoduláris (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.14. tétel), amivel a feladatot megoldottuk.

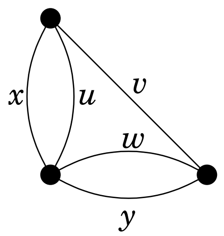
Második megoldás (vázlat). Készítsünk G-ből egy páros gráfot: vegyük fel a $V(G)$ csúcshalmazt két példányban – jelöljük ezeket V_1-gyel és V_2-vel – és G minden $u \to v$ irányított éle esetén a készülő páros gráfban u-nak a V_1-beli megfelelőjét kössük össze v-nek a V_2-beli megfelelőjével. (Ugyanez a páros gráf került elő az első megoldás végén is.) Az így kapott élhez rendeljük hozzá az $u \to v$ él G-beli súlyát. Nem nehéz végiggondolni, hogy a G-beli irányított körfedések a kapott páros gráf teljes párosításainak felelnek meg. Ezért a feladatunk maximális összsúlyú teljes párosítás keresése páros gráfban, ami megtehető az Egerváry-algoritmussal.

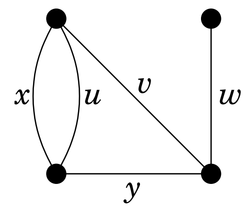
3. Lehet-e olyan értéket adni az a paraméternek, hogy az alábbi mátrix oszlopai által a valós test felett koordinátázott M_1 matroid grafikus legyen?

$$\begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Látható, hogy a mátrix u oszlopa (-2)-szerese az x oszlopnak, így a készülő grafikus reprezentációban ezeknek párhuzamos élek felelnek meg. Az x, y és v oszlopok között nincs olyan pár, amelyek párhuzamosak volnának, de jól látható, hogy $x + y = v$; ezért ennek a három oszlopnak egy három élű kör felel meg. Az első négy oszlopnak megfelelő rész tehát egy olyan háromszöggel reprezentálható, amelynek az egyik élét megdupláztuk. Így a kérdés az, hogy a értéke megválasztható-e úgy, hogy a w-nek megfelelő él hozzávehető legyen ehhez a gráfhoz.

A válasz igen. Legegyszerűbb talán az $a = 0$ választás. Ilyenkor ugyanis a w oszlop (-2)-szerese az y oszlopnak, így a gráfban a megfelelő élek párhuzamosak; ezt mutatja az alábbi, bal oldali ábra. Némi számolással az is végiggondolható, hogy $a \neq 0$ esetén x, y, v, w közül az x, y, v hármast leszámítva bármely három oszlop lineárisan független. Ezért a matroid ilyenkor is grafikus, a megfelelő gráfot az alábbi, jobb oldali ábra mutatja. Vagyis a matroid valójában az a paraméter minden értékére grafikus (amit persze a feladat teljes értékű megoldásához nem szükséges végiggondolni).





4. Az M_2 matroidot az alábbi mátrix koordinátázza (a valós test fölött). Mutassuk meg, hogy az $M_1 \vee M_2$ matroid (ahol M_1 az előző feladatbeli M_1-gyel azonos) az a paraméter bármely értéke esetén grafikus!

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Megoldás. Az M_2 matroid jól láthatóan az $U_{5,2}$ uniform matroid (azzal izomorf), hiszen a mátrix bármely két oszlopa lineárisan független, de bármely három – tekintve, hogy síkbeli vektorokról van szó – lineárisan összefüggő. Ezért az $M_1 \vee M_2$ matroid függetlenjei úgy kaphatók, hogy az M_1 matroid függetlenjeit kiegészítjük két tetszőleges elemmel.

Az előző feladat megoldásából kiderül, hogy az M_1 rangja (bázisának mérete) a értékétől függően 2 vagy 3. (Ehhez nincs szükség a fenti megoldásban az $a \neq 0$ eset részletes végiggondolására.)

Ha az M_1 rangja 3, akkor egy bázisát a hiányzó két elemmel kiegészítve az $\{x, y, u, v, w\}$ halmazt kapjuk; ez tehát független $M_1 \vee M_2$-ben (és persze minden részhalmaza is), így ilyenkor $M_1 \vee M_2$ az $U_{5,5}$ szabad matroid. Ez valóban grafikus, bármely 5 élű, körmentes gráf reprezentálja.

Ha az M_1 rangja csak 2, akkor $M_1 \vee M_2$-ben a független halmazok legföljebb 4 eleműek. Könnyű azonban végiggondolni, hogy minden 4 elemű halmaz független: M_1-ben ugyanis a kételeműek közül csak az $\{x, u\}$ és esetleg az $\{y, w\}$ összefüggő. Nyilván tetszőleges 4 elemű részhalmazt felbonthatunk 2 darab 2 eleműre úgy, hogy ezt a két párt „szétválasszuk”, amivel a részhalmazt egy M_1 és egy M_2-beli független uniójára bontottuk. Ezért ilyenkor $M_1 \vee M_2$ az $U_{5,4}$ uniform matroid, ami szintén grafikus: egy 5 élű kör reprezentálja.

(Mindezt az előző feladat megoldásában írtakkal összevetve az is kiderül, hogy az $M_1 \vee M_2$ összeg $a \neq 0$-ra az $U_{5,5}$-tel, $a = 0$-ra az $U_{5,4}$-gyel izomorf; ennek végiggondolására sincs szükség a feladat teljes értékű megoldásához.)

5. Igaz-e, hogy mindig létezik a munkáknak olyan sorbarendezése, amely sorrendben a Graham-féle listás ütemező algoritmust végrehajtva optimális megoldást kapunk a $P||C_{\max}$ feladatra?

Megoldás. Az állítás igaz. Tekintsünk egy olyan S optimális ütemezést, melyben egyetlen gép sem áll, amíg van el nem kezdett munka. Megmutatjuk, hogy ilyen létezik. Induljunk ki egy tetszőleges optimális ütemezésből. Egy gépen a két munka közti esetleges állásidőket megszüntetve a teljes átfutási idő nem nőhet. Ha egy gép utolsó munkája után még lenne elkezdhető feladat, vegyük a legkorábbi ilyen utolsó munkát, az ennek befejezésekor elkezdhető feladatot valamely más gép később kezdené el; ekkor a másik gép összes hátralevő munkáját erre a gépre átcsoportosítva a teljes átfutási idő nem nőne. E műveletet szükség esetén többször is elvégezve felesleges állásidő nélküli ütemezést kapunk, melynek átfutási ideje nem nagyobb az eredetinél, így maga is optimális. Az eljárás biztosan végetér, hiszen a felesleges állásidők kezdetének minimuma szigorúan monoton nő egy lépés során.

Vegyük most a munkáknak egy olyan sorrendjét, melyet az S szerinti kezdési idők határoznak meg. Nyilvánvaló, hogy a listás ütemezés ebben a sorrendben optimális lesz, hiszen sem S-ben, sem a kapott listás ütemezésben nem áll egyetlen gép sem, amíg van el nem kezdett munka, így a két ütemezés munkáinak kezdési és befejezési idejei is azonosak lesznek.

6. Mutassuk meg, hogy a ládapakolás feladatra adott First Fit algoritmus approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{5}{3}$.

Megoldás. Legyenek a ládák 100 egység térfogatúak és tekintsük a

$$15, 15, 15, 15, 15, 15, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 51, 51, 51, 51, 51, 51$$

bemenetet. A First Fit ezt láthatóan 1+3+6=10 ládában helyezi el, míg az optimum 6 láda lenne.

Rendszeroptimalizálás
Pótárthelyi feladatok
2006. december 19.

1. A Fourier-Motzkin elimináció segítségével döntsük el, hogy van-e megoldása az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek. Ha van megoldás, adjunk is meg egyet.

$$\begin{aligned} &x + y + z \geq 8 \\ &2x - y + 2z \leq 8 \\ &x + 2y + 3z \leq 10 \\ &x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

2. Tegyük fel hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások!

a) Ha az $Ax \leq b$ rendszernek van olyan bázismegoldása, ami nem erős bázismegoldás, akkor az A mátrix oszlopai lineárisan összefüggők.

b) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, akkor az $Ax \leq b$ rendszernek van olyan bázismegoldása, ami nem erős bázismegoldás.

3. Az a paraméter mely értékei mellett lesz az alábbi mátrix oszlopai által a valós test felett koordinátázott matroid grafikus?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & a \end{pmatrix}$$

4. Grafikus lesz-e az alábbi két gráf körmatroidjának az összege?

5. Létezik-e a ládapakolás feladatnak olyan bemenete, melyre az optimális megoldás 2 láda, a First Fit Decreasing algoritmus (melyben a tárgyakat csökkenő súly szerinti sorrendben helyezzük el a First Fit algoritmus segítségével) viszont 3 ládába pakol?

6. Tekintsük a $P3||C_{\max}$ feladatot. Mutassuk meg, hogy Graham listás ütemező algoritmusának approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{7}{8}$.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

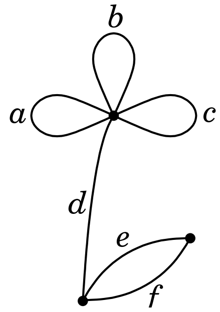
Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2007. november 28.

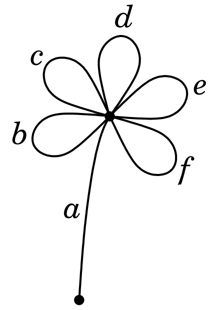
1. A Fourier-Motzkin elimináció segítségével döntsük el, hogy a p paraméter milyen értékeire van megoldása az alábbi lineáris egyenlőtlenségrendszernek.

$$\begin{aligned}
&x - 2y - z \le p \\
&2x - 3y - 2z + 28 \ge 0 \\
&x + 2y + z \le 21 \\
&x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0
\end{aligned}$$

2. Az A mátrixra teljesül, hogy minden, az A soraiból készített lineáris kombinációként előálló sorvektor tartalmaz 0-nál nem nagyobb elemet. Bizonyítsuk be, hogy az A oszlopaiból a nullvektor kifejezhető nemtriviális módon (vagyis nem csupa nulla együtthatót használva) nemnegatív együtthatós lineáris kombinációval.

3. Grafikus-e az alábbi két gráf által meghatározott matroid összege?





4. Válasszuk meg a p és q paramétereket úgy, hogy az alábbi mátrix által meghatározott matroid

a) grafikus legyen;

b) ne legyen grafikus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & p & 2 & 0 \\ 5 & q & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Tekintsük az {`a,b,c,d,e,h,i,k,l,m,n,o,p,r,s,t`} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

`cod (3), perch (3), carp (4), pike (4), dab (5),`
`tench (5), salmon (5), hake (5), bream (6), sprat (6).`

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

6. Igaz-e, hogy ha a precedenciagráf minden pontjának kifoka legfeljebb 1, akkor a $P|prec, p_i = 1|C_{\max}$ ütemezési feladat polinom időben megoldható?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} p \\ 28 \\ 21 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az eliminációt (a Rendszeroptimalizálás könyv 17. oldalán írtak szerint végezve) végezve a következőket kapjuk:

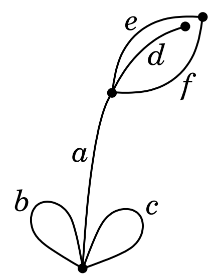
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 21 \\ 1 & -2 & -1 & p \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 & 14 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & \frac{7}{2} & 2 & 35 \\ 0 & 2 & 1 & 21 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & p+14 \\ 0 & -2 & -1 & p \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & \frac{4}{7} & 10 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ -1 & 0 & 2p+28 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{p}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r} 0 & \frac{4}{7} & 2p+38 \\ 0 & \frac{1}{14} & \frac{p+20}{2} \\ 0 & \frac{4}{7} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{4p+77}{2} \\ 0 & 0 & \frac{p+21}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{r|r} 1 & \frac{7}{2}(p+19) \\ 1 & 7(p+20) \\ 1 & \frac{35}{2} \\ 1 & 4p+77 \\ 1 & 21 \\ -1 & 0 \\ 0 & p+21 \end{array}\right)$$

A kapott alak utolsó sora miatt a rendszernek csak $p + 21 \geq 0$ esetén lehet megoldása, ebben az esetben viszont ez a sor elhagyható. Az utolsó előtti sor ekkor azt jelenti, hogy $z \geq 0$. Az első 5 sor viszont z-re vonatkozó felső korlátokat jelent, így a rendszer megoldhatósága azon múlik, hogy ezek a felső korlátok mind nemnegatívak legyenek. Ez a harmadik és ötödik sorra fennáll, a többi sorból pedig a $p \geq -19$, $p \geq -20$, illetve a $p \geq -19.25$ korlátokat kapjuk. Ezek összevetéséből a rendszer akkor és csak akkor megoldható, ha $p \geq -19$.

A 2. feladat megoldása. Azt kell bizonyítani, hogy létezik olyan x oszlopvektor, amelyre $Ax = 0$, $x \geq 0$, $x \neq 0$. Erre az alakra a Farkas-lemma közvetlenül nem alkalmazható az $x \neq 0$ feltétel miatt. Ezen azonban könnyen segíthetünk, ha észrevesszük, hogy a vizsgált rendszer bármely x megoldása esetén $\lambda \cdot x$ is megoldás lesz minden $\lambda > 0$-ra. Ezért az x komponenseinek összegét alkalmas λ választásával tetszőleges pozitív értékre beállíthatjuk. Így a bizonyítandó állítás ekvivalens módon úgy is megfogalmazható, hogy az $Ax = 0$, $\mathbf{1} \cdot x = 1$, $x \geq 0$ rendszer megoldható (ahol $\mathbf{1}$ a csupa 1 sorvektort jelöli). Erre az alakra pedig már alkalmazható a Farkas lemma (Rendszeroptimalizálás könyvbeli, 1.4 Tételnek megfelelő alakja). Azt kapjuk, hogy ha az $\begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x \geq 0$ rendszer indirekt nem volna megoldható, akkor létezik olyan $(y|\mu)$ sorvektor, amelyre $(y|\mu) \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \geq 0$ és $(y|\mu) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} < 0$. (Itt a Farkas-lemma által garantált sorvektor utolsó, $\mathbf{1} \cdot x = 1$ sornak megfelelő komponensét különválasztottuk és μ-vel jelöltük). Átrendezve ez azt jelenti, hogy $yA + (\mu, \mu, \ldots, \mu) \geq 0$, $\mu < 0$. Vagyis az yA sorvektor nagyobb-egyenlő a csupa pozitív elemeket tartalmazó $(-\mu, -\mu, \ldots, -\mu)$ sorvektornál. Ez ellentmond a feladat feltételének (hiszen yA az A soraiból készített lineáris kombináció).

A 3. feladat megoldása. Jelöljük a bal oldali gráf által meghatározott matroidot M_1-gyel, a jobb oldali által meghatározottat M_2-vel. M_2-ben az üres halmazon kívül csak $\{a\}$ független (hiszen a többi elem hurok). Ezért a két matroid összegének függetlenjeit úgy kapjuk, hogy M_1 függetlenjeit kiegészít(het)jük a-val. M_1 bázisai (maximális körmentes élhalmazai) jól láthatóan a $\{d, e\}$ és $\{d, f\}$ halmazok. Így $M_1 \vee M_2$ bázisai az $\{a, d, e\}$, $\{a, d, f\}$ halmazok lesznek (és így ezek részhalmazai lesznek $M_1 \vee M_2$ függetlenjei). Könnyen látható, hogy ez a matroid is grafikus, az alábbi gráf reprezentálja.



A 4. feladat megoldása. Jelölje a mátrix 4 oszlopát sorban a, b, c és d. A mátrix által reprezentált M matroidban a, c és d háromszöget (három elemű kört) határoznak meg, hiszen közülük semelyik kettő nem párhuzamos, de a három oszlop együtt lineárisan összefüggő ($c = a + 2d$). A b oszlop akkor lesz párhuzamos a-val, c-vel, illetve d-vel, ha $p = q = 0$, $p = \frac{4}{3}, q = \frac{10}{3}$, illetve $p = 4, q = 10$. Ezekben az esetekben M grafikus, hiszen reprezentálja az a gráf, amelyet egy háromszög egyik élének megduplázásával kapunk. Egyéb esetekben azt kell ellenőriznünk, hogy az $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{b, c, d\}$ halmazok függetlenek-e; ezt legegyszerűbb a 3 darab 3×3-as determináns kiszámításával megtenni. Mindhárom esetben azt kapjuk, hogy a halmaz akkor és csak akkor független (azaz a determináns akkor és csak akkor nem nulla), ha $5p \neq 2q$. Ez azt jelenti, hogy $5p \neq 2q$ esetén M ismét grafikus: ha az a, c és d élek által meghatározott háromszögről „lelógatjuk" a b élet, a kapott gráf reprezentálja M-et. A fennmaradó esetekben viszont (amikor tehát $5p = 2q$, de $p \neq 0, \frac{4}{3}, 4$) azt kapjuk, hogy M-ben minden 3 elemű halmaz összefüggő, de minden 2 elemű még független. Vagyis ilyenkor $M \cong U_{4,2}$, vagyis M nem grafikus. (Mindezt persze egy teljes értékű megoldáshoz nem kell végiggondolni, elég egy-egy olyan esetet mutatni, amikor M grafikus, illetve amikor nem.)

Az 5. feladat megoldása. Az algoritmus mindig azt a részhalmazt választja ki amelyre a lehető legkisebb a halmaz költségének és az újonnan lefedett elemek számának hányadosa.

