Valószínűségszámítás vizsga megoldása
Műszaki informatika szak
2011. január 13.

1. Legyen az X és Y együttes eloszlásfüggvénye:
$F_{X,Y}(x,y) = x^3y,\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$
Mennyi a $\mathbf{P}(X \le Y)$ valószínűség?
Mo.: X és Y függetlenek, együttes sűrűségfüggvényük:
$f_{X,Y}(x,y) = 3x^2, 0 < x < 1, 0 < y < 1.$
$\mathbf{P}(X \le Y) = \int\limits_0^1 \int\limits_x^1 3x^2 dydx = \int\limits_0^1 \left[3x^2y\right]_x^1 dx = \int\limits_0^1 3x^2 - 3x^3 dx =$
$= \left[x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

2. Egy szavazóhelyiségben három szavazatgyűjtő úrnát helyeztek el, amelyik mindegyikébe egyforma valószínűséggel tehetik a szavazólapokat a választók. Ha a körzetben 1000-en szavaztak, mekkora valószínűséggel marad teljesen üres úrna a szavazás befejezésekor?
Mo.: A_i : tesznek szavazatot az i-edik úrnába $(i = 1, 2, 3)$.
$\mathbf{P}\left(\overline{A_1A_2A_3}\right) = \mathbf{P}\left(\bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3\right) = \mathbf{P}\left(\bar{A}_1\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}_2\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}_3\right) - \mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2\right) -$
$\mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_3\right) - \mathbf{P}\left(\bar{A}_3 \cdot \bar{A}_2\right) + \mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_3 \cdot \bar{A}_2\right) =$
$= 3\mathbf{P}\left(\bar{A}_1\right) - 3\mathbf{P}\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2\right) + 0 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{1000} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{1000} = \frac{2^{1000}-1}{3^{999}}.$

3. Az X és Y változók együttes sűrűségfüggvénye:
$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-2y}, x \in (0,1), y > 0.$
Adja meg az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ feltételes várható értéket!
Mo.: $X \in U(0,1), Y \in E(2)$, függetlenekl!
$\mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}(X) = \frac{1}{2}.$

4. Feldobnak egy szabályos kockát, majd két szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat.
a) mennyi a valószínűsége, hogy egy fejet sem dobnak;
b) feltéve, hogy egy fejet sem dobtak, mennyi a valószínűsége, hogy a kockával előzőleg 6-ost dobtak?
Mo.: a.) B: nem dobnak fejet, A_i : a kockán i-t dobnak.
$\mathbf{P}(B \mid A_i) = \left(\frac{1}{4}\right)^i, \mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{6}$
A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{6} \mathbf{P}(B \mid A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{6} \sum\limits_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{4}\right)^i$
b.) A Bayes tételből:
$\mathbf{P}(A_6 \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_6) \cdot \mathbf{P}(A_6)}{\sum\limits_{i=1}^{6} \mathbf{P}(B|A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i)} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^6}{\sum\limits_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{4}\right)^i}$

5. Legyen $X \in N(-2,3)$ és $Y \in E(2)$ függetlenek, $Z = 3X - Y$. Számolja ki Z várható értékét, szórását és az $R(Z,Y)$ korrelációs együtthatót!
Mo.: $\mathbf{E}Z = 3\mathbf{E}X - \mathbf{E}Y = -6 - \frac{1}{2} = -\frac{13}{2}$
$\sigma^2 Z = 9\sigma^2 X + \sigma^2 Y = 81 + \frac{1}{4} = \frac{325}{4} \Longrightarrow \sigma Z = \frac{\sqrt{325}}{2}$
$\mathrm{cov}(Z,Y) = -\sigma^2 Y = -\frac{1}{4}, R(Z,Y) = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{325}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{325}}$

6. Mikor nevezünk asziptotikusan torzítatlannak egy becslést?
Mo.: Ha a becslő statisztika várható értéke a paraméterhez tart, ha a mintaelemszám tart a végtelenbe.