**1. Feladat (2+6+3=11 pont)**

(a) Adja meg a numerikus sorok konvergenciájára tanult szükséges feltételt!

(b) Előző állítását bizonyítsa be!

(c) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{9n}}$$

**2. Feladat (5+5=10 pont)**

Számolja ki az alábbi limeszeket, amennyiben léteznek!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{2n} = ?\quad (n \in \mathbb{N})$ (b) $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln(4x)?\quad (x \in \mathbb{R})$

**3. Feladat (6+5+5=16 pont)**

(a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = ?$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = ?$ (c) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = ?$

**4. Feladat (9 pont)**

$$y'(x) = \sqrt{y^2(x) + 6xy(x) + 9x^2 + 1} - 3$$

Alkalmas helyettesítéssel adja meg a fenti differenciálegynelet általános megoldását! (Segítség: a gyökjel alatt alakítson teljes négyzetté.)

**5. Feladat (3+3+6=12 pont)**

(a) Mikor mondjuk, hogy az $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor *egyneletesen konvergens az* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallumon*? (Mondja ki a definíciót!)

(b) Mondja ki a függvénysorok egyenletes konvergenciájáról tanult *Weierstrass-tételt*!

(c) Egyenletesen konvergens-e az $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ intervallumon a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ függvénysor? (Állítását bizonyítsa be!)

**6. Feladat (4+6=10 pont)**

Határozza meg a következő függvények adott $x_0$ középpontú Taylor-sorát, valamint a Taylor-sorok konvergneciasugarát!

(a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$; (b) $g(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$.

**7. Feladat * (13 pont)**

$$g(x, y) = (2x - y)^2 + 4x^3 - 6y$$

Hol és milyen jellegű lokális szélsőértékei vannak a fenti függvénynek?

**8. Feladat * (11 pont)**

Legyen $T$ az $O(0,0)$, $A(3,0)$, $B(3,2)$ és a $C(1,2)$ pontok által meghatározott trapéz!

$$\iint_T \mathrm{e}^{5y-2x}\,\mathrm{d}T = ?$$

**9. Feladat * (2+6=8 pont)**

Legyen $g$ differenciálható függvény, melyre $g$ és $g'$ is Fourier-transzformálható!

(a) Adja meg az $\mathcal{F}[g']$ Fourier-transzformáltat $\mathcal{F}[g]$ segítségével!

(b) Bizonyítsa be az előző formulát!

---

A $*$-al jelölt feladatokból legalább 12 pontot el kell érni!