Az első lépésben a `perch` részhalmazt kell választanunk, mert ennek a legkisebb az egy elemre eső aktuális költsége ($\frac{3}{5}$). Ezt követően a `salmon` részhalmaz jön, $\frac{5}{6}$ aktuális költséggel. A következő halmaz a `pike` kell legyen, ez újabb 2 elemet fed le, 4 költséggel, majd a `dab` halmaz jön, ennek költsége $\frac{5}{2}$. Végül a hátramaradt `t` betűt kell lefednünk, ezt a legolcsóbban a `tench` szóval tehetjük meg. A kapott fedés tehát: $\{\texttt{perch}, \texttt{salmon}, \texttt{pike}, \texttt{dab}, \texttt{tench}\}$, költsége 22.

A 6. feladat megoldása. Megmutatjuk, hogy a feladatbeli gráfok komponensei be-fenyők. Először azt látjuk be, hogy a gráf irányítatlan értelemben erdő. Irányított kört természetesen nem tartalmazhat, ha pedig irányítatlan kört tartalmazna, akkor annak lenne olyan csúcsa, amelynek kifoka a körben kettő, ami ellentmond a feltételnek (ha a kör k csúcsból áll, akkor a benne szereplő élek kifokainak összege a körben k, ha ezek közt nincs egynél nagyobb, akkor mindegyiknek épp egynek kell lennie, ekkor viszont irányított körről lenne szó).

Tekintsük a gráf egy tetszőleges komponensét. Mivel ez aciklikus, kell hogy legyen benne nyelő, legyen ez s. Megmutatjuk, hogy bármely x pontból az s-be vezető irányítatlan értelemben vett utak minden éle s felé van irányítva, igazolva ezzel, hogy a komponens valóban be-fenyő. Az s-sel szomszédos élek s felé vannak irányítva, hiszen s nyelő. Ezen éleket elhagyva s szomszédai válnak nyelővé, ellenkező esetben a kifokuk legalább kettő lenne. Az így kapott gráfban tehát minden él, ami s szomszédai közül valamelyikhez csatlakozik, a szomszédok felé mutat. Az eljárást x eléréséig folytatva (ez be fog következni, hiszen s és x között létezik út) x-ből s-be vezető irányított utat kapunk.

Beláttuk tehát, hogy a komponensek be-fenyők. Most minden komponens nyelőjéből egy közös új pontba élet húzva be-fenyőt kapunk, amire Hu algoritmusát alkalmazva polinom időben optimális ütemezést kapunk. Ebből az újonnan hozzávett pontot törölve nyilván optimális ütemezést kapunk az eredeti feladatra.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2007. december 13.

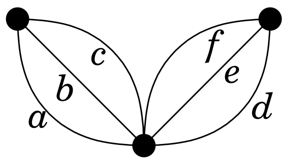
1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása.)

b) Határozzuk meg a (primál) feladat maximumát.

$$\max\{10x_1 + 14x_2 + 18x_3\}$$
ha
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 3$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 4$$

2. Az A mátrixra teljesül, hogy a nullvektor az egyetlen olyan, az A soraiból készített lineáris kombinációként előálló sorvektor, amely nem tartalmaz 0-nál kisebb elemet. Bizonyítsuk be, hogy az A oszlopaiból a nullvektor kifejezhető pozitív együtthatós lineáris kombinációval.

3. Jelölje M az alábbi gráf által meghatározott matroidot. Grafikus lesz-e az $M \vee M$ összegmatroid?



4. Lerögzíthetjük-e a p paraméter értékét úgy, hogy utána a q paraméter *tetszőleges* értéke mellett az alábbi mátrix által meghatározott matroid sose legyen grafikus?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & p & 2 & 0 \\ 5 & q & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Tekintsük a RÉSZLETÖSSZEG probléma következő esetét. Legyenek az S halmaz elemei 3, 5, 7, 12, 13, és legyen a részletösszegként megcélzott t érték 26. Hajtsuk végre és dokumentáljuk az előadáson tanult $(1+\varepsilon)$-közelítő algoritmust az $\varepsilon = 2$ értékre.

6. Mutassuk meg, hogy a ládapakolás feladatra adott First Fit eljárás 2-approximációs algoritmus.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 100 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2008. december 5.

1. A p paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ választással
a) bázismegoldását
b) erős bázismegoldását
adtuk meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek?

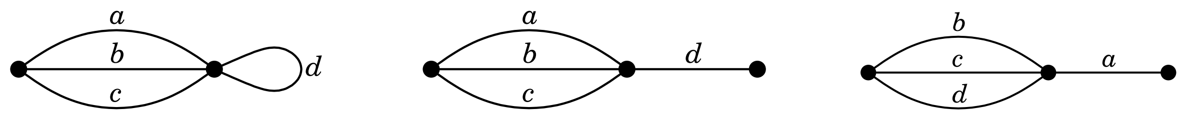
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\le 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &\le 1 \\ x_1 + x_4 &\le 2 \\ x_3 + 2x_4 &\le p \end{aligned}$$

2. Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, aminek az első oszlopa legyen b. Legyen továbbá c az az n hosszú sorvektor, amelynek minden komponense 1. Tegyük fel, hogy a cx célfüggvény felülről korlátos az $Ax \le b$ egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazán. Adjuk meg a $\max\{cx : Ax \le b\}$ maximum értékét!

3. Lehet-e a p paramétert úgy megválasztani, hogy az alábbi mátrixszal (a valós test fölött) koordinátázott matroid grafikus legyen?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & p \end{pmatrix}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi három gráf körmatroidja közül bármelyik kettő összege grafikus!



5. Hajtsuk végre a Steiner-fa probléma alábbi bemenetére a tanult approximációs algoritmust és döntsük el, hogy optimális megoldást ad-e.
A G gráf pontjai a síkon egy szabályos nyolcszög csúcsaiban és a nyolcszög középpontjában helyezkednek el, bármely két csúcs össze van kötve és a köztük futó él költsége megegyezik a csúcsok síkon vett távolságával. A terminálok és a Steiner-pontok felváltva követik egymást a nyolcszögön, a középpont Steiner-pont (vagyis négy terminál lesz, a nyolcszög minden második csúcsa).

6. Mutassuk meg, hogy a Graham-féle listás ütemezés akkor sem ad feltétlenül optimális megoldást a $P||C_{\max}$ feladatra, ha a lista megmunkálási idők szerint monoton (de nem feltétlenül szigorúan monoton) csökkenő sorrendű.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. Az egyenlőtlenségrendszer mátrixos alakja $Ax \leq b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ p \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy A harmadik sora az első két sorának összege, viszont az első, második és negyedik sor lineárisan független. Így $r(A) = 3$. A megadott $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ megoldás az A első, második és harmadik sorát biztosan egyenlőséggel teljesíti. Ha a negyediket nem, akkor az egyenlőséggel teljesülő sorok rangja csak 2, hiszen az már kiderült, hogy az első három sor lineárisan összefüggő. Ezért pontosan akkor kapunk bázismegoldást, ha a negyedik sor is egyenlőséggel teljesül, vagyis ha $p = 3$.

Erős bázismegoldást viszont még ebben az esetben sem kapunk, hiszen a megadott megoldás nemnulla komponenseinek (vagyis mindnek) megfelelő oszlopok az A összes oszlopa. Ezek pedig nyilván lineárisan összefüggők (hiszen A négyzetes mátrix, így az oszlopok és a sorok lineáris összefüggősége egymással ekvivalens).

A 2. feladat megoldása. Alkalmazhatjuk a dualitástételt, hiszen az $Ax \leq b$ egyenlőtlenségrendszer nyilván megoldható (hiszen megoldása az az x, amelynek az első komponense 1, az összes többi 0) és a feladat szövege szerint cx felülről korlátos a megoldáshalmazon. Így a keresett maximum értéke $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ (és a duális feladat megoldható és a célfüggvénye alulról korlátos a megoldáshalmazán). Mivel A első oszlopa ébben b, ezért az $yA = c$ lineáris egyenletrendszer első egyenlete éppen $yb = 1$. Vagyis a duális feladat *minden* y megoldására az yb célfüggvény értéke 1, így a duális program minimuma is 1. Ezért $\max\{cx : Ax \leq b\} = 1$ is igaz.

A 3. feladat megoldása. A mátrix első 4 oszlopa az $U_{4,2}$ uniform matroidot koordinátázza, hiszen nincs köztük párhuzamos, de – síkbeli vektorokról lévén szó - közülük bármelyik három összefüggő. Mivel $U_{4,2}$ nem grafikus, ezért a megadott mátrix semmilyen p értékre nem koordinátázhat grafikus matroidot (hiszen egy elem elhagyásával a matroid grafikussága nem romolhatna el).

A 4. feladat megoldása. Jelölje a három matroidot sorban M_1, M_2 és M_3. Ekkor az $M_1 \vee M_2$ matroid függetlenjeit úgy kapjuk, hogy az M_2 függetlenjeihez (vagyis körmentes részhalmazaihoz) hozzávehetünk az a, b és c elemek közül egyet. Így a legföljebb két elemű halmazok mind függetlenek lesznek és a három eleműek közül is csak $\{a, b, c\}$ lesz összefüggő. Ezért $M_1 \vee M_2$ annak a gráfnak a körmatroidja, amelyben az a, b és c élek háromszöget alkotnak és d „lelóg” erről a háromszögről (vagy akár külön komponenst alkot).

Az $M_1 \vee M_3$ matroidnál az M_3 függetlenjeihez szabad az a, b és c elemek közül egyet hozzávenni. Így itt is független lesz minden legföljebb két elemű halmaz és a három eleműek is a $\{b, c, d\}$ kivételével. Ezért $M_1 \vee M_2$ annak a gráfnak a körmatroidja, amelyben a b, c és d élek alkotnak háromszöget és a „lóg le” a háromszögről.

Végül az $M_2 \vee M_3$ matroid esetében $\{c, d\}$ független M_2-ben és $\{a, b\}$ független M_3-ban, így az összegmatroidban az egész alaphalmaz is független lesz, vagyis $M_2 \vee M_3$ az $U_{4,4}$ szabad matroid. Ez nyilván grafikus: bármely 4 élű fa körmatroidja ez.

Az 5. feladat megoldása. Anélkül, hogy az az általánosság rovására menne, feltehetjük, hogy a középpont és a nyolcszög csúcsainak távolsága 1. Mivel a bemenet metrikus (hiszen a gráf teljes és a síkon vett távolságra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség), az algoritmus a terminálok által feszített részgráf egy minimális feszítőfáját adja. Ezt Kruskal-algoritmussal (vagy bármilyen más, tudottan polinomiális idejű minimális költségű feszítőfát kereső algoritmussal) kell meghatározni. A kérdéses gráfnak hat éle van, ebből négynek a költsége $\sqrt{2}$, a másik kettőé 2. A Kruskal-algoritmus az első négy élből talál meg tetszőleges hármat, az összköltség tehát $3\sqrt{2}$. Ez nem lesz optimális, mert a középpontot a négy terminállal összekötő élek alkotta Steiner-fa költsége $4 < 3\sqrt{2}$.

A 6. feladat megoldása. Legyen két gépünk, a megmunkálási idők pedig legyenek (mondjuk) 3,3,2,2,2. A nem növekvő sorrendű listás ütemezés először mindkét gépre 3 költségű, ennek végeztével mindkét gépre 2 költségű munkát tesz, végül az egyik gép elvégzi a hátralévő 2 költségű munkát, az összidő így 7 egység, holott ha a két 3-as munkát az egyik, a három 2-es munkát a másik gép végezné, akkor 6 időegység alatt végezhetnénk.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2008. december 16.

1. A p paraméter milyen értékeire teljesül, hogy az $x = 1$, $y = 1$, $z = p$ választással
a) bázismegoldását
b) erős bázismegoldását
adtuk meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek?

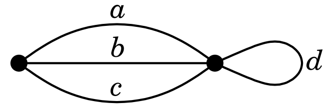
$$\begin{aligned} x + z &\le 1 \\ x + y &\le 2 \\ 2x + y + z &\le 3 \\ y - z &\le 1 \\ x + y + z &\le 3 \end{aligned}$$

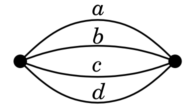
2. Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, c pedig egy n hosszú sorvektor. Tegyük fel, hogy az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható és a cx célfüggvény felülről korlátos a megoldáshalmazán. Tegyük fel továbbá, hogy ráadásul az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszer is megoldható és egy megoldása x_0. Bizonyítsuk be, hogy ekkor x_0 maximumhelye a $\max\{cx : Ax \le b\}$ lineáris programnak!

3. Az alábbi mátrix koordinátázza (a valós test fölött) az $M_{a,b}$ matroidot. Bizonyítsuk be, hogy a értéke megválasztható úgy, hogy azt lerögzítve b minden értékére $M_{a,b}$ grafikus lesz!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

4. Jelölje A és B az alábbi két gráf körmatroidját! Az $A \vee A$, $A \vee B$ és $B \vee B$ matroidok közül melyik (melyek) grafikus(-ak)?





5. Hajtsuk végre a Steiner-fa probléma alábbi bemenetére a tanult approximációs algoritmust és döntsük el, hogy optimális megoldást ad-e.

G a $K_{3,3}$ teljes páros gráf, az egyik osztályban az $1, 2, 3$, a másikban a $4, 5, 6$ pontok vannak. Az (x, y) él költsége (ha be van húzva) $x+y-4$. A terminálok az $1, 2, 6$ pontok.

6. Létezik-e polinomiális algoritmus a $P2||C_{\max}$ feladat azon speciális eseteire, amikor a megmunkálási idők legfeljebb kétfélék lehetnek?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2009. április 29.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a duális feladat rendszere megoldható (ezt tehát igazolni nem kell). Döntsük el, hogy korlátos-e (a megfelelő irányból) a duális feladat célfüggvénye a megoldáshalmazán.

$$\begin{array}{l} \max\{2x+3y+5z\} \\ \text{ha} \\ 3x+5y+7z \leq 11 \\ 7x+11y+13z \geq -17 \\ 13x+17y+19z \leq 23 \\ 19x+23y+29z \geq -31 \end{array}$$

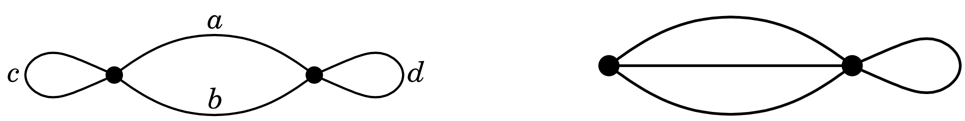
2. A $G(A,B;E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ és $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen i^2+j^3 minden $1\leq i,j\leq n$ esetén. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).

3. Az $M(a,b)$ matroidot az alábbi mátrix reprezentálja a valós test felett:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Meg lehet-e b értékét úgy választani, hogy $M(a,b)$ az a értékétől függetlenül mindig grafikus legyen? Hát úgy, hogy sose legyen grafikus?

4. A második gráf éleiről „véletlenül” lemaradtak a betűk, nem tudjuk, hogy az a, b, c, d élek közül melyik a hurokél. Eldönthető-e azért, hogy a két gráf körmatroidjának az összege grafikus-e?



5. Tekintsük a Metrikus Utazóügynök probléma azon eseteit, ahol bármely két csúcs között létezik olyan út, amely csak 1 súlyú éleket használ. Igaz-e, hogy ezekben az esetekben polinom időben találhatunk olyan Hamilton-kört, melynek költsége legfeljebb $2n$ (ahol n a csúcsok száma)?

6. Mutassuk meg, hogy a Ládapakolás problémára adott First Fit Decreasing algoritmus approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{3}{2}$.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása.

a) A feladat $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ -7 & -11 & -13 \\ 13 & 17 & 19 \\ -19 & -23 & -29 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 23 \\ 31 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ezért a feladat duálisa $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$. Ezt részletesebben kiírva és az $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ jelölést alkalmazva:

$$\begin{array}{l} \min\{11y_1 + 17y_2 + 23y_3 + 31y_4\} \\ \text{ha} \\ 3y_1 - 7y_2 + 13y_3 - 19y_4 = 2 \\ 5y_1 - 11y_2 + 17y_3 - 23y_4 = 3 \\ 7y_1 - 13y_2 + 19y_3 - 29y_4 = 5 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

b) Mivel $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$, ezért $11y_1 + 17y_2 + 23y_3 + 31y_4 \geq 0$ nyilván fennáll, így a duális célfüggvénye alulról korlátos a megoldáshalmazán.

Megjegyzés. Általában ha a duális megoldható, akkor a duális célfüggvény alulról korlátosságának szükséges és elégséges feltétele a primál feladat megoldhatósága. Ez következik a Rendszeroptimalizálás könyv 1.6. Tételéből, valamint abból a tényből, hogy a duális feladat duálisa ekvivalens a primállal.

A 2. feladat megoldása. Legyen

$$c(v) = \begin{cases} i^2, & \text{ha } v \in A, v = a_i; \\ j^3, & \text{ha } v \in B, v = b_j. \end{cases}$$

Ekkor *minden* $e = \{a, b\}$ élre $w(e) = c(a) + c(b)$ teljesül (ahol w-vel a feladatban definiált súlyfüggvényt jelöltük). Ebből következik, hogy *tetszőleges* M teljes párosításra

$$\sum_{e=\{a,b\} \in M} w(e) = \sum_{e=\{a,b\} \in M} (c(a) + c(b)) = \sum_{v \in A \cup B} c(v) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i^3).$$

Vagyis minden teljes párosítás összsúlya a fenti érték, így tetszőleges teljes párosítás (például az $\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_n, b_n\}$ élek) maximális összsúlyú.

