Felsőbb Matematika 1. ZH 2010-10-22 E.I.ABC

1. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix *(a)* szinguláris felbontását, és annak redukált változatát, *(b)* pszeudoinverzét, és *(c)* határozzuk meg az $\mathbf{Ax} = (10, 2, 6)$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! *(4 pont)*

2. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix QR-felbontását, és ennek felhasználásával is keressük meg az előző feladatbeli egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális megoldását! *(3 pont)*

3. A 10×10-es $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda - 3)^6(\lambda - 2)^4$. A $\mathbf{B} - 3\mathbf{I}$ első néhány hatványának rangja 8, 6, 5, 4, a $\mathbf{B} - 2\mathbf{I}$ mátrixé 7, 6. Írjuk fel $\mathbf{B}$ Jordan normálalakját! *(2 pont)*

4. Írjuk fel az $(1, 2, 2)$ vektor körüli $60°$ fokos forgatás mátrixát valamely bázisban, és írjuk fel abban a bázisban az $x + 2y + 2z = 1$ egyenletű sík egyenletét! *(2 pont)*

5. Határozzuk meg a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-alakját, egy hozzá tartozó Jordan-bázisát, és az $e^{\mathbf{C}}$ mátrixot! *(4 pont)*

6. Határozzuk meg a $\mathbf{C}$ mátrix PLU-felbontását és azt fölhasználva oldjuk meg a $\mathbf{Cx} = (1, -4, 2)$ egyenletrendszert! *(3 pont)*

7. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{I} - 2\mathbf{ee}^T$ – azaz a tükrözés mátrixa – szimmetrikus és ortogonális! *(2 pont)*

8. Bizonyítsuk be, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér transzformáció nemnulla skalárszorosa. *(3 pont)*

9. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{S}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, akkor létezik olyan szimmetrikus és pozitív szemidefinit $\mathbf{M}$ mátrix, hogy $\mathbf{S} = \mathbf{M}^2$. *(2 pont)*