MATEMATIKA A2   3.vizsga

2015 január 12.

Feladat	1.	2.	3.	4.	5.	$\sum$
max. pontszám	10	10	10	10	10	50
elért pontszám						

NÉV
NEPTUN KÓD

1. Feladat. Adjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazát!

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 4y & - & 2z & + & 2w & = & 0 \\ x & + & y & & & + & 3w & = & 0 \\ & & y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & + & 4w & = & 0 \end{array}$$

2. Feladat. Keressük az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21, \quad S : x + 4y + 6z = 0.$$

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx\ dy.$$

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \text{ahol} \quad a \neq 0 \quad \text{és} \quad k > 0 \quad \text{valós számok.}$$

1. Feladat. Adjuk meg a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazát!

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x & + & 4y & - & 2z & + & 2w & = & 0 \\
x & + & y & & & + & 3w & = & 0 \\
& & y & + & 2z & + & w & = & 0 \\
x & - & y & + & 2z & + & 4w & = & 0
\end{array}
$$

Megoldás. Csak az együtthatókat írjuk le $\boxed{\mathbf{2+2+2+2+1p}}$.

$$
\begin{array}{rrrr|rrrr|rrrr|rrrr|rrrr|}
\boxed{2} & 4 & -2 & 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 3 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \boxed{3} & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 4 & 0 & -3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

A négy oszlopvektor lineárisan független, így csak a triviális megoldás létezik, azaz $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---

2. Feladat. Keressük az adott felületnek azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos az adott síkkal, és írjuk fel az érintősík egyenletét ezekben a pontokban!

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21, \qquad S : x + 4y + 6z = 0.$$

Megoldás. Ezt a felületet a háromváltozós $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ függvény 21 értékhez tartozó szintfelületének lehet tekinteni, az érintősík normálvektorának koordinátái a $P(a, b, c)$ pontban: $f'_x(a, b, c) = 2a$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, $f'_y(a, b, c) = 4b$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, $f'_z(a, b, c) = 6c$ $\boxed{\mathbf{1p}}$. Az adott sík normálvektora $\mathbf{n}_S = (1, 4, 6)$ $\boxed{\mathbf{1p}}$. Ha két sík párhuzamos, normálvektoraik párhuzamosak, pl. egyik a másiknak számszorosa: $2a = \tau \cdot 1$, $4b = \tau \cdot 4$, $6c = \tau \cdot 6$ $\boxed{\mathbf{1p}}$. Ebből $b = c = \tau$, $a = \frac{\tau}{2}$, amit a felület egyenletébe írva $\frac{\tau^2}{4} + 2\tau^2 + 3\tau^2 = 21$, azaz $\tau^2 = 4$, $\tau = \pm 2$ $\boxed{\mathbf{1p}}$. A keresett pontok tehát $P_1(1, 2, 2)$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, és $P_2(-1, -2, -2)$ $\boxed{\mathbf{1p}}$.
Két háromdimenziós vektor párhuzamosságát úgy is ellenőrizhetjük, hogy vektoriális szorzatuk a nullvektor. $(2a, 4b, 6c) \times (1, 4, 6) = (24b - 24c, 6c - 12a, 8a - 4b) = (0, 0, 0)$, és ebből ugyancsak $b = c$, $c = 2a$ adódik, ami végül a P_1, P_2 pontokat eredményezi.
A párhuzamos érintősíkok normálvektora is $\mathbf{n} = (1, 4, 6)$, és egyenleteik $2x + 8y + 12z = 21$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, ill. $2x + 8y + 12z = -21$ $\boxed{\mathbf{1p}}$.

---

3. Feladat. Számítsuk ki az alábbi integrált

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx\ dy.$$

Megoldás. Az integrandus az adott tartományon folytonos, tehát az integrál létezik $\boxed{\mathbf{1p}}$. Ha a tartományon fordított sorrendben integrálunk $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dx\ dy \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_1^2 \int_1^{x^2} \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right) dy\ dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_1^2 \left[y \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right]_1^{x^2} dx$$

$$\overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \int_1^2 (x^2 - 1) \sin\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\ dx \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \left[-\cos\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\right]_1^2 = -\cos\frac{2}{3} + \cos\frac{2}{3} = 0.$$

---

4. Feladat. Tekintsük a következő függvénysorozatot:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$

Állapítsuk meg konvergenciatartományát és határfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a konvergenciatartományán? Ha nem, van-e olyan részhalmaza a konvergenciatartománynak, ahol egyenletesen konvergens?

Megoldás. Mivel $|\frac{\sin nx}{n}| \leq \frac{1}{n}$ $\boxed{\mathbf{2p}}$, a sorozat minden x esetén konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$, és a határfüggvény az azonosan 0 függvény $\boxed{\mathbf{1p}}$.
Mivel minden x-re és pozitív ε-ra, ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$ $\boxed{\mathbf{1p}}$, akkor $|\frac{\sin nx}{n} - 0| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ teljesül $\boxed{\mathbf{3p}}$, a függvénysorozat egyenletesen konvergens az egész konvergenciatartományán $\boxed{\mathbf{2p}}$.

---

5. Feladat. Állapítsuk meg a következő numerikus sorról, hogy konvergens-e, és ha igen, akkor abszolút vagy feltételes a konvergencia?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n}, \quad \text{ahol} \quad a \neq 0 \quad \text{és} \quad k > 0 \quad \text{valós számok.}$$

Megoldás. Akár a hányados-, akár a gyökkritériummal próbálkozhatunk.

Gyökkritériummal $\boxed{\mathbf{1p}}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \overset{\boxed{\mathbf{1p}}}{=} \sqrt[n]{\left|\frac{n^k}{a^n}\right|} \overset{\boxed{\mathbf{2p}}}{=} \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{|a|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{|a|}.\boxed{\mathbf{2p}}$$

Ha $|a| < 1$, akkor a sor divergens $\boxed{\mathbf{1p}}$, ha $|a| > 1$, akkor a sor abszolút konvergens $\boxed{\mathbf{1p}}$, ha $|a| = 1$, akkor a gyökkritériummal nem tudjuk eldönteni, de az eredeti sorba akár $a = 1$-et $\boxed{\mathbf{1p}}$, akár $a = -1$-et $\boxed{\mathbf{1p}}$ írva nyilvánvalóan divergens, mert a tagok nem tartanak 0-hoz.