A 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban x, y, z és u. Látható, hogy x, y és z közül semelyik kettő nem párhuzamos, de a három együtt lineárisan összefüggő (hiszen $x+y = z$). Tegyük fel először, hogy $b \neq 0$. Ekkor az $\{x, y, z\}$ bármely lineárisan független részhalmazához u-t hozzávéve a lineáris függetlenség nyilván megmarad, így ekkor a értékétől függetlenül az $M(a, b)$ matroidot reprezentálja az a gráf, amit egy négy pontú teljes gráfból két szomszédos él elhagyásával kapunk. Ezért a feladat első kérdésére a válasz igen: tetszőleges $b \neq 0$ választás esetén $M(a, b)$ minden a-ra grafikus.

Tegyük fel most, hogy $b = 0$. Ekkor a reprezentáló mátrix rangja nyilván 2, így a négy oszlop között már nem lesz három lineárisan független. Ha $a = 0$ vagy $a = 1$, akkor u egyenlő x-szel vagy z-vel, így ebben a két esetben $M(a, b)$ grafikus: reprezentálja az a gráf, amit egy háromszög egyik élének megduplázásával kapunk. Ezért a feladat második kérdésére a válasz nemleges, hiszen az $a = 0, 1$ esetekben $M(a, b)$ minden b-re grafikus.

Megjegyzés. A fennmaradó $b = 0$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ esetekben $M(a, b)$ az $U_{4,2}$ uniform matroiddal izomorf, így nem grafikus.

A 4. feladat megoldása. Világos, hogy a bal oldali gráf körmatroidjának függetlenjei csak $\{a\}$, $\{b\}$ (és $\emptyset$). A jobb oldali gráf körmatroidjának nemüres függetlenjei pedig a három párhuzamos élnek megfelelő egyelemű halmaz. Így az összegmatroid rangja mindenképp 2.

Tegyük fel először, hogy a jobb oldali gráfban a hurokél a. Ekkor az összegmatroidban a $\{c, d\}$-t kivéve minden kételemű halmaz független (mert az összes többi kételemű halmaz előállítható úgy, hogy egyrészt a és b, másrészt pedig b, c és d közül választunk egy-egy elemet). Így ebben az esetben az összegmatroid grafikus: reprezentálja az a gráf, amelyet egy háromszög egyik élének megduplázásával kapunk és a két párhuzamos él c és d.

Teljesen hasonló a helyzet akkor, ha a hurokél b. Tegyük fel most, hogy a jobb oldali ábrán a hurokél c. Ekkor az összegmatroidban c hurok (mert mindkét matroidban az), viszont az $\{a, b, d\}$ halmaz minden kételemű részhalmaza könnyen láthatóan független. Ezért az összegmatroid megint grafikus: reprezentálja az a gráf, amit egy háromszög és egy hurokél alkot (ahol a hurokél c).

Mivel a legutolsó eset, amikor d hurokél, az előbbivel analóg, azt kapjuk, hogy az összegmatroid mindenképp grafikus; ez tehát a betűk ismerete nélkül is eldönthető.

Az 5. feladat megoldása. A feltétel szerint az összes csúcsból és az 1 súlyú élekből álló gráf összefüggő, így létezik az eredeti gráfnak csupa 1 súlyú élből álló feszítőfája. Ennek az éleit megduplázva, majd a kapott gráf (mely összefüggő és minden foka páros) Euler-körét az előadáson tanultak szerint levágva legfeljebb $2n-2$ súlyú Hamilton-kört kapunk (a levágások a metrikusság miatt nem növelik a költséget).

A 6. feladat megoldása. Legyen a ládák súlya (mondjuk) 13, az elhelyezendő tárgyak súlyai (mondjuk) 5,5,4,4,4,4. Az optimális megoldáshoz nyilván elég két láda, míg a FFD algoritmus először a két 5 súlyú tárgyat helyezi el, éspedig egy ládába. Ezután ebbe a ládába más már nem fér, így összesen három láda fog kelleni. Mivel meg tudtunk adni olyan esetet, ahol az algoritmus az optimum $\frac{3}{2}$-szeresét adja, az approximációs faktor nem lehet jobb, mint $\frac{3}{2}$.

Megjegyzés. Ismert, hogy a FFD algoritmus legfeljebb $\frac{11}{9}OPT+4$ ládát használ, ez azonban nem ekvivalens azzal, hogy az approximációs faktora nem rosszabb, mint $\frac{11}{9}$.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2009. május 20.

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

$$\begin{array}{l} \min\{2x+3y+5z\} \\ \text{ha} \\ 3x+5y+7z=11 \\ 7x+11y+13z=17 \\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0 \end{array}$$

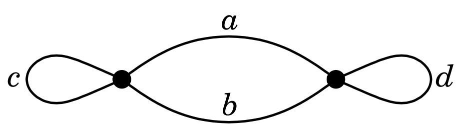
2. A $G(A,B;E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{10}\}$ és $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_{10}\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen $|i-j|$ minden $1\leq i,j\leq 10$ esetén. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).

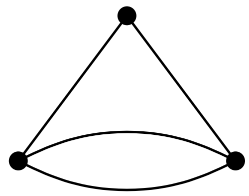
3. Az $M(a,b)$ matroidot az alábbi mátrix reprezentálja a valós test felett:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Egy-egy példán mutassuk meg, hogy a és b értéke úgy is megválasztható, hogy $M(a,b)$ grafikus legyen, és úgy is, hogy nem!

4. A második gráf éleiről „véletlenül" lemaradtak a betűk. Eldönthető-e azért, hogy a két gráf körmatroidjának az összege grafikus-e?





5. A Steiner-fa probléma egy esetét nevezzük kellemesnek, ha a terminálok T halmaza pontosan három csúcsú és legalább egy élet feszít, emellett minden élsúly 1. Létezik-e polinomiális algoritmus a Kellemes Steiner-fa problémára (ahol a bemenet természetesen a Steiner-fa probléma egy kellemes esete)?

6. Igaz-e, hogy az Utazóügynök probléma akkor is NP-nehéz, ha a bemeneti gráf élsúlyozásához garantáltan legfeljebb három különböző súlyt lehet használni?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2009. november 16.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát (a t valós paraméter minden értékére)! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a t paraméter milyen értékeire lesz a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán.

$$\max\{x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + t \cdot x_5\}$$
ha
$$x_1 - 2x_2 \le 1$$
$$x_2 - 2x_3 \le 2$$
$$x_3 - 2x_4 \le 3$$
$$x_4 - 2x_5 \le 4$$

2. Legyen A $m \times n$-es mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszerek közül pontosan az egyik megoldható:

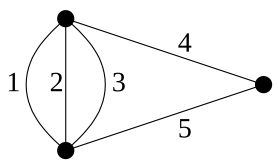
(1) $Ax = b$, $x > 0$
(2) $yA \ge 0$, $yb \le 0$, $y(A|b) \ne 0$

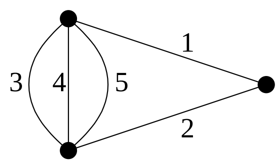
(Azt kell tehát megmutatni, hogy az *(1)*-esbeli x és a *(2)*-esbeli y vektorok közül pontosan az egyik létezik. $x > 0$ azt jelenti, hogy az x minden komponense pozitív. $(A|b)$ azt a mátrixot jelöli, amit az A-ból nyerünk úgy, hogy b-t hozzávesszük új oszlopként.)

3. Koordinátázza az alábbi mátrix (a valós test fölött) az $\mathcal{M}_{x,y}$ matroidot. Az x, y értékektől függően mikor lesz az $\mathcal{M}_{x,y}$ matroid grafikus?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & x & 0 \\ 0 & 6 & 0 & y \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalin láthatóé $\mathcal{B}$. Grafikusak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok?





5. Tekintsük az utazóügynök probléma azon speciális eseteit, amikor a gráf pontjai egy szabályos n-szög csúcsain helyezkednek el, az élek súlyai pedig a végpontok euklideszi távolságával azonosak. Igaz-e, hogy ezen speciális esetekre az előadáson tanult $\frac{3}{2}$-approximációs algoritmus optimális megoldást ad?

6. Mutassuk meg, hogy létezik $(2 - \frac{1}{m})$-approximációs algoritmus a $Pm|prec|C_{\max}$ feladatra, ha ismert, hogy a precedenciagráf pontosan egy élből áll. (Mellőzzük annak az előadáson bizonyítás nélkül közölt ténynek a használatát, miszerint a listás ütemezés $(2 - \frac{1}{m})$-approximációs algoritmus a $Pm|prec|C_{\max}$ feladatra.)

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása.

a) A feladat $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

Ezért a feladat duálisa $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$. Ezt részletesebben kiírva és az $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ jelölést alkalmazva:

$$\begin{aligned} &\min\{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4\} \\ &\text{ha} \\ &y_1 = 1 \\ &y_2 - 2y_1 = -1 \\ &y_3 - 2y_2 = -1 \\ &y_4 - 2y_3 = -1 \\ &-2y_4 = t \\ &y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{aligned}$$

b) Nyilvánvaló, hogy a primál feladat egyenlőtlenségrendszere megoldható (például $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ megoldás). Így az ismert tétel (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.6. Tétel) szerint a primál feladat célfüggvénye akkor és csak akkor felülről korlátos a megoldáshalmazán, ha a duális egyenlőtlenségrendszere megoldható.

A duális felírásakor kapott első négy egyenletből adódik, hogy $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$. Így az $y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$ feltételek az egyetlen szóbajövő duális megoldásra automatikusan teljesülnek. Ezek szerint a duális rendszerének megoldhatósága az utolsó, $-2y_4 = t$ egyenlettől függ: látszik, hogy pontosan a $t = -2$ értékre megoldható.

Tehát a primál célfüggvénye akkor és csak akkor felülről korlátos, ha $t = -2$.

A 2. feladat megoldása. Először megmutatjuk, hogy *(1)* és *(2)* egyszerre nem lehet megoldható. Tegyük fel, hogy mégis és legyen x, illetve y egy-egy megoldás. Zárójelezzük kétféleképpen az yAx szorzatot: $0 \le (yA)x = y(Ax) = yb \le 0$. (Itt $0 \le (yA)x$-hez felhasználtuk, hogy $yA \ge 0$ és $x > 0$ (valamint a mátrixszorzás definícióját), $y(Ax) = yb \le 0$-hoz pedig azt, hogy $Ax = b$ és $yb \le 0$.) Látható, hogy ez csak akkor valósulhatna meg, ha $yb = 0$ és $(yA)x = 0$ is fennállna. Ez azonban az $y(A|b) \ne 0$ feltétel miatt lehetetlen: ha $yb = 0$, akkor szükségképp az yA sorvektor koordinátái között kell legyen nemnulla (azaz pozitív) szám, amiből $x > 0$ miatt $(yA)x > 0$ következik.

Tegyük fel most, hogy *(2)* nem megoldható; célunk belátni, hogy akkor *(1)* igen. Ha *(2)*-t fel tudnánk írni „hagyományos" egyenlőtlenségrendszer alakban, akkor alkalmazhatnánk a Farkas-lemmát; de az $y(A|b) \ne 0$ feltétel ezt látszólag lehetetlenné teszi. Azonban látszik, hogy ha a *(2)* rendszernek y megoldása, akkor $\alpha \cdot y$ is megoldás tetszőleges $\alpha > 0$-ra. Így az $y(A|b) \ne 0$ feltételt átfogalmazhatjuk: $yA \ge 0$, $yb \le 0$ helyett írhatjuk, hogy $y(-A|b) \le 0$; $y(A|b) \ne 0$ pedig nyilván ekvivalens $y(-A|b) \ne 0$-val. Ezek szerint az $y(-A|b)$ sorvektor minden komponense nempozitív és van köztük negatív is. Így a fenti ($\alpha \cdot y$-ra vonatkozó) megfigyelés miatt feltehetjük, hogy az $y(-A|b)$ sorvektor koordinátáinak összege legföljebb -1.

Összefoglalva a fentieket: jelölje $\mathbf{1}$ a „csupaegy" oszlopvektort és legyen $u = (-A|b) \cdot \mathbf{1}$ (vagyis a $(-A|b)$ oszlopainak összege). Ha *(2)* nem megoldható, akkor nem megoldható az $y(-A|b) \le 0$, $yu \le -1$ rendszer sem (hiszen $yu = y((-A|b)\mathbf{1}) = (y(-A|b))\mathbf{1}$ épp az $y(-A|b)$ koordinátáinak összege). Erre pedig (transzponálás után) már alkalmazhatjuk a Farkas-lemma szokásos alakját (Rendszeroptimalizálás könyv, 1.3. Tétel). Azt kapjuk, hogy létezik az $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ge 0$ vektor és a $\lambda, \mu \ge 0$ skalárok úgy, hogy $(-A)x + \lambda b + \mu u = 0$ és $(-\mu) < 0$. (Itt a Farkas-lemma által garantált $(n+2)$-dimenziós oszlopvektor utolsó két (b-nek, illetve u-nak megfelelő) koordinátáját jelöltük λ-val, illetve μ-vel, az ezek elhagyásával kapott oszlopvektort pedig x-szel.)

Itt $\mu u = \mu(-A|b)\mathbf{1} = (-A)\cdot(\mu\mathbf{1})+\mu b$. Ezt a fentibe helyettesítve és átrendezve: $A(x+\mu\mathbf{1}) = (\lambda+\mu)b$. Mivel $x \geq 0$, $\lambda \geq 0$ és $\mu > 0$ (utóbbi $(-\mu) < 0$ miatt), ezért $\lambda + \mu > 0$ és $x + \mu\mathbf{1} > 0$. Ebből viszont valóban következik, hogy *(1)* megoldható: az $\frac{1}{\lambda+\mu}(x+\mu\mathbf{1})$ vektor megoldása.

Megjegyzés. A feladat egy másik lehetséges megoldásának alapgondolata a következő. Tekintsük a következő lineáris programot: $Ax = b$, $x \geq \mu\mathbf{1}$, $\max : \mu$. (Ez egy $n+1$ változós feladat, x koordinátáin kívül μ is változó.) Ekkor a feladatbeli *(1)* rendszer akkor és csak akkor megoldható, ha a fenti lineáris program rendszere megoldható (ami ekvivalens $Ax = b$ megoldhatóságával) és a maximumértéke vagy nem létezik, vagy pozitív. Alkalmazva a dualitástételt valóban a *(2)*-es rendszer megoldhatóságával ekvivalens állítást kapunk.

A 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait (ebben a sorrendben) a, b, c és d. Látható, hogy ha $x = 6$, akkor $c = 2a$; hasonlóan, ha $y = -3$, akkor $b = -2d$. Az is könnyen látszik, hogy ha $x \neq 6$ és $y \neq -3$, akkor a mátrix 4 oszlopa lineárisan független. (Ugyanis egy elképzelt $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d$ lineáris kombináció első és harmadik koordinátáját csak a és c határozza meg, a másodikat és a negyediket csak b és d. Az előbbi esetben például az $\alpha + 2\gamma$, illetve $3\alpha + x \cdot \beta$ a két koordináta, amik az $x \neq 6$ esetben csak $\alpha = \beta = 0$-ra adnak egyaránt 0-t; a második esetre az ellenőrzés hasonló. Opcionálisan a mátrix determinánsa is könnyen kiszámítható: $(x-6)(2y+6)$; látszik, hogy ez csak az $x = 6$ vagy az $y = -3$ esetben lesz 0.)

Így az $x \neq 6$, $y \neq -3$ esetben $\mathcal{M}_{x,y}$ az $U_{4,4}$ uniform matroiddal izomorf. Ez nyilván grafikus: bármely 4 élű fa reprezentálja. Ha $x \neq 6$, de $y = -3$, akkor a, b és c függetlenek (ez a fentihez nagyon hasonlóan indokolható). Így a matroid ilyenkor is grafikus: reprezentálja egy 3 élű fa, amelynek az egyik élét két párhuzamos éllel helyettesítjük (ezek b-nek és d-nek felelnek meg). Az $x = 6$, $y \neq -3$ eset szimmetrikus: $\mathcal{M}_{x,y}$-t ilyenkor is egy ugyanilyen gráf reprezentálja, csak a párhuzamos élek a-nak és c-nek felelnek meg. Végül az $x = 6$, $y = -3$ esetben a és b függetlenek, de c és d rendre az elsővel, illetve a másodikkal párhuzamos. Így a matroid ilyenkor is grafikus: reprezentálja egy 2 élű út, amelynek mindkét élét helyettesítjük 2-2 párhuzamos éllel.

A 4. feladat megoldása. Mindkét matroid rangja 2 (hiszen 3 pontú, összefüggő gráfok reprezentálják őket), ezért mindkét összegmatroid rangja legföljebb 4 lehet. Sőt, például az $\{1,4\}$ és a $\{2,5\}$ halmazok mindkét matroidban függetlenek, így az $\{1,2,4,5\}$ mindkét összegmatroidban független; így $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ és $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ rangja is 4.

$\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$-ban azonban nem minden 4 elemű halmaz független, hiszen az 1, 2 és 3 elemek közül minden $\mathcal{A}$-beli független csak 1-et tartalmazhat, ezért minden $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$-beli független legföljebb csak 2-t. Azonban az $\{1,2,3\}$-at nem tartalmazó 4 eleműek mind függetlenek: 1, 2 és 3 közül kettőt választva az egyikhez hozzávehetjük a 3-at, a másikhoz a 4-et; így két kételemű függetlent kapunk, amiknek az uniója $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$-beli. Ezért $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ grafikus: reprezentálja az a gráf, amit egy háromszögből kapunk úgy, hogy „lelógatunk" róla két élet. (A háromszög élei felelnek meg 1-nek, 2-nek és 3-nak, a lelógatott élek 4-nek és 5-nek.)

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$-ben viszont már minden 4 elemű halmaz független. Ezt legegyszerűbb az 5 eset végigpróbálásával ellenőrizni: már láttuk, hogy $\{1,2,4,5\} = \{1,4\} \cup \{2,5\}$ és hasonlóan $\{1,2,3,4\} = \{1,4\} \cup \{2,3\}$, $\{1,2,3,5\} = \{1,5\} \cup \{2,3\}$, $\{1,3,4,5\} = \{4,5\} \cup \{1,3\}$ és $\{2,3,4,5\} = \{4,5\} \cup \{2,3\}$ (ahol mindig bal oldalra írtuk az $\mathcal{A}$, jobbra a $\mathcal{B}$-beli függetlent). Így $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ az $U_{5,4}$ uniform matroiddal izomorf, ami ismét grafikus: reprezentálja egy 5 élű kör.

Az 5. feladat megoldása. Az algoritmus először egy minimális súlyú feszítőfát keres, ez (mint az mondjuk a Kruskal-algoritmus végrehajtásával látható) a sokszög oldalai közül tartalmaz $n-1$ darabot (és persze más élet nem). Ebben két páratlan fokú csúcs lesz, tehát a páratlan fokú csúcsokon vett minimális összsúlyú párosítás a két (a sokszögön szomszédos) csúcs közti élből áll. Ezt a fához véve nem csak Euler-kört, hanem Hamilton-kört is kapunk, tehát a levágások után az élhalmaz változatlan marad: épp a sokszög oldalaiból fog állni. Ez nyilván az optimális megoldás, hiszen pont az n legrövidebb élből áll.

A 6. feladat megoldása. Tekintsük azt az L listás ütemezést, ahol a gráf egyetlen élének kezdőpontja (legyen ez J_1) az első, a végpont (J_n) pedig az utolsó elem a listában. Ez nyilván polinomiális, megmutatjuk, hogy emellett approximációs faktora legfeljebb $2 - \frac{1}{m}$. Az eredeti feladat egy tetszőleges B

bemenetének időigénye legyen OPT, a feladat precedenciák nélküli változatához tartozó, egyéb paramétereiben B-vel megegyező B' bemenet időigénye pedig OPT'. Ekkor nyilván $OPT' \leq OPT$. Legyen ezen kívül L' a B' bemenethez tartozó listás ütemezés az L ütemezéshez tartozó sorrendben.

Ha az L' ütemezésben J_n elkezdésekor J_1-gyel már végeztünk, akkor az L és L' ütemezések nyilván ugyanannyi időt igényelnek. Mivel L' approximációs faktora $2 - \frac{1}{m}$ és $OPT' \leq OPT$, ekkor kész vagyunk.

Ha az L' ütemezésben J_n elkezdésekor J_1-gyel még nem végeztünk, akkor az L ütemezés a B bemeneten $\max(p_1 + p_n, OPT')$ ideig fog tartani, ami optimális, hiszen $OPT' \leq OPT$ és nyilván $p_1 + p_n \leq OPT$, így ebben az esetben is készen vagyunk.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2009. december 15.

1. Döntsük el, hogy az $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ választással
a) bázismegoldását
b) erős bázismegoldását
adtuk-e meg az alábbi egyenlőtlenségrendszernek:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_2 - x_3 &\leq 0 \\ x_1 - x_3 &\leq 2 \\ x_3 + x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$

2. Legyen A $m \times n$-es mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$ oszlopvektor. Mutassuk meg, hogy az alábbi rendszerek közül pontosan az egyik megoldható:

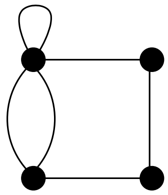
(1) $Ax \leq b$, $x \geq 0$
(2) $yA \geq 0$, $y \geq 0$, $yb < 0$

(Azt kell tehát megmutatni, hogy az *(1)*-esbeli x és a *(2)*-esbeli y vektorok közül pontosan az egyik létezik.)

3. A p paraméter minden értékre döntsük el, hogy az alábbi mátrix által koordinátázott matroid grafikus-e! Amennyiben igen, adjuk meg egy grafikus reprezentációját!

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ p & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Legyen $\mathcal{M}_1$ az alábbi gráf körmatroidja, illetve $\mathcal{M}_2$ az alábbi mátrix által (a valós test fölött) koordinátázott matroid. Megfeleltethetők-e egymásnak $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ alaphalmazának elemei úgy, hogy a két matroid összege
a) az $U_{6,6}$ szabad (teljes) matroid legyen;
b) ne az $U_{6,6}$ szabad (teljes) matroid legyen?



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Legyenek a G teljes gráf csúcsai a természetes számok 1-től 8-ig, a páros számok közt vezető élek súlya legyen 3, a páratlan számok közt vezető élek súlya szintén 3, a páros és páratlan számok közti élek súlya pedig 1. Legyenek a a Steiner-pontok a páratlan számok, a terminálok a páros számok. Adjunk meg egy, az optimálishoz képest legfeljebb kétszeres súlyú Steiner-fát az előadáson tanult 2-approximációs algoritmus segítségével.

6. Adjunk optimális ütemezést az $1||\sum w_i C_i$ feladatra.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Figyelem! Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 2 részre: az 1-es/2-es/3-as, illetve a 4-es/5-ös/6-os feladatcsoportokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2010. április 28.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg? Igaz-e, hogy az $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, $y_4 = 0$ választással a duális feladat optimális megoldását adtuk meg?

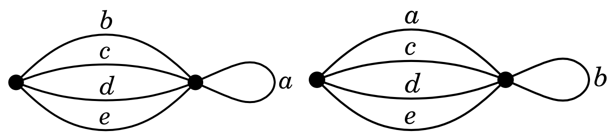
$$\max\{6x_1 + 6x_2 + 6x_3\}$$
ha
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 3$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8$$
$$2x_1 + 5x_2 \le 2$$

2. Nevezzünk egy mátrixot *unalmasnak*, ha minden eleme 0, 1 vagy -1 és minden sorában legföljebb két nemnulla elem van. Mutassuk meg, hogy a Fourier-Motzkin elimináció apró módosításával olyan, polinomiális lépésszámú algoritmus adható, amely az $Ax \le b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságát eldönti abban az esetben, ha A unalmas mátrix.

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a T test fölött az $\mathcal{M}(T)$ matroidot. Mutassuk meg, hogy vannak olyan T_1, T_2 testek, melyek esetén $\mathcal{M}(T_1)$ nem izomorf $\mathcal{M}(T_2)$-vel!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalin láthatóé $\mathcal{B}$. Uniformak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok?



5. Tekintsük az $\{$`a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,r,s,t,w,y`$\}$ betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

`ike (3), chef (3), jimbo (3), stan (4), mackey (4),`
`kyle (5), wendy (5), liane (6), randy (6), gerald (6).`

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

6. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a RÉSZÖSSZEG problémára tanult $(1+\varepsilon)$-approximációs algoritmust az alábbi bemenetre.

$4, 6, 9, 14, 22; \quad t = 34; \quad \varepsilon = 2$

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása.

a) A feladat $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakú, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ezért a feladat duálisa $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$. Ezt részletesebben kiírva és az $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ jelölést alkalmazva:

$$\begin{aligned}
&\min\{y_1 + 3y_2 + 8y_3 + 2y_4\} \\
&\text{ha} \\
&y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 = 6 \\
&2y_1 + 3y_2 + y_3 + 5y_4 = 6 \\
&3y_1 + y_2 + 2y_3 = 6 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{aligned}$$

b) A megadott x_1, x_2, x_3 értékeket a primál egyenlőtlenségeibe, az y_1, y_2, y_3, y_4 értékeket a duális egyenleteibe (és nemnegativitást előíró egyenlőtlenségeibe) helyettesítve látszik, hogy valóban a primál, illetve a duális egy-egy megoldását adtuk meg. Mindkét esetben kiszámítva a megfelelő célfüggvényértékeket ($cx = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 12$, illetve $yb = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 8 = 12$) azt kapjuk, hogy ezek megegyeznek. Ebből pedig következik, hogy mindkét esetben optimális megoldásról van szó. (Ugyanis ismert, hogy a primál feladat tetszőleges x' és a duális tetszőleges y' megoldására $cx' \le y'b$ áll fenn. Így tetszőleges x' megoldásra $cx' \le yb = 12$, vagyis 12-nél nagyobb célfüggvényértéket adó primál megoldás nem lehet, x tehát optimális. A duális esetében az indoklás analóg.)

A 2. feladat megoldása. Először megmutatjuk, hogy a Fourier-Motzkin elimináció (apró kiegészítéssel) fenntartja azt a tulajdonságot, hogy a rendszert leíró mátrix unalmas. Tegyük fel ugyanis, hogy a (kibővített együtthatómátrixával megadott) $(A|b)$ rendszerre az elimináció egy lépését alkalmazva a $(A^*|b^*)$ rendszert kapjuk. Ha az $(A^*|b^*)$ egyik sora az $(A|b)$ egyik 0-val kezdődő sorának másolata (levágva belőle az első, 0 elemet), akkor ez a sor persze továbbra is megfelel az unalmasság kritériumának. Ha viszont az $(A^*|b^*)$ rendszer $(a^*_k|b^*_k)$ sora az $(A|b)$ 1-essel kezdődő $(a_i|b_i)$ és (-1)-essel kezdődő $(a_j|b_j)$ sorának összegéből keletkezett, akkor a_i-ben és a_j-ben is legföljebb 1 további nemnulla elem lehet. Feltehető, hogy mindkettőben pontosan 1 van, különben a^*_k-nak is legföljebb csak 1 nemnulla eleme lesz (és az is ± 1). Ha az a_i-beli és a_j-beli (nem az első oszlopba eső) nemnulla elemek különböző oszlopban vannak, akkor a^*_k nyilván megfelel az unalmasság fogalmának. Ha viszont azonos oszlopban vannak, akkor a^*_k vagy a nullvektor, vagy pedig egyetlen nemnulla eleme van és az ± 2. Ebben az esetben viszont nyilván leoszthatjuk $(a^*_k|b^*_k)$-ot 2-vel, hogy az továbbra is megfeleljen az unalmasság definíciójának. (Ez tehát az említett apró kiegészítés.)

Most megmutatjuk, hogy az algoritmus (apró módosításának) futása közben a sorok száma mindig legföljebb $O(n^2)$ marad (ahol n az A oszlopainak száma). Ebből nyilván következni fog a polinomiális futásidő (hiszen m sorú A estén $(A^*|b^*)$ nyilván $O(m^2)$ lépésben megkapható). Könnyen látszik, hogy ha A unalmas n oszlopú mátrix, akkor legföljebb $4\binom{n}{2} + 2n + 1 = O(n^2)$ féle sora lehet (ahol az összeadandók a 2, 1, illetve 0 darab nemnulla elemet tartalmazó sorok számának felelnek meg). Az persze előfordulhat, hogy valamelyik sortípus többször is előfordul az $(A^*|b^*)$-ban; ekkor azonban ezek közül egy kivételével nyilván mind fölösleges és elhagyható. (Ha például az $(a^*_k|b^*_k)$ és $(a^*_l|b^*_l)$ sorokra $a^*_k = a^*_l$ és $b^*_k \le b^*_l$, akkor az utóbbi fölösleges.) Így az elimináció minden lépése után az így adódó fölösleges sorokat elhagyva (ezzel tehát az algoritmust másodszor is némileg módosítva) elérhető a sorok számára említett korlát és ezzel a polinomiális lépésszám.

A 3. feladat megoldása. Legyen T_1 a 3 elemű test. Azonnal látszik, hogy ekkor a mátrix oszlopait összeadva a nullvektort kapjuk (hiszen ebben a testben $1+1+1=0$). Így a 3 elemű test felett az oszlopok lineárisan összefüggőek, vagyis a mátrix *nem* az $U_{4,4}$ szabad matroidot koordinátázza (hanem az $U_{4,3}$ matroidot – bár ennek a megállapítása nem szükséges a feladat megoldásához). Azonban például $T_2 = \mathbb{R}$ fölött a mátrix determinánsát meghatározva $-3 \neq 0$-t kapunk (a számolást mellőzzük), így az oszlopok lineárisan függetlenek, vagyis ekkor a matroid az $U_{4,4}$ szabad matroid.

A 4. feladat megoldása. A kapott összegmatroid (mindkét esetben) akkor uniform, ha pontosan a legföljebb k elemű részhalmazok függetlenek benne alkalmas k-ra ($0 \leq k \leq 5$).

Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ matroidban a nyilván továbbra is hurok lesz, a $\{b, c, d, e\}$ halmaznak viszont a legföljebb 2 elemű részhalmazai lesznek függetlenek. Ezért $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ nem uniform matroid (hanem izomorf az $U_{4,2} \oplus U_{1,0}$ matroiddal, ahol a $\oplus$ direkt összeget jelöl).

Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroid ezzel szemben izomorf az $U_{5,2}$ matroiddal. Az ugyanis világos, hogy a rangja 2 (hiszen sem $\mathcal{A}$-ban, sem $\mathcal{B}$-ben nincs 1-nél több elemű független) és azt is könnyű ellenőrizni, hogy bármely 2 elemű részhalmaz előáll egy $\mathcal{A}$-beli és egy $\mathcal{B}$-beli 1 elemű független uniójaként. (Valóban, minden 2 elemű részhalmaz egyik eleme a-tól, a másik b-től különbözik.)

Az 5. feladat megoldása. Az algoritmus mindig azt a részhalmazt választja ki, amelyre a lehető legkisebb a halmaz költségének és az újonnan lefedett elemek számának hányadosa.

Az első lépésben a `jimbo` részhalmazt kell választanunk, mert ennek a legkisebb az egy elemre eső aktuális költsége ($\frac{3}{5}$). Ezt követően a `chef` részhalmaz jön, $\frac{3}{4}$ aktuális költséggel. A következő halmaz a `stan` kell legyen, ez újabb 4 elemet fed le, 4 költséggel, majd a `gerald` halmaz következik, ennek költsége $\frac{3}{2}$. Az ezt követő lépésben a `mackey` halmazra lesz a kérdéses érték minimális (2), az utolsó beválasztott szó pedig a `wendy`, 5-ös értékkel.

A kapott fedés tehát: $\{\texttt{jimbo}, \texttt{chef}, \texttt{stan}, \texttt{gerald}, \texttt{mackey}, \texttt{wendy}\}$, költsége 25.

A 6. feladat megoldása. Az exponenciális lépésszámú pontos megoldás során az L_i listában az első i elem által alkotott részösszegek szerepelnek, ezeket az $L_0 = \{0\}$, $L'_i = \{x + a_{i+1} \mid x \in L_i\}$, $L_{i+1} = L_i \cup L'_i$ képletekkel kapjuk. A közelítő algoritmusban szereplő listák ettől annyiban különböznek, hogy a t-nél nagyobb elemeket azonnal töröljük és az L_i listákat a $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$ értékkel ritkítjuk (azaz alulról kezdve töröljük azokat az x elemeket, melyekhez létezik olyan náluk kisebb nem törölt y elem, melyre $x \leq (1+\delta)y$). Az algoritmus kimenete az L_n lista legnagyobb eleme. Esetünkben $n = 5$, így $\delta = 0,2$. A listák:

$L_0 = \{0\}, \;\; L'_0 = \{4\}$

$L_1 = \{0, 4\}, \;\; L'_1 = \{6, 10\}$

$L_2 = \{0, 4, 6, 10\}, \;\; L'_2 = \{9, 13, 15, 19\}$

$L_3 = \{0,4,6,9,\cancel{10},13,\cancel{15},19\}, \;\; L'_3 = \{14, 18, 20, 23, 27, 33\}$

$L_4 = \{0,4,6,9,13,\cancel{14},18,\cancel{19},\cancel{20},23,\cancel{27},33\}, \;\; L'_4 = \{22,26,28,31,\cancel{35},\cancel{40},\cancel{45},\cancel{55}\}$

$L_5 = \{0, 4, 6, 9, 13, 22, 23, 26, 28, 31, 33\}$,

tehát az algoritmus 33-at ad eredményként.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2010. május 13.

1. Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

a) Igaz-e, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán?

$$\max\{2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4\}$$
ha
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$
$$x_2 + 2x_4 \leq 6$$
$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 7$$
$$2x_2 + 3x_4 \leq 8$$

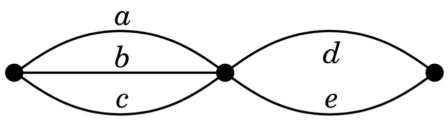
2. A $G(A, B; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem. Adjunk meg G-ben egy maximális összsúlyú teljes párosítást (és mutassuk meg róla, hogy maximális).

