Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok, második pótzh — pontozási útmutató
2013. december 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Ha valaki egy feladatra több lényegesen különböző megoldást ír le, akkor ezek közül a legkisebb pontszámút kell értékelni.

Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyen A kettő rangú 2×3-as mátrix. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan 3×2-es B mátrix, melyre a BA mátrix a 3×3-as egységmátrix.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Tegyük fel indirekten, hogy létezik ilyen B mátrix. Ekkor a tanultak szerint BA oszlopai a B oszlopainak lineáris kombinációiként állnak elő. (2 pont)
BA oszlopai tehát benne vannak a B oszlopai által generált altérben, (1 pont)
ami legfeljebb két dimenziós, hiszen B-nek csak két oszlopa van. (2 pont)
Mivel két dimenziós térben legfeljebb két vektor lehet független, (2 pont)
BA-nak legfeljebb 2 a rangja. (1 pont)
A 3×3-as egységmátrix rangja viszont 3, ezért nem lehet azonos a BA mátrixszal. (2 pont)

2. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját az x valós szám függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A rangot Gauss-eliminációval határozzuk meg. Az első sort a másodikból és a harmadikból levonva az alábbi mátrixot kapjuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1-2x^2 & 1-2x \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha $x = 1$, akkor a második és a harmadik sor cseréje után gyorsan kiderül, hogy a redukált lépcsős alakban két vezéregyes lesz, (2 pont)
vagyis a mátrix rangja 2. (1 pont)
Ha $x \neq 1$, akkor a második oszlopot $(1-x)$-szel osztva, (1 pont)
majd a második sor $(1-2x^2)$-szeresét a harmadikból levonva az alábbi mátrixot kapjuk.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2x \end{pmatrix}.$$ (2 pont)

Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor a redukált lépcsős alakban két vezéregyes lesz, (1 pont)
vagyis a mátrix rangja 2. (1 pont)
Ha $x \neq \frac{1}{2}$, akkor a harmadik oszlopot $(1-2x)$-szel osztva megkapjuk a harmadik vezéregyest, azaz a mátrix rangja ekkor 3. (1 pont)

Ha a Gauss-elimináció előtt kicseréljük az első és a második sort (meg esetleg az első és a harmadik oszlopot), akkor a számolás egyszerűbb lesz. Mivel azonban ezek a lépések nem tartoznak a Gauss-eliminációhoz, meg kell említeni, hogy nem változtatják meg a rangot. Ennek hiányában sorcsere esetén 1, oszlopcsere esetén 2 pontot vonjunk le.

3. Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely a $(0,1)$ vektorhoz és az $(1,0)$ vektorhoz is az $(1,1)$ vektort rendeli?

* * * * *

Ha van ilyen lineáris transzformáció (nevezzük $\mathcal{A}$-nak), akkor $\mathcal{A}((x,y)) = \mathcal{A}((x,0)) + \mathcal{A}((0,y)) = x\mathcal{A}((1,0)) + y\mathcal{A}((0,1)) = (x+y, x+y)$. (3 pont)
Másrészt az a transzformáció, ami az (x,y) vektort az $(x+y, x+y)$ vektorba viszi, a $(0,1)$ vektorhoz és az $(1,0)$ vektorhoz is az $(1,1)$ vektort rendeli, (1 pont)
tehát azt kell eldöntenünk, hogy az (x,y) vektort az $(x+y, x+y)$ vektorba vivő transzformáció lineáris-e. (2 pont)
Erről a lineáris leképezéseket definiáló két tulajdonság ellenőrzésével könnyen meggyőződhetünk, mindkét tulajdonság igaz lesz. (2+2 pont)

4. Az A mátrixnak k sora és 2^k oszlopa van. Az oszlopok (valamilyen sorrendben) éppen az összes különböző k hosszúságú 0-1 sorozatok. Hány dimenziós annak az $\mathbb{R}^{2^k}$-ból $\mathbb{R}^k$-ba menő lineáris leképezésnek a magtere, melynek mátrixa a szokásos bázisban A?

* * * * *

Először a képtér dimenzióját számítjuk ki. Mivel a leképezés az $\mathbb{R}^k$-ba megy, a képtér legfeljebb k dimenziós lehet. (1 pont)
Az A mátrix definíciójából látszik, hogy $\mathbb{R}^k$ szokásos bázisának valamennyi vektora előáll képként, (3 pont)
így $\mathbb{R}^k$ minden vektora előáll képként, (2 pont)
tehát a képtér dimenziója pontosan k. (1 pont)
A magtér dimenziója innen a dimenziótétel felhasználásával $2^k - k$. (3 pont)

5. Legyenek u és v egy lineáris transzformáció különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Lehetséges-e, hogy $u+v$ is sajátvektora ugyanannak a transzformációnak?

* * * * *

Az u és v vektorok tartozzanak rendre a λ és μ sajátértékekhez, ahol a feladat szerint $\lambda \neq \mu$. A lineáris transzformációt $\mathcal{A}$-val jelölve $\mathcal{A}(u+v) = \lambda u + \mu v$. (2 pont)
Ha $u+v$ sajátvektor a γ sajátértékkel, akkor tehát $\lambda u + \mu v = \mathcal{A}(u+v) = \gamma(u+v)$, (2 pont)
ahonnan $(\lambda - \gamma)u = (\gamma - \mu)v$, (2 pont)
vagyis az u és v vektorok egymás számszorosai (mivel egyik sem nullvektor, továbbá $\lambda = \gamma$ és $\mu = \gamma$ egyidejűleg nem teljesülhet), (2 pont)
ekkor azonban ugyanaz a sajátérték kéne, hogy hozzájuk tartozzon, ami ellentmondás. (2 pont)

6. Határozzuk meg a $(\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}i)^3$ komplex szám hosszának (abszolút értékének) egész részét.

* * * * *

A tanultak szerint egy komplex szám k. hatványának hossza azonos a komplex szám hosszának k. hatványával, így elég a szám hosszát meghatározni, majd köbre emelni. (4 pont)

A hossz négyzete $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2=3$. (2 pont)

A szám hossza tehát $\sqrt{3}$, (1 pont)

köbének hossza pedig így $3\sqrt{3}$. (1 pont)

Az egész rész meghatározásához vegyük észre, hogy $(3\sqrt{3})^2=27$, ami 5 és 6 négyzete közé esik, (1 pont)

tehát a kérdéses egész rész 5. (1 pont)

Természetesen a feladat megoldható az első észrevétel nélkül, de lényegesen több számolással. Minden számolási hibáért vonjunk le 1 pontot.