Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Műszaki informatikus BSc
2013.01.02.
Megoldás

1. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$ b.) $\mathbf{P}(B) = \frac{\binom{8}{2}\cdot 2^6}{3^{10}}$ c.) $\mathbf{P}(C) = \frac{\binom{10}{5}2^5}{3^{10}}$ d.) $\mathbf{P}(D) = \frac{10!}{3!4!3!}3^{-10}$.

2. $\mathbf{P}\left(\frac{1}{2}Y < t\right) = \mathbf{P}(Y < 2t) = 1 - e^{-2t} \Longrightarrow \frac{1}{2}Y \in E(2)$.
   $f_{X+\frac{1}{2}Y}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t-u)\, f_{\frac{1}{2}Y}(u)\, du =$
   $$= \int\limits_0^t 2e^{-2u}e^{-(t-u)}\,\mathrm{d}\,u = 2e^{-t}\int\limits_0^t e^{-u}\,\mathrm{d}\,u = 2e^{-t} - 2e^{-2t}, t > 0.$$
   $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X + \frac{1}{2}\mathbf{E}Y = \frac{3}{2}, \boldsymbol{\sigma}^2 Z = \boldsymbol{\sigma}^2 X + \frac{1}{4}\boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{5}{4}, \boldsymbol{\sigma} Z = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $f_X(y) = f_Y(y) = \int_0^1 \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right) dx = \frac{12}{5}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 y}{2} + y^2 x\right]_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{6y}{5} + \frac{12y^2}{5}, y \in (0,1)$.
   $f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{6x^2-6xy+6y^2}{2-3y+6y^2}, x, y \in (0,1)$.
   $\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int_0^1 x \cdot \frac{6x^2-6xy+6y^2}{2-3y+6y^2} dx = \frac{1}{2-3y+6y^2}\left[\frac{3}{2}x^4 - 2x^3 y + 3x^2 y^2\right]_0^1 = \frac{3-4y+6y^2}{4-6y+12y^2}, y \in (0,1)$.
   $\mathbf{E}(2X + \ln Y \mid Y) = 2\mathbf{E}(X \mid Y) + \ln Y = \frac{3-4Y+6Y^2}{2-3Y+6Y^2} + \ln Y$

4. $X \in G\left(\frac{1}{2}\right), Y \in G\left(\frac{1}{6}\right)$, függetlenek.
   $\mathbf{P}(X+Y=4) = \sum\limits_{l=1}^{3}\mathbf{P}(X=l)\,\mathbf{P}(Y=4-l) = \frac{1}{12}\sum\limits_{l=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{3-l} = \frac{1}{12}\left(\frac{25}{36} + \frac{15}{36} + \frac{9}{36}\right) = \frac{49}{432} \approx 0,113$

5.

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   $\mathbf{E}Y = 1\cdot\frac{11}{36} + 2\cdot\frac{9}{36} + 3\cdot\frac{7}{36} + 4\cdot\frac{5}{36} + 5\cdot\frac{3}{36} + 6\cdot\frac{1}{36} = \frac{91}{36}$,
   $\mathbf{E}X = 6\cdot\frac{11}{36} + 5\cdot\frac{9}{36} + 4\cdot\frac{7}{36} + 3\cdot\frac{5