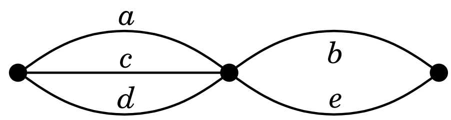
$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}(x)$ matroidot. Mutassuk meg, hogy x értékének ismerete nélkül is eldönthető, hogy $\mathcal{M}(x)$ grafikus-e!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalin láthatóé $\mathcal{B}$. Uniformak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok?





5. Igaz-e, hogy a Steiner-fa probléma polinom időben megoldható, ha a terminálok halmaza pontosan három elemű, az élsúlyok pedig csak az 1 és a 2 lehetnek?

6. Mutassuk meg, hogy a $P2||C_{\max}$ feladatra az LPT sorrendben történő listás ütemezés approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{7}{6}$.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2011. április 21.

1. A $G(A, B; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem. Az α valós paraméter mely értékeire teljesül, hogy a csúcsokhoz a jobb oldali táblázatban látható értékeket rendelve

a) címkézést kapunk;
b) minimális összegű címkézést kapunk?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2	4	6	6	6	0	0	1	1	α

2. Tegyük fel, hogy az $Ax \leq b$ lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldható. Jelölje az A mátrix i-edik sorát a_i, az a_i sor elhagyásával kapott mátrixot pedig A_i^-.Hasonlóan, a b vektor i-edik komponensét jelölje b_i, az ennek elhagyásával kapott oszlopvektort b_i^-. Az $Ax \leq b$ rendszer i-edik egyenlőtlenségét ($a_i x \leq b_i$-t) akkor nevezzük *redundánsnak*, ha az elhagyása nem változtatja meg az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát. Bizonyítsuk be, hogy $a_i x \leq b_i$ akkor és csak akkor redundáns, ha létezik olyan $y \geq 0$ sorvektor amelyre $y \cdot A_i^- = a_i$ és $y b_i^- \leq b_i$ teljesül!

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}_x$ matroidot. Az x valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy $\mathcal{M}_x$ grafikus-e (és ahol igen, ott adjuk meg a megfelelő gráfot)!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 2 & x & x \end{pmatrix}$$

4. Az $\{a, b, c, d\}$ halmazon két grafikus matroidot definiáltunk, azonban a második gráf éleiről „véletlenül” lemaradtak a betűk. Eldönthető-e azért, hogy a két matroid összege grafikus-e?

5. Igaz-e, hogy a Steiner-fa probléma polinom időben megoldható, ha a Steiner-pontok halmaza pontosan két elemű?

6. Mutassuk meg, hogy a $P3||C_{\max}$ feladatra az LPT sorrendben történő listás ütemezés approximációs faktora nem jobb, mint $\frac{11}{9}$.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. A táblázat adatai (definíció szerint) akkor határoznak meg egy c címkézést, ha minden $1 \leq i, j \leq 5$ számpárra $c(a_i)+c(b_j) \geq m_{i,j}$, ahol $m_{i,j}$ mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem. Ez az $1 \leq j \leq 4$ oszlopokra automatikusan teljesül (ez gyorsan ellenőrizhető), a $j = 5$ esetben pedig α-ra rendre a $2 + \alpha \geq 1$, $4 + \alpha \geq 2$, $6 + \alpha \geq 5$, $6 + \alpha \geq 5$ és $6 + \alpha \geq 4$ feltételeket kapjuk. Ezek együttesen pedig az $\alpha \geq -1$ esetben teljesülnek, így tehát ezekre az értékekre kapunk címkézést.

Minimális összúlyú címkézést nyilván csak az $\alpha = -1$ esetben kaphatunk (hiszen α összes többi szóba jövő értékére olyan címkézést kapunk, amelynek összege nagyobb az $\alpha = -1$ választással adódónál). Az előadáson tanultak szerint úgy tudjuk kimutatni, hogy az $\alpha = -1$ esetben kapott címkézés minimális összegű, ha mutatunk a gráfban egy olyan teljes párosítást, amelynek összsúlya megegyezik a címkék összegével (vagyis 25-tel). (Ugyanis bármely teljes párosítás összsúlya legföljebb annyi, mint bármely címkézés összege; tehát egy 25 összsúlyú teljes párosítás bizonyítja, hogy minden címkézés összege legalább 25.)

Egy ilyen teljes párosítás megtalálását az könnyíti meg, hogy (ugyancsak a tanultak szerint) csak olyan éleket van esélyünk beválogatni, amelyekre $c(a_i)+c(b_j) = m_{i,j}$. (Valóban, bármely M teljes párosítás éleire összeadva a $c(a_i) + c(b_j) \geq m_{i,j}$ egyenlőtlenséget bal oldalon az összes címke összegét, jobb oldalon M összsúlyát kapjuk; így egyenlőség a két oldal közt csak akkor lehet, ha mind az öt összeadott egyenlőtlenség is egyenlőséggel teljesült.) Ebből tehát az következik, hogy a következő élek közül kell a teljes párosítást kiválasztani: $\{a_1, b_4\}$, $\{a_1, b_5\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_1\}$, $\{a_4, b_2\}$, $\{a_4, b_5\}$, $\{a_5, b_1\}$ és $\{a_5, b_3\}$. Jól látható, hogy a_2 párja csak b_1 lehet, a_3-é csak b_5, b_2-é csak a_4 és b_4-é csak a_1; a_5-nek pedig marad b_3.

Vagyis megkaptuk a keresett, 25 összsúlyú teljes párosítást: $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_2\}$, $\{a_5, b_3\}$. Ebből pedig következik, hogy az $\alpha = -1$ esetben valóban minimális összegű címkézést kapunk.

Az 2. feladat megoldása. Az $a_ix \leq b_i$ (definíció szerint) pontosan akkor redundáns, ha az $A_i^- x \leq b_i^-$ lineáris egyenlőtlenségrendszer minden x megoldására $a_ix \leq b_i$ is teljesül. Más szóval: akkor, ha a $\max\{a_ix : A_i^- x \leq b_i^-\}$ lineáris program olyan, hogy a megoldáshalmazán a célfüggvénye felülről korlátos és a maximum értéke legföljebb b_i. (Azt nem kell vizsgálni, hogy az $A_i^- x \leq b_i^-$ egyenlőtlenségrendszer megoldható-e: ez az $Ax \leq b$ megoldhatóságából nyilván következik.)

Alkalmazva a dualitástételt azt kapjuk, hogy ez pontosan akkor igaz, ha a $\min\{yb_i^- : yA_i^- = a_i, y \geq 0\}$ duális program rendszere megoldható és a minimum értéke legföljebb b_i. Más szóval ez éppen azt jelenti, hogy létezik olyan megoldása a duálisnak (vagyis az $yA_i^- = a_i, y \geq 0$ feltételeket kielégítő vektor), amelyre $yb_i^- \leq b_i$. Éppen ezt kellett bizonyítani.

Az 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az $\mathcal{M}_x$ matroid megismeréséhez azt kell megvizsgálnunk, hogy (x különböző értékeire) mely oszlophalmazok lineárisan függetlenek. Mivel az oszlopok síkvektorok, nyilván nem találunk köztük 3 (vagy 4) lineárisan függetlent. A kérdés tehát az, hogy mely oszloppárok párhuzamosak (mint síkvektorok).

Jól látható, hogy az $x = 0$ esetben c mindenkivel párhuzamos, továbbá $a \parallel d$. Az $x \neq 0$ esetben viszont csak c és d tud párhuzamos lenni, ezek is csak az $x = 1$ esetben.

Mindez azt jelenti, hogy az $x = 0$ esetben $\mathcal{M}_x$ grafikus: reprezentálja egy olyan gráf, amelyben a és d párhuzamos élek, b egy ezekről „lelógó” (vagy akár külön komponenst alkotó) él, c pedig hurokél. $\mathcal{M}_x$ az $x = 1$ esetben is grafikus: ekkor egy olyan háromszög reprezentálja, amelynek egyik élét megdupláztuk (ezek lesznek c és d). Az $x \neq 0$, $x \neq 1$ esetekben viszont bármely oszloppár lineárisan független, így az $U_{4,2}$ matroidot kapjuk, amelyről ismert, hogy nem grafikus.

Az 4. feladat megoldása. Jelölje sorrendben $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ a két gráf körmatroidját. Mindkét matroid rangja 1, az elsőben $\{d\}$-n kívül minden 1 elemű halmaz független, a másodikban pedig a két párhuzamos élnek megfelelő egyelemű halmaz. Így az összegmatroid rangja 2 lesz: ekkora független halmazt nyilván kaphatunk egy $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$-beli uniójaként, nagyobbat biztosan nem.

Mivel a, b és c szerepe szimmetrikus, a feladat kérdésének megválaszolásához csak két esetet kell megvizsgálnunk: az elsőben a d hurokélre, a másodikban a két párhuzamos él valamelyikére kerül a jobb oldali gráfban.

Az első esetben d az összegmatroidban is hurok (vagyis $\{d\}$ összefüggő), az $\{a, b, c\}$ bármely kételemű részhalmaza viszont nyilván független. Így ekkor $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ grafikus: reprezentálja egy olyan gráf, amelyben a, b és c háromszöget alkot, d pedig hurokél.

A második esetben tegyük fel, hogy a jobb oldali gráfban a két hurokélre a és b kerül (mint említettük, ez mindegy). Ekkor $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-ben $\{a, b\}$ összefüggő, hiszen $\mathcal{M}_1$-ből csak az egyiküket, $\mathcal{M}_2$-ből egyiküket sem választhatjuk, ha független halmazt akarunk kapni. A másik három 2 elemű részhalmaz viszont független $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-ben: ha a két elem egyike a vagy b, akkor ezt $\mathcal{M}_1$-ből, a másikat $\mathcal{M}_2$-ből választhatjuk, ha viszont a $\{c, d\}$-ről van szó, akkor c-t $\mathcal{M}_1$-ből, d-t $\mathcal{M}_2$-ből választhatjuk, hogy független $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-belit kapjunk. Az összegmatroidot tehát egy olyan háromszög reprezentálja, amelynek egyik élét megdupláztuk (ezek lesznek a és b).

Így tehát $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ a betűk elhelyezésétől függetlenül mindig grafikus.

Az 5. feladat megoldása. Legyenek a és b a Steiner-pontok. Ekkor az optimális Steiner-fa négyféle lehet aszerint, hogy melyiket tartalmazza az a és b pontok közül: tartalmazhatja csak a-t, csak b-t, mindkettőt vagy egyiket sem. A gráf többi pontját a fának természetesen tartalmaznia kell, hiszen ezek terminálok lesznek. Az optimális Steiner-fa tehát a T, $T \cup a$, $T \cup b$, $T \cup a, b$ ponthalmazok valamelyike által feszített részgráf egy feszítőfája lesz.

Így az említett feszített részgráfokon minimális feszítőfát keresve (ha van) a mohó algoritmussal, majd a kapott fák közül a minimális összsúlyút véve polinomiális algoritmust kapunk a legkisebb költségű Steiner-fa megtalálására.

Az 6. feladat megoldása. Legyenek a munkák elvégzési idői 5,5,4,4,3,3,3. Ekkor az LPT algoritmusra a teljes átfutási idő 3 gépen 11 lesz, míg az optimum 3 gépen 9, amiből az állítás következik.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2011. május 3.

1. a) Írjuk fel az alábbi (n változós) lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Igaz-e, hogy az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ választással a primál feladat optimális megoldását adtuk meg?

$$\max\{nx_1 + (n-1)x_2 + \ldots + 2x_{n-1} + x_n\}$$

ha

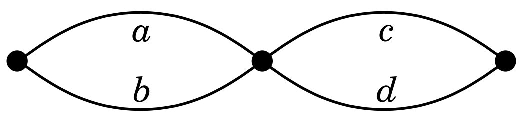
$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n & \leq & n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n & \geq & 0 \end{array}$$

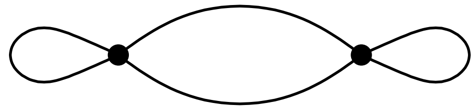
2. Legyen A egy totálisan unimoduláris, m sorú mátrix és jelölje minden $1 \leq i \leq m$ esetén s_i az A i-edik sorában álló elemeinek összegét. Legyen továbbá $k \geq 1$ tetszőleges egész. Mutassuk meg, hogy A-ból kiválasztható néhány oszlop (esetleg egy sem, vagy akár mind) úgy, hogy minden $1 \leq i \leq m$ esetén a kiválasztott oszlopok által alkotott mátrix i-edik sorában az elemek összege $\left\lfloor \frac{s_i}{k} \right\rfloor$ és $\left\lceil \frac{s_i}{k} \right\rceil$ közé esik (ahol $\lfloor\ \rfloor$, illetve $\lceil\ \rceil$ az alsó, illetve a felső egészrészt jelöli).

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}_{a,b}$ matroidot. Az a és b valós paraméterek minden értékére döntsük el, hogy $\mathcal{M}_{a,b}$ grafikus-e (és ahol igen, ott adjuk meg a megfelelő gráfot)!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

4. Az $\{a, b, c, d\}$ halmazon két grafikus matroidot definiáltunk, azonban a második gráf éleiről „véletlenül” lemaradtak a betűk. Milyen matroidok állhatnak elő a két matroid összegeként? (Ahol az összeg grafikus, ott a megfelelő gráffal adjuk meg az összegmatroidot!)





5. Igaz-e, hogy a Steiner-fa probléma polinom időben megoldható, ha a Steiner-pontok halmaza legfeljebb $2 \log n$ elemű (ahol n a gráf csúcsainak száma)?

6. Adjunk 2-approximációs algoritmust egy G gráf olyan H részgráfjának megkeresésére, melyre $\frac{e(H)}{\chi(H)}$ maximális. ($e(H)$ a H gráf élszámát, $\chi(H)$ a H gráf kromatikus számát jelöli.)

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2012. április 16.

1. A $G(F, L; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $F = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $L = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i, j \leq 5$ esetén). Valaki már elkezdte futtatni G-re a maximális összsúlyú teljes párosítás keresésére szolgáló Egerváry-algoritmust: éppen ott tart, hogy az aktuális M párosítás az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$ és $\{a_3, b_3\}$ élekből áll, az aktuális c címkézés pedig a jobb oldali táblázatban látható. Hajtsuk végre az algoritmus (egyetlen) következő ciklusát, vagyis határozzuk meg az algoritmus futása során előálló következő M' párosítást és c' címkézést!

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	5	3	5	6	2	2	1	1	0	1

(Az algoritmust tehát *nem szükséges* leállásig futtatni, elég a következő ciklus utáni állapotot megadni. Ha a ciklus végrehajtása nem egyértelmű – vagyis több, az algoritmus helyes futásának megfelelő változat is lehetséges, – akkor elég ezek közül egyet megadni.)

2. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

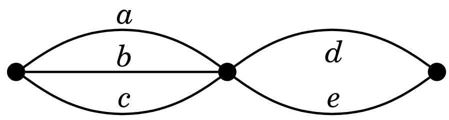
b) Adjuk meg a (primál) feladat maximumértékét!

$\max\{x_1 + 6x_2 - x_4\}$
ha
$2x_2 - 7x_3 - x_4 \leq -1$
$2x_1 + 5x_3 + 3x_4 \geq 6$
$7x_1 + 5x_2 - 4x_4 \leq 0$
$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 1$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

3. Hányféle nemizomorf matroidot reprezentálhat a valós test felett az alábbi mátrix az x különböző választásai mellett? Ahol a matroid grafikus, ott gráffal is adjuk meg!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & x \end{pmatrix}$$

4. Az ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{M}$. Határozzuk meg az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ és az $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ matroidösszegeket! Ahol az összeg grafikus, ott gráffal is adjuk meg!



5. Adjunk 2-approximációs algoritmust a maximális független ponthalmaz keresésének problémájára olyan bemenetek esetére, melyekre a független pontok maximális száma legalább $\frac{2n}{3}$, ahol n a bemeneti gráf csúcsszáma. Az algoritmus működését szemléltessük is a $K_{2,5}$ teljes páros gráfon.

6. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a RÉSZÖSSZEG problémára tanult $(1 + \varepsilon)$-approximációs algoritmust az alábbi bemenetre.

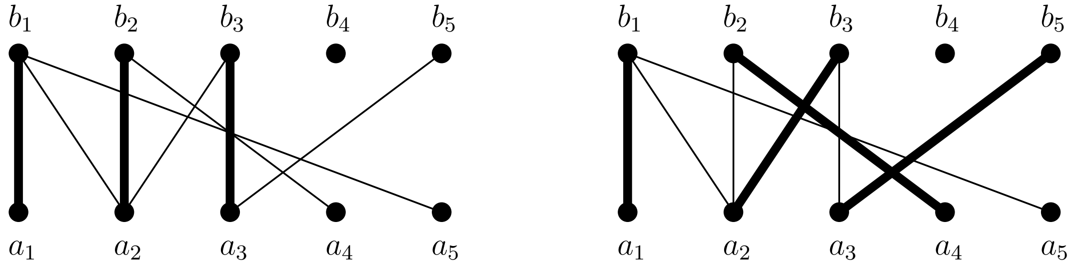
$$2, 6, 7, 14, 28, 44; \quad t = 49; \quad \varepsilon = \frac{1}{2}$$

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. Az algoritmus futása során előálló következő M' párosítás meghatározásához először a „piros éleket” kell megkeresni, vagyis azokat az $e = \{a, b\}$ éleket, amelyekre $w(e) = c(a) + c(b)$ teljesül (ahol $w(e)$ az e él súlyát jelöli). A megadott adatokból könnyen kiolvasható, hogy a piros élek a következők: $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_4, b_2\}$ és $\{a_5, b_1\}$; lásd az alábbi, bal oldali ábrát. (Látszik az is, hogy a megadott M párosítás élei – az ábrán vastag vonallal – is pirosak; ha ez nem volna így, az azt jelentené, hogy az algoritmus korábbi futása hibás volt.)

Ezek után M' meghatározásához M-ből kiindulva futtatni kell a maximális párosítás keresésére szolgáló javító utas algoritmust a piros élek alkotta részgráfban. A párosítatlan F-beli pontok: a_4 és a_5. Látható, hogy a_5-ből nem vezet javító út párosítatlan L-beli pontba (vagyis b_4-be vagy b_5-be), mert a_5-ből piros élen egyedül b_1-be lehet lépni, ennek az M szerinti párjából, a_1-ből viszont nem lehet továbblépni. Ezzel szemben a_4-ből indítva a javítóút keresést hamar sikerrel járunk: az a_4, b_2, a_2, b_3, a_3, b_5 sorrendben bejárva a csúcsokat javítóutat kapunk; ementén javítva a következő párosítást kapjuk: $\{a_4, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_1, b_1\}$ (lásd a jobb oldali ábrát).



Egyelőre nem biztos, hogy ezzel már megkaptuk a keresett M' párosítást, mert előfordulhatna, hogy a most kapott párosítás még nem maximális a piros részgráfban. Azonban nem ez a helyzet: b_4-re nem illeszkedik piros él, így nyilván nincs öt élű párosítás a piros részgráfban. Ezért M' a javítás után kapott fenti négy élből áll.

A következő c' címkézés meghatározásához először meg kell határoznunk az F-beli párosítatlan csúcsokból (jelenleg ez csak a_5-öt jelenti) alternáló úton elérhető L-belieket, illetve ezek F-beli párjait. a_5-ből azonban továbbra is csak b_1-be vezet piros él, ahonnan a_1-be lépve elakadunk, így b_1 az egyetlen ilyen L-beli csúcs (amelynek F-beli párja tehát a_1). Így az algoritmus működési szabálya szerint az $\{a_1, a_5\}$ és $\{b_2, b_3, b_4, b_5\}$ halmazok közti éleket kell vizsgálnunk: ezek mindegyikére ki kell számítani a $c(a) + c(b) - w(e)$ „fölösleget”, majd ezek minimumát kell venni. A feladat adatait felhasználva az a_1-ből induló (és $\{b_2, b_3, b_4, b_5\}$-be menő) élek fölöslegei rendre 2, 3, 2 és 2, az a_5-ből induló élek fölöslegei pedig 2, 2, 2 és 3. Ezeknek a minimuma pedig $\delta = 2$.

Ezek után c' meghatározásához azokon az F-beli csúcsokon kell δ-val csökkenteni a jelenlegi címkézést, amelyek párosítatlanok, vagy amelyeknek a párja altenáló úton elérhető; ezek tehát a_1 és a_5. Hasonlóan, az alternáló úton elérhető L-belieken – vagyis most csak b_1-en – kell δ-val növelni az aktuális címkézést. Így tehát a keresett címkézés:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c'(v)$	:	3	3	5	6	0	4	1	1	0	1

Az 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt (a második egyenlőtlenség (-1)-gyel szorzása után) $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & -1 \\ -2 & 0 & -5 & -3 \\ 7 & 5 & 0 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor a duálist a tanult $\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

$$\begin{aligned}
&\min\{-y_1 - 6y_2 + y_4\}\\
&\text{ha}\\
&-2y_2 + 7y_3 + y_4 \geq 1\\
&2y_1 + 5y_3 + 3y_4 \geq 6\\
&-7y_1 - 5y_2 + 4y_4 \geq 0\\
&-y_1 - 3y_2 - 4y_3 \geq -1\\
&y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

(Megjegyezzük, hogy a primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \leq b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \leq b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 8 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 8 változós lineáris program – amely azonban az előadáson tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal.)

b) A kapott duális feladatot megvizsgálva azonnal látszik, hogy annak az egyenlőtlenségrendszere azonos a primál feladatéval; valóban, a duális 1., 3. és 4. egyenlőtlenségét (-1)-gyel szorozva a primál megfelelő egyenlőtlenségét kapjuk, a 2. egyenlőtlenségek pedig eleve azonosak. Következésképp a primál és a duális megoldáshalmaza is azonos (eltekintve attól, hogy a primál esetében a változókat oszlopvektorban, a duális esetében sorvektorban tároltuk).

A két feladat célfüggvényét összevetve az is látszik, hogy ezek egymás ellentettjei. Azonban könnyen látható (és az előadáson is szerepelt), hogy a $-y_1 - 6y_2 + y_4$ célfüggvény minimalizálása és az $y_1 + 6y_2 - y_4$ célfüggvény maximalizálása (ugyanazon a megoldáshalmazon) egymással ekvivalens feladatok: a két feladat optimumhelyei azonosak, az optimumértékek pedig egymás ellentettjei.

A dualitástétel értelmében a primál feladat maximuma megegyezik a duális minimumával; ebből és a fentiekből következik, hogy primál maximuma sajátmagának az ellentettjével egyenlő. Következésképp a primál feladat maximumértéke 0.

Persze a dualitástétel alkalmazásához még ellenőrizni kell, hogy a primál feladat rendszere valóban megoldható és a célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán. A megoldhatóság könnyen látszik: például az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ és $x_4 = 2$ választással megoldást kapunk. Ebből persze a duális megoldhatósága is következik (hiszen a két megoldáshalmaz most azonos), így a tanult tétel értelmében a primál célfüggvénye felülről korlátos.

Az 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az matroid megismeréséhez azt kell megvizsgálnunk, hogy x különböző értékeire mely oszlophalmazok lineárisan függetlenek. Mivel az oszlopok térvektorok (vagyis $\mathbb{R}^3$-beliek), ezért a négy oszlop együtt nyilván lineárisan összefüggő.

A négy darab háromelemű oszlophalmaz függetlenségének vizsgálata legegyszerűbben talán a megfelelő 3×3-as determinánsok vizsgálatával történhet. Például az $\{a, c, d\}$ halmazra a számítás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & x-4 \end{vmatrix} = 2(x-4),$$

amiből látszik, hogy $\{a, c, d\}$ csak az $x = 4$ esetben összefüggő, minden más x értékre független. A másik három esetben hasonló számítással azt kapjuk, hogy az $\{a, b, c\}$ halmaz mindenképp független, az $\{a, b, d\}$ és a $\{b, c, d\}$ halmaz pedig az $x = 2$ esetben összefüggő, egyébként független. Az is látszik, hogy az $x = 2$ esetben az utóbbi két halmaz azért összefüggő, mert b párhuzamos d-vel.

A fentiek alapján három esetet kell megkülönböztetnünk. Az $x = 2$ esetben $b \parallel d$, de bármely, a b és d elemek közül legföljebb egyet tartalmazó három elemszámú halmaz független. Ezért a matroid grafikus, reprezentálható például egy olyan három élű úttal, amelynek az egyik élét megdupláztuk (és a két párhuzamos él felel meg b-nek és d-nek).

Az $x = 4$ esetben az $\{a, c, d\}$ halmaz összefüggő, de minden más, három elemszámú halmaz független (és így párhuzamos elemek sincsenek). Ezért a matroid megint grafikus, reprezentálható például azzal a négy csúcsú gráffal, amelyet egy háromszögből kapunk úgy, hogy egy negyedik élet „lelógatunk” róla (és ez az él felel meg b-nek).

Végül ha $x \neq 2$ és $x \neq 4$, akkor minden három elemű részhalmaz független, így a matroid $U_{4,3}$-mal izomorf. Ez is grafikus matroid, reprezentálja egy négy élű kör.

Ezek szerint tehát x különböző értékeire háromféle nemizomorf matroidot kaphatunk.

Az 4. feladat megoldása. Az $\mathcal{M}$ matroidban definíció szerint azok a részhalmazok függetlenek, amelyek az $\{a, b, c\}$ és a $\{d, e\}$ halmazból is legföljebb egy-egy elemet tartalmaznak. Az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ matroid függetlenjei tehát azok a részhalmazok, amelyek két ilyen halmaz uniójaként előállhatnak. Ez nyilván nem teljesül az $\{a, b, c\}$ halmazra (hiszen a két egyesítendő részhalmaz mindegyike csak egyet tartalmazhat eközül a három elem közül). Ebből következően (mivel matroidban a függetlenek részhalmazai is függetlenek) a négyelemű részhalmazok közül sem függetlenek azok, amelyek $\{a, b, c\}$-t tartalmazzák (és pláne nem független az $\{a, b, c, d, e\}$ alaphalmaz). Azonban könnyű végiggondolni, hogy az $\{a, b, c\}$-t nem tartalmazó négyeleműek már függetlenek: $\{a, b, d, e\} = \{a, d\} \cup \{b, e\}$, $\{a, c, d, e\} = \{a, d\} \cup \{c, e\}$ és $\{b, c, d, e\} = \{b, d\} \cup \{c, e\}$ (mindhárom esetben az egyenlet jobb oldalán álló kételemű részhalmazok függetlenek $\mathcal{M}$-ben). A fentiekből következik, hogy $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ grafikus matroid: reprezentálja például az az öt csúcsú gráf, amelyet egy háromszögből kapunk úgy, hogy két élet „lelógatunk” róla (és ezek felelnek meg d-nek és e-nek).

Az $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ matroid függetlenjei definícó szerint azok a részhalmazok, amelyek $\mathcal{M}$ egy függetlenjéből legföljebb két további, tetszőleges elem hozzávételével megkaphatók. Az $\{a, b, c, d, e\}$ alaphalmaz így továbbra sem független (hiszen két, legföljebb kételemű részhalmazt egyesítünk), azonban könnyen ellenőrizhető, hogy most már minden négyelemű részhalmaz független. Mivel $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ függetlenjeinek halmaza (definíció szerint) nyilván bővebb a fent vizsgált $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ függetlenjeinek halmazánál, ezért ezt elég a két „hiányzó” négyelemű részhalmazra megvizsgálni: $\{a, b, c, d\} = \{a, d\} \cup \{b, c\}$ és $\{a, b, c, e\} = \{a, e\} \cup \{b, c\}$ (ahol a kéttagú uniókban a baloldali tag $\mathcal{M}$-beli, a jobboldali $U_{5,2}$-beli független). Ezek szerint $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ az $U_{5,4}$ matroiddal izomorf és így grafikus is: reprezentálja egy 5 élű kör.

Az 5. feladat megoldása. Tudjuk, hogy egy csúcshalmaz akkor és csak akkor független, ha a komplementere lefogó. Keressünk a gráfban (például mohón) egy nem bővíthető párosítást. A párosítás végpontjai által alkotott halmaz legyen L. Tudjuk, hogy L lefogó, a komplementere, $\overline{L}$ tehát független. Megmutatjuk, hogy $\overline{L}$ legalább feleakkora, mint a maximális független ponthalmaz (ezzel igazolva, hogy algoritmusunk approximáxiós faktora csakugyan 2, az eljárás polinomialitása nyilvánvaló). Mivel $n - |\overline{L}| = |L| \leq 2\nu(G) \leq 2\tau(G)$, tehát

$$|\overline{L}| \geq n - 2\tau(G) = \alpha(G) - \tau(G) \geq \frac{\alpha(G)}{2} + \frac{\alpha(G)}{2} - \tau(G) \geq \frac{\alpha(G)}{2},$$

felhasználva az $\alpha(G) + \tau(G) = n$ egyenlőséget, a (feladat szövegében adott) $\frac{\alpha(G)}{2} \geq \frac{n}{3}$ egyenlőtlenséget és az ezekből adódó $\tau(G) \leq \frac{n}{3}$ egyenlőtlenséget.

A $K_{2,5}$ teljes páros gráfon való alkalmazáshoz legyenek a csúcsok $K_{2,5}$ egyik osztályában 1 és 2, a másik osztályában A, B, C, D, E. Egy nem bővíthető párosítás 2 élből fog állni, az egyik tartalmazza az 1-et (pl. $1A$), a másik a 2-t (pl. $2B$). Az algoritmus által kimenetként adott ponthalmaz tehát ez esetben a $\{C, D, E\}$ halmaz lesz.

Az 6. feladat megoldása. A tanult módon (eltolásokkal, törlésekkel és összefésülésekkel) elkészítjük a részösszegek listáit, minden fázisban $\delta = \frac{\varepsilon}{2n} = \frac{1}{24}$-del ritkítva. Ez azt jelenti, hogy 24-nél kisebb számok senkit nem tudnak képviselni, a 24 és 47 közti számok a náluk eggyel nagyobbat tudják képviselni, az ennél nagyobb számok tudnának két számot is képviselni, erre azonban nem fog sor kerülni, hiszen 49-nél nagyobb számokat nem veszünk fel a listákba.

$L_0 = \{0\}, L_0' = \{2\}, L_1 = \{0, 2\}$, itt ritkítani nem lehet. $L_1' = \{6, 8\}, L_2 = \{0, 2, 6, 8\}$, ritkítani nem lehet.

$L_2' = \{7, 9, 13, 15\}$, $L_3 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 15\}$, ritkítani nem lehet.

$L_3' = \{14, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29\}$, $L_4 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29\}$, ritkítani továbbra sem lehet.

$L_4' = \{28, 30, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 48, 49\}$, hiszen a 49-nél nagyobb elemeket nem vesszük be a listába.

$L_5 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 30, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 43, 44, 48, 49\}$, itt a ritkítás során töröljük a 28,30,35,37,42,44,49 elemeket, ezt követően tehát

$L_5 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 34, 36, 41, 43, 48\}$.

$L'_5 = \{44, 46\}$, hiszen a 49-nél nagyobb elemeket nem vesszük be a listába.

$L_6 = \{0, 2, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 34, 36, 41, 43, 44, 46, 48\}$. Itt már nem muszáj ritkítani (ha mégis ritkítunk, akkor a 44-et kell törölni), az algoritmus kimenete az utolsó lista legnagyobb eleme, azaz 48.

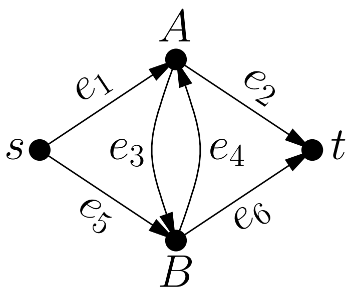
Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2012. április 26.

1. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán!

$\max\{x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4\}$
ha
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 3$
$2x_2 - x_4 = 6$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 8$
$3x_2 - 2x_4 \geq -9$

2. Tekintsük a következő minimális költségű folyam feladatot: az alábbi ábrán látható gráfban keresünk az s-ből t-be menő, legalább 3 értékű folyamok között minimális költségűt, ha minden él kapacitása 2, az élekhez tartozó költségek pedig az alábbi táblázatban láthatók. Írjuk fel ezt a feladatot lineáris programként (vagyis adjunk meg egy olyan lineáris programozási feladatot, amelynek a megoldása ekvivalens a megadott minimális költségű folyam feladattal)!



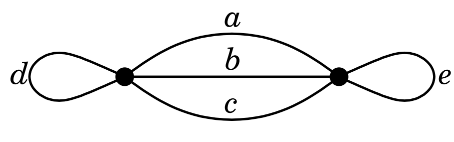
e	:	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
$k(e)$	:	3	3	1	1	5	1

(A folyam feladatot tehát *nem szükséges* megoldani, a feladat csupán a lineáris programként való megfogalmazás.)

3. Hányféle nemizomorf matroidot reprezentálhat a valós test felett az alábbi mátrix az x különböző választásai mellett? Ahol a matroid grafikus, ott gráffal is adjuk meg!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & x \end{pmatrix}$$

4. Az ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{M}$. Határozzuk meg az $\mathcal{M} \vee \mathcal{M}$ és az $\mathcal{M} \vee U_{5,2}$ matroidösszegeket! Ahol az összeg grafikus, ott gráffal is adjuk meg!



5. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a Steiner-fa problémára tanult 2-approximációs algoritmust az alábbi bemenetre. A G gráf legyen teljes gráf az 1,3,5,7,9,11 csúcsokon, az (i, j) él súlya legyen $i + j - 3$, T pedig legyen az $\{5, 7, 9, 11\}$ halmaz.

6. Bizonyítsuk be, hogy a $Pm||C_{\max}$ feladatra az LPT ütemezés approximációs faktora nem rosszabb, mint $\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}$.

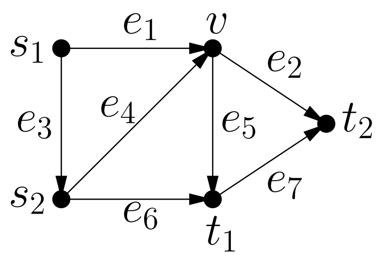
A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2013. április 22.

1. Írjuk fel a jobbra látható lineáris egyenlőtlenségrendszert $Ax \leq b$ alakban, majd bizonyítsuk be a Farkas-lemma felhasználásával, hogy a rendszer nem megoldható! (Vagyis adjunk meg egy vektort és mutassuk meg róla, hogy ez a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer megoldhatatlanságát!)

$$7x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 5x_4 \geq 1$$
$$x_1 - 8x_4 = 5$$
$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 1$$
$$x_1 + x_3 - 3x_4 \leq 1$$

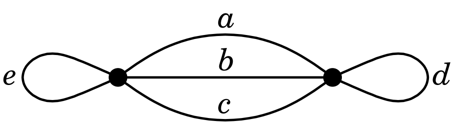
2. Tekintsük a következő kéttermékes folyamfeladatot: maximalizálandó az összfolyamérték a jobbra látható ábra hálózatában, ha az első, illetve a második termékhez tartozó termelő és fogyasztó pontok s_1 és t_1, illetve s_2 és t_2, továbbá az e_1, e_5 és e_6 élek kapacitása 2, a többi él kapacitása 1. Írjuk fel ezt a feladatot lineáris programként (vagyis adjunk meg egy olyan lineáris programozási feladatot, amelynek a megoldása ekvivalens a megadott kéttermékes folyam feladattal)! A keresett lineáris programot *ne* mátrixos alakban adjuk meg, hanem vezessünk be a feladat szempontjából releváns változókat és ezek segítségével írjuk fel. (A folyam feladatot tehát *nem szükséges* megoldani, a feladat csupán a lineáris programként való megfogalmazás.)

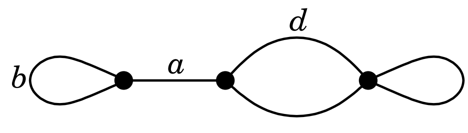


3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}_x$ matroidot. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{M}_x$ az x minden nemnegatív értéke esetén grafikus. Igaz-e ugyanez az állítás x negatív értékeire is?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & x & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Az alábbi két gráf az $\{a, b, c, d, e\}$ halmazon két grafikus matroidot definiál, azonban a második gráf két éléről „véletlenül" lemaradt a c, illetve az e betű. Eldönthető-e azért, hogy a két matroid összege grafikus-e?





5. Adjunk olyan 2-approximációs algoritmust egy összefüggő gráf maximális élszámú páros részgráfjának keresésére, amely páros gráf bemenetekre optimális megoldást ad. Az algoritmus működését szemléltessük is egy tetszőleges összefüggő, 8 csúcsú, 8 élű, nem páros, egyszerű gráfon.

6. Igaz-e, hogy a Steiner-fa probléma polinom időben megoldható, ha a Steiner-pontok halmaza legfeljebb $2 \log n$ elemű, ahol n a gráf csúcsainak száma?

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. A rendszer mátrixos alakja $Ax \le b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -9 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ -1 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A Farkas-lemma értelmében az $Ax \le b$ megoldhatatlanságát egy olyan $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ sorvektor bizonyítja, amelyre $yA = 0$, $y \ge 0$ és $yb < 0$. Ezt részletesen kiírva a következő feltételeket kapjuk:

$$\begin{array}{lr} (1) & -7y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 = 0 \\ (2) & 3y_1 - y_4 = 0 \\ (3) & -9y_1 + y_4 + y_5 = 0 \\ (4) & 5y_1 - 8(y_2 - y_3) - y_4 - 3y_5 = 0 \\ (5) & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_5 \ge 0 \\ (6) & -y_1 + 5(y_2 - y_3) + y_4 + y_5 < 0 \end{array}$$

Legyen $y_1 = \alpha$ valamilyen $\alpha \ge 0$ értékre. Ekkor (2)-ből $y_4 = 3\alpha$. Ezt felhasználva (3)-ból $y_5 = 6\alpha$. Ezekből és (1)-ből $y_2 - y_3 = -2\alpha$. Ha viszont $y_1, \dots, y_5$ értékeit úgy választjuk, hogy az eddig kapott feltételeknek (és $y_2, y_3 \ge 0$-nak) megfeleljenek, akkor ezekből már (4) és (6) automatikusan teljesül: erről egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk (utóbbi esetben (-2α) a kifejezés értéke). Így a rendszer megoldhatatlanságát bizonyítja a Farkas-lemma értelmében minden, a fenti feltételeknek megfelelő vektor, például $y = (1, 0, 2, 3, 6)$.

Az 2. feladat megoldása. A többtermékes folyamfeladat tanult definíciója szerint minden élhez 2 változót kell bevezetnünk: jelölje x_{1i} az e_i élen az 1-es termékből (s_1-ből t_1-be) menő folyam mennyiségét és hasonlóan x_{2i} jelölje a 2-es termékből e_i-n folyó mennyiséget. Ezek a változók természetesen mind nemnegatívak: $x_{ij} \ge 0$ minden $1 \le i \le 2$ és $1 \le j \le 7$ esetén.

Valójában a 14 változó közül a „folyam megmaradási” feltételek miatt 4 értéke garantáltan 0: $x_{21} = x_{23} = x_{12} = x_{17} = 0$ (hiszen például s_1-be nem lép be él, így az s_1-ből kimenő éleken a 2-es termékből nem mehet pozitív folyam). Ezzel az s_1 és t_2 csúcsokra vonatkozó megmaradási feltételek már teljesülnek is (hiszen s_1-nél az első termékre, t_2-nél a másodikra nincs ilyen feltétel). A többi csúcsra viszont fel kell írnunk a megmaradási feltételeket: v-nél $x_{12} + x_{15} - x_{11} - x_{14} = 0$ és $x_{22} + x_{25} - x_{21} - x_{24} = 0$, s_2-nél $x_{16} + x_{14} - x_{13} = 0$, továbbá t_1-nél $x_{27} - x_{25} - x_{26} = 0$.

Végül minden élre fel kell írnunk a rá vonatkozó kapacitás feltételt: $x_{11} + x_{21} \le 2$, $x_{12} + x_{22} \le 1$, $x_{13} + x_{23} \le 1$, $x_{14} + x_{24} \le 1$, $x_{15} + x_{25} \le 2$, $x_{16} + x_{26} \le 2$, $x_{17} + x_{27} \le 1$.

Ezzel a folyamértékekre vonatkozó összes feltételt felírtuk, már csak a célfüggvény van hátra: a két folyam nagyságát s_1-nél, illetve s_2-nél mérve, maximalizálandó az $x_{11} + x_{13} + x_{24} + x_{26} - x_{23}$ kifejezés értéke.

Az 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az $\mathcal{M}_x$ matroid megismeréséhez azt kell megvizsgálnunk, hogy (x különböző értékeire) mely oszlophalmazok lineárisan függetlenek. Mivel az oszlopok térvektorok, együttesen nyilván lineárisan összefüggők. Sőt, már az $\{a, c, d\}$ halmaz is összefüggő – amiről legegyszerűbben az általuk alkotott 3×3-as mátrix determinánsának kiszámításával győződhetünk meg (ugyanis ez 0). Hasonlóan, az $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, illetve $\{b, c, d\}$ halmazoknak megfelelő determinánsokat kiszámítva sorban a $-3x - 3$, a $-x - 1$, illetve a $-5x - 5$ értékeket kapjuk. Így tehát az $x = -1$ értékre ezek mind összefüggőek, $x \ne -1$ esetén viszont egyikük sem. Következésképp $x \ne -1$ esetén (és így minden nemnegatív x-re) $\mathcal{M}_x$ grafikus: reprezentálja az a gráf, amelyben $\{a, c, d\}$ háromszöget alkotnak és b erről „lelóg”. Az $x = -1$ esetben viszont $\mathcal{M}_x$ az $U_{4,2}$-vel izomorf, így nem grafikus (vagyis az állítás negatív x-ekre nem mindig igaz).

Az 4. feladat megoldása. Jelölje sorrendben $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ a két gráf körmatroidját. Az $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ összegmatroid rangja biztosan 3 lesz: ekkora független halmazt nyilván kaphatunk egy $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$-beli uniójaként (például: $\{a, b, d\} = \{b\} \cup \{a, d\}$ vagy $\{a, c, d\} = \{c\} \cup \{a, d\}$), de nagyobbat biztosan nem (mert $\mathcal{M}_1$ rangja 1, $\mathcal{M}_2$-é 2).

A feladat kérdésének megválaszolásához csak két esetet kell megvizsgálnunk: az elsőben e hurokél és c párhuzamos d-vel, a másodikban fordítva. Mindkét esetben elég megtalálnunk a bázisokat, vagyis a 3 elemű függetleneket.

Az első esetben $\{e\}$ összefüggő (vagyis e hurok), mert mindkét matroidban az. Maradnak tehát az $\{a, b, c, d\}$ három elemű részhalmazai. Ezek közül $\{b, c, d\}$ összefüggő: d $\mathcal{M}_1$-ben hurok, ezért őt $\mathcal{M}_2$-ből kellene kiválasztani és hasonló okokból b-t $\mathcal{M}_1$-ből – de akkor c-t már egyikből sem választhatjuk ki. Viszont $\{a, b, c, d\}$ többi három elemű részhalmaza már független $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$-ben: $\{a, b, d\}$-ről és $\{a, c, d\}$-ről ezt már fentebb láttuk, továbbá $\{a, b, c\} = \{b\} \cup \{a, c\}$. Mindez azt mutatja, hogy $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ grafikus: reprezentálja egy olyan gráf, amelyben $\{b, c, d\}$ háromszöget alkot, a erről "lelóg", e pedig hurokél.

A második esetben már a 2 elemű halmazok sem mind függetlenek: $\{b, c\}$ és $\{d, e\}$ is összefüggő, mert b és c $\mathcal{M}_2$-ben hurkok és $\mathcal{M}_1$-ben kört alkotnak, d és e esetében pedig fordítva. Így a bázisok csak olyan három elemű halmazok lehetnek, amelyek $\{b, c\}$-ből és $\{d, e\}$-ből egy-egy elemet, valamint még a-t tartalmazzák. Az ilyen halmazok viszont mind függetlenek is: $\{a, b, d\}$-ről és $\{a, c, d\}$-ről ezt már fentebb láttuk, továbbá $\{a, b, e\} = \{b\} \cup \{a, e\}$ és $\{a, c, e\} = \{c\} \cup \{a, e\}$. Így $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ ebben az esetben is grafikus: reprezentálja például egy olyan hatpontú gráf, mely a $\{b, c\}$, illetve $\{d, e\}$ párhuzamos élpárok és az a él pontdiszjunkt uniója.

Vagyis $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$ mindenképp grafikus.

Az 5. feladat első megoldása. A gráf csúcsait sorban, egyesével két osztályba soroljuk az órán tanult algoritmus szerint, azaz egy újonnan érkező csúcsot abba az osztályba helyezünk, ahol kevesebb (nem több) szomszédja van. Láttuk, hogy ez az algoritmus 2-approximációs. Ha a csúcsokat olyan sorrendben vesszük, hogy az aktuálisan már elhelyezett csúcsok mindig összefüggő részgráfot alkossanak, akkor az egy osztályba kerülő csúcsok közt lesz (páros hosszú) út a gráfban, így semelyik kettő nem lehet szomszédos, ekkor ugyanis lenne a gráfban páratlan kör, ami páros gráfban lehetetlen. Ebben a sorrendben véve tehát a csúcsokat, minden él bekerül a páros részgráfba, így a kapott megoldás optimális lesz. Azt kell még belátnunk, hogy a kérdéses típusú sorrend létezik és előállítható polinom időben: például szélességi vagy mélységi kereséssel is ilyen sorrendhez jutunk.

Az 5. feladat második megoldása. Egyszerűbb megoldás, ha először ellenőrizzük, hogy a kapott gráf páros-e (szélességi kereséssel, polinom időben). Ha igen, akkor a kimenet maga a gráf lesz, ellenkező esetben az órán tanult algoritmusok valamelyikét (pl. az első megoldásban leírtat) hajtjuk végre. Páros gráfokra optimális, más gráfokra 2-közelítő algoritmust kapunk, ami nyilván polinom időben fut.

Az 6. feladat megoldása. Legyen a Steiner-pontok halmaza S, a terminálok halmaza T, az optimális Steiner-fa F. F tartalmazza T minden csúcsát és S csúcsainak egy R részhalmazát (ami lehet üres is). A $T \cup R$ halmazok által feszített részgráfokon minimális feszítőfát keresve tehát megtaláljuk az F fát vagy egy másik, vele azonos súlyú Steiner-fát. A szóbajövő R halmazok száma $2^{|S|} = n^2$, ami a bemenet méretében polinomiális, az egyes esetek lépésszáma pedig (pl. a Kruskal-algoritmust használva) szintén polinomális. A kapott fák közül a minimális összsúlyút véve tehát polinomiális algoritmust kapunk a legkisebb költségű Steiner-fa meghatározására.

Rendszeroptimalizálás
Pótzárthelyi feladatok
2013. május 2.

1. a) Írjuk fel az alábbi lineáris programozási feladat duálisát a t valós paraméter minden értékére. (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

b) A t paraméter milyen értékeire lesz a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos a megoldáshalmazán?

$$\begin{aligned}
&\max\{x_4\}\\
&\text{ha}\\
&3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 4\\
&2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \ge 1\\
&x_3 + 2x_4 \le 1\\
&x_2 - 2x_3 + t \cdot x_4 \ge -2
\end{aligned}$$

2. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy igazak-e minden A totálisan unimoduláris mátrixra!

a) Ha A-hoz hozzáveszünk egy csupa 1-eseket tartalmazó oszlopot, a kapott mátrix is totálisan unimoduláris lesz.

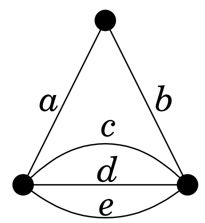
b) Ha A minden $(+1)$-es elemét kicseréljük (-1)-esre és minden (-1)-es elemét kicseréljük $(+1)$-esre, a kapott mátrix is totálisan unimoduláris lesz.

c) Ha A valamelyik nemnulla elemét kicseréljük 0-ra, a kapott mátrix is totálisan unimoduláris lesz.

3. Mely x, y valós értékekre lesz az alábbi mátrix oszlopvektorai által a valós test fölött koordinátázott matroid grafikus? Ahol grafikus lesz, ott adjuk is meg egy-egy gráfreprezentációját!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & x & y \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi gráf által reprezentált matroid önmagával való összegét. Ha az összeg grafikus, adjuk meg gráffal; ha nem, bizonyítsuk ezt be.



5. Mutassuk meg, hogy a metrikus utazóügynök probléma NP-nehéz.

6. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a részösszeg problémára tanult $(1+\varepsilon)$-approximációs algoritmust a $2, 5, 6, 7, 10,\ \ t = 20$ bemenetre $\varepsilon = 1$ mellett.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.

Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2014. április 14.

1. A $G(F, L; E)$ teljes páros gráf két színosztálya legyen $F = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ és $L = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Az a_i-t a b_j-vel összekötő él súlya legyen a balra látható mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem (minden $1 \leq i, j \leq 5$ esetén). A maximális összsúlyú teljes párosítást kereső Egerváry-algoritmust valaki már elkezdte futtatni G-re és ott tart, hogy az aktuális M párosítás az $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$ és $\{a_3, b_3\}$ élekből áll, az aktuális c címkézés pedig a jobb oldali táblázatban látható. Fejezzük be az algoritmus futtatását és adjuk meg az eredményként kapott maximális összsúlyú teljes párosítást!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c(v)$	:	1	5	4	7	3	1	0	2	0	1

(A megoldásban ne csak az algoritmus futásának az eredményét adjuk meg, hanem dokumentáljuk is a lépéseket – vagyis adjunk meg minden, a futás közben keletkező adatot.)

2. a) Írjuk fel a jobbra látható lineáris programozási feladat duálisát! (A felírás hasonló alakú legyen, mint a primál feladat felírása, vagyis *ne* mátrixos alakot használjunk.)

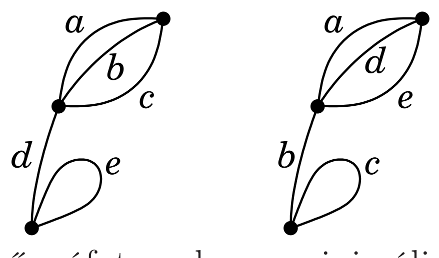
b) Döntsük el, hogy a (primál) feladat célfüggvénye felülről korlátos-e a megoldáshalmazán!

$\max\{x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4\}$
ha
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5$
$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \geq 3$
$x_1 + 5x_2 - x_4 \leq 6$
$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 10$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

3. Az alábbi mátrix jobb alsó sarkában álló elem olyan kétjegyű szám, melynek második jegye „sajnos” elmosódott. Meg lehet-e azért határozni, hogy milyen matroidot koordinátáz ez a mátrix a valós test felett?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1\blacksquare \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalin láthatóé $\mathcal{B}$. Grafikusak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok?



5. Adjunk meg olyan 10 csúcsú, 10 élű egyszerű, összefüggő gráfot, melyre a minimális lefogó ponthalmaz problémára tanult 2-approximációs algoritmusok soha nem adnak optimális eredményt (és igazoljuk, hogy a gráf csakugyan rendelkezik a kívánt tulajdonsággal).

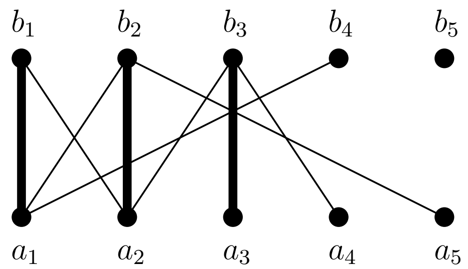
6. Egy négyzet egyik átlóját osszuk három pont segítségével négy egyenlő részre. Legyenek a G teljes gráf csúcsai a négyzet csúcsai és az átlón lévő három pont (G-nek tehát összesen hét csúcsa van), minden él súlya legyen azonos végpontjainak távolságával. Hajtsuk végre és dokumentáljuk a G gráfra az utazóügynök probléma közelítésére szolgáló Christofides-algoritmust.

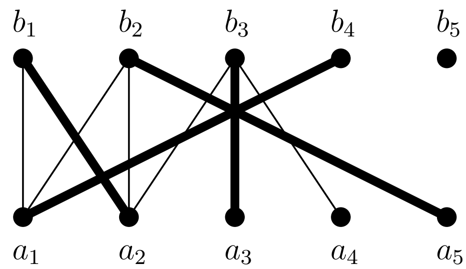
A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**

A zárthelyi feladatok megoldása

Az 1. feladat megoldása. A megadott címkézéshez tartozó „piros élek” meghatározásával kezdjük – vagyis azokat az $e = \{a, b\}$ éleket keressük, amelyekre $w(e) = c(a) + c(b)$ (ahol $w(e)$ az e él súlyát jelöli). Ezek a következők: $\{a_1, b_1\}$, $\{a_1, b_2\}$, $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, $\{a_2, b_3\}$, $\{a_3, b_3\}$, $\{a_4, b_3\}$ és $\{a_5, b_2\}$; lásd az alábbi, bal oldali ábrát. (Látszik, hogy a megadott M párosítás élei – az ábrán vastag vonallal – is pirosak; ha ez nem így volna, az azt jelentené, hogy az algoritmus korábbi futása hibás volt.)

Most M-ből kiindulva a maximális párosítás keresésére szolgáló javító utas algoritmust futtatjuk a piros élek alkotta részgráfban. A párosítatlan F-beli pontok: a_4 és a_5. Látható, hogy a_4-ből nem vezet javító út párosítatlan L-beli pontba (vagyis b_4-be vagy b_5-be), mert a_4-ből piros élen egyedül b_3-ba lehet lépni, ennek az M szerinti párjában, a_3-ban pedig elakadunk. Viszont a_5-ből indítva a javítóút keresést sikerrel járunk: az a_5, b_2, a_2, b_1, a_1, b_4 sorrendben bejárva a csúcsokat javítóutat kapunk; ementén javítva a következő párosítást kapjuk: $\{a_5, b_2\}$, $\{a_2, b_1\}$, $\{a_1, b_4\}$, $\{a_3, b_3\}$ (lásd a jobb oldali ábrát).



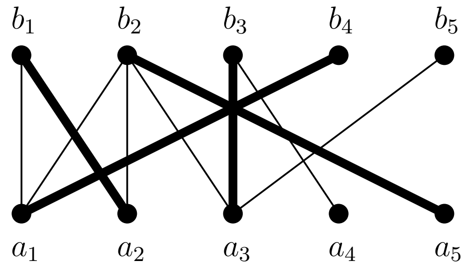


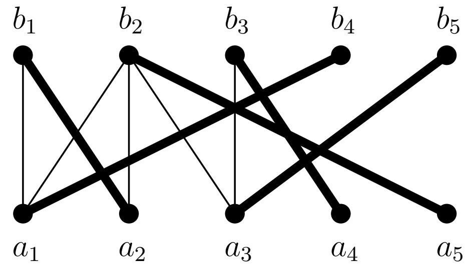
A most kapott M' párosítás maximális a (jelenlegi) piros részgráfban, mert b_5-re nem illeszkedik piros él, így nyilván nincs öt élű párosítás. Ezért áttérünk a következő c' címkézés meghatározására. A párosítatlan F-beli, illetve L-beli csúcsok halmaza $F_1 = \{a_4\}$ és $L_1 = \{b_5\}$. Az F_1-ből alternáló úton elérhető L-beliek halmaza $L_2 = \{b_3\}$, mert a_4-ből továbbra is csak b_3-ba vezet piros él, ahonnan a_3-ba lépve elakadunk. Az L_2-beliek M' szerinti párjainak halmaza tehát $F_2 = \{a_3\}$. Így a maradék F-beliek, illetve L-beliek halmaza $F_3 = \{a_1, a_2, a_5\}$, illetve $L_3 = \{b_1, b_2, b_4\}$. Az algoritmus működési szabálya szerint az $F_1 \cup F_2 = \{a_3, a_4\}$ és az $L_1 \cup L_3 = \{b_1, b_2, b_4, b_5\}$ halmazok halmazok közti élek mindegyikére ki kell számítani a $c(a) + c(b) - w(e)$ „fölösleget”, majd ezek minimumát kell venni. A feladat adatait felhasználva az a_3-ból induló (és $L_1 \cup L_3$-ba menő) élek fölöslegei rendre 3, 2, 3 és 2, az a_4-ből induló élek fölöslegei pedig 4, 3, 4 és 3. Ezeknek a minimuma pedig $\delta = 2$.

Ezek után a következő c' címkézés meghatározásához $F_1 \cup F_2$ elemein δ-val csökkenteni, L_2 elemein pedig δ-val növelni kell a jelenlegi címkézést. Így c' a következő:

v	:	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
$c'(v)$	:	1	5	2	5	3	1	0	4	0	1

Ezzel az algoritmus teljes ciklusát végrehajtottuk, ismét a (most már c'-höz tartozó) piros élek meghatározásával folytatjuk. A fenti ábrákon látható piros részgráfhoz képest három változás történik: $\{a_2, b_3\}$ megszűnik pirosnak lenni, viszont $\{a_3, b_2\}$ és $\{a_3, b_5\}$ új piros élek (lásd az alábbi, bal oldali ábrát). (Ezek a változások egyrészt c'-ből és a megadott élsúlyokból közvetlenül is kiolvashatók, de a fentiekből is következik: $\{a_2, b_3\}$ volt az egyetlen F_3 és L_2 közötti él, a δ meghatározásakor pedig a minimum az $\{a_3, b_2\}$ és $\{a_3, b_5\}$ éleken vétetett föl.) Az új piros részgráfban könnyen találunk az M'-re nézve javító utat: a_4, b_3, a_3, b_5. Ementén javítva M'-t pedig már teljes párosítást kapunk: $\{a_4, b_3\}$, $\{a_3, b_5\}$, $\{a_1, b_4\}$, $\{a_2, b_1\}$ és $\{a_5, b_2\}$ (lásd a jobb oldali ábrát). Így ezzel (illetve a fenti c' címkézéssel) áll meg az algoritmus futása.





A 2. feladat megoldása.

a) A megadott lineáris programban a változók nemnegativitása is szerepel a feltételek között, ezért érdemes azt $\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\}$ alakúnak tekinteni, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Amint látható, a feltételek között szereplő egyenletet helyettesítettük az $x_1+3x_2+2x_3-2x_4 \le 5$ és a $-x_1-3x_2-2x_3+2x_4 \le -5$ egyenlőtlenségekkel, illetve a következő egyenlőtlenséget is megszoroztuk (-1)-gyel. Most a duálist a tanult $\min\{yb : yA \ge c, y \ge 0\}$ alakban írhatjuk. Ezt részletezve:

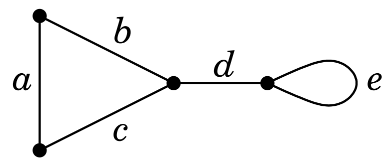
$$\min\{5y_1 - 5y_2 - 3y_3 + 6y_4 + 10y_5\}$$
ha
$$y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 + 2y_5 \ge 1$$
$$3y_1 - 3y_2 + 4y_3 + 5y_4 + y_5 \ge 1$$
$$2y_1 - 2y_2 + y_3 + y_5 \ge 3$$
$$-2y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 - y_5 \ge -2$$
$$y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 \ge 0, y_5 \ge 0$$

(Megjegyezzük, hogy a primál feladatot felfoghatjuk $\max\{cx : Ax \le b\}$ alakúnak is és erre használhatjuk a duális eredeti definíció szerinti alakját, vagyis a $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alakot. Ekkor a változók nemnegativitását előíró négy egyenlőtlenség is az $Ax \le b$ rendszer része, vagyis A-nak és b-nek 9 sora van. Ennek megfelelően a duális egy 9 változós lineáris program – amely azonban az előadáson tanultak szerint ekvivalens a fent kapottal.)

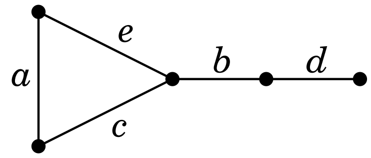
b) A primál feladat rendszere megoldható, például az $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ választással. Ha a célfüggvénye felülről korlátos volna a megoldáshalmazán, akkor a dualitástétel szerint a duális feladat egyenlőtlenségrendszere is megoldható volna . Ez azonban jól láthatóan nem igaz: az utolsó egyenlőtlenség (-1)-gyel szorzás után $2y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \le 2$, ami nyilván ellentmond a $2y_1 - 2y_2 + y_3 + y_5 \ge 3$ és az $y_4 \ge 0$ feltételeknek. Így a primál célfüggvénye nem felülről korlátos a megoldáshalmazán.

A 3. feladat megoldása. Jelölje a mátrix oszlopait sorban a, b, c és d. Az ezek által koordinátázott $\mathcal{M}$ matroid rangja nyilván legföljebb 3 (hiszen négy $\mathbb{R}^3$-beli vektor nem lehet lineárisan független). A négy lehetséges oszlophármas lineáris függetlenségét legegyszerűebben a megfelelő 3×3-as determinánsok kiszámításával lehet eldönteni. Ha a mátrix jobb alsó sarkában álló elemet x-szel jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy az $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, illetve $\{b, c, d\}$ oszlopok által alkotott determinánsok értéke rendre 1, $x - 7$, (-5), illetve 2. Mivel $x - 7 = 0$ lehetetlen (hiszen $x \ge 10$), ezért egyik determináns értéke sem 0, így bármely három oszlop lineárisan független. Következésképp $\mathcal{M}$ az elmosódott jegy értékétől függetlenül az $U_{4,3}$ uniform matroiddal izomorf.

A 4. feladat megoldása. Az $\mathcal{A}$ matroidban definíció szerint azok a részhalmazok függetlenek, amelyek az $\{a, b, c\}$ halmazból legföljebb egy elemet tartalmaznak és emellett tartalmazhatják még d-t. Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ függetlenjei tehát azok a részhalmazok, amelyek két ilyen halmaz uniójaként előállhatnak. Így az e elem $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$-ban is hurok (vagyis az egyelemű $\{e\}$ részhalmaz összefüggő) és összefüggő $\{a, b, c\}$ is. Függetlenek viszont az $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ és a $\{b, c, d\}$ részhalmazok. Következésképp $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$ grafikus, reprezentálja például az alábbi gráf.



Hasonlóan az $\mathcal{A}$-hoz, $\mathcal{B}$ függetlenjei azok a részhalmazok, amelyek az $\{a, d, e\}$ halmazból legfeljebb egy elemet tartalmaznak és emellett tartalmazhatják még b-t. Az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ meghatározásához tehát ezeknek és az $\mathcal{A}$ függetlenjeinek az unióját kell képezni. Rögtön látszik, hogy $\{a, c, e\}$ összefüggő lesz $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$-ben, mert a, c és e közül bárhogyan kettőt választva $\mathcal{A}$-ban és $\mathcal{B}$-ben is összefüggő halmazt kapunk. Független viszont mind a három olyan 4 elemű részhalmaz, amely $\{a, c, e\}$-t nem tartalmazza: $\{a, b, c, d\} = \{c, d\} \cup \{a, b\}$, $\{a, b, d, e\} = \{a, d\} \cup \{b, e\}$ és $\{b, c, d, e\} = \{c, d\} \cup \{b, e\}$ (ahol mindhárom esetben az unióban balra egy $\mathcal{A}$-beli, jobbra egy $\mathcal{B}$-beli függetlent írtunk). Következésképp $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ is grafikus, reprezentálja például az alábbi gráf.



Az 5. feladat megoldása. Mivel mindkét tanult algoritmus egy (nem bővíthető) párosítás végpontjait adja kimenetként, a kimenet mindig páros számú csúcsból áll. Ha az optimum értéke páratlan, akkor tehát egyik algoritmus sem adhatja ezt. Olyan 10 csúcsú, 10 élű egyszerű, összefüggő G gráfot, melyre $\tau(G) = 3$ nem nehéz adni: legyen például G egy háromszög, melynek A, B, C csúcsaihoz rendre 3,2,2 további csúcs csatlakozik egy-egy éllel. Könnyen látható, hogy ekkor A, B, C lefogó ponthalmaz és hogy 2 elemű lefogó ponthalmaz nincs G-ben.

A 6. feladat megoldása. Legyenek a négyzet csúcsai A, B, C, D, az AC átlón lévő pontok (A-tól vett távolság szerint növő sorrendben) E, F, G. Az algoritmus először minimális összköltségű feszítőfát keres (például) Kruskal algoritmusával, azaz kiválasztja először az AE, EF, FG, GC éleket (valamilyen sorrendben), majd a BF, DF éleket (szintén tetszőleges sorrendben), mivel ezek a legrövidebbek azok közül, amik a már meglévőkkel együtt nem alkotnak kört. Következő lépésben az így kapott feszítőfa páratlan fokú csúcsai által feszített részgráfban kell minimális összsúlyú párosítást találnunk. A páratlan fokú csúcsok A, B, C, D, a minimális összsúlyú teljes párosítás tehát az AB, CD vagy pedig az AD, BC élekből áll. (Álljon mondjuk az AD, BC élekből). A feszítőfa és a párosítás éleinek uniójaként kapott részgráf egy Euler-körsétájának megkeresése, majd a tanult módszer szerint Hamilton-körré való levágása van hátra. Az Euler-körséta lehet pl. $A, D, F, B, C, G, F, E, A$, ekkor az első és egyetlen levágás a $G - F - E$ út GE éllel való helyettesítése lesz. A kapott Hamilton-kör ekkor tehát A, D, F, B, C, G, E, A.

Rendszeroptimalizálás
Zárthelyi feladatok
2014. április 30.

1. Mutassuk meg a Farkas-lemma segítségével, hogy az alábbi lineáris egyenletrendszernek nincs olyan megoldása, amelyben mind az öt változó értéke nemnegatív. (Vagyis adjunk meg egy olyan vektort, amely a Farkas-lemma értelmében bizonyítja a rendszer nemnegatív számokkal való megoldhatatlanságát.)

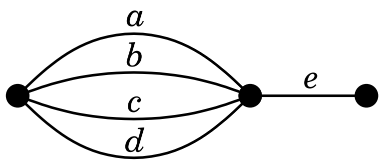
$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_3 - 21x_4 &= 6 \\ 7x_2 + x_3 - 14x_5 &= 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 9x_4 + 10x_5 &= 2 \end{aligned}$$

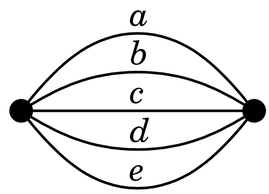
2. Legyenek adottak a számegyenesen az $I_1 = [1;2]$, $I_2 = [1;3]$, $I_3 = [1;4]$, $I_4 = [1;5]$, $I_5 = [2;4]$, $I_6 = [2;5]$ és $I_7 = [3;5]$ zárt intervallumok. Adjuk meg ennek az intervallumrendszernek egy olyan színezését 2 színnel, amely megfelel az intervallumrendszerek egyenletes színezéséről tanult tétel feltételeinek (és mutassuk meg, hogy a megadott színezés valóban megfelel a feltételeknek).

3. Koordinátázza az alábbi mátrix a valós számok teste fölött az $\mathcal{M}_{p,q}$ matroidot. Mely p, q értékekre lesz ez a matroid grafikus? A grafikus esetekben adjuk is meg a gráfreprezentációt!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & p & -1 \\ 0 & 2 & q & 2 \end{pmatrix}$$

4. A bal oldali ábrán látható gráf körmatroidja legyen $\mathcal{A}$, a jobb oldalin láthatóé $\mathcal{B}$. Grafikusak-e az $\mathcal{A} \vee \mathcal{A}$, illetve az $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ matroidok?





5. Tekintsük az {a,b,c,d,e,g,h,i,j,l,m,n,o,r,s,t,v,z} betűhalmazt, és az elemeiből képzett alábbi szavakat, mint részhalmazokat (a szavak utáni zárójelben lévő szám jelenti az adott halmaz költségét):

`zach (3), evan (4), josh (4), gavin (5), monica (5),`
`thomas (5), jared (6), dinesh (6), erlich (7), bighead (8).`

Hajtsuk végre ezen adatokkal az alaphalmaz részhalmazokkal történő lefedésére szolgáló, előadáson tanult közelítő algoritmust.

6. Egy $2n$ csúcsú élsúlyozott teljes gráfban minden élsúly 1 vagy 2 és minden csúcsra legfeljebb $n-1$ darab 2 súlyú él illeszkedik. Adjunk polinomiális algoritmust, mely talál egy legfeljebb $3n$ súlyú kört a gráfban.

A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható. A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Nem szükséges minden feladatot külön lapra írni, de kérjük, hogy a beadott dolgozat **szétválasztható legyen 3 részre: az 1-es/2-es, a 3-as/4-es, illetve az 5-ös/6-os feladatpárokra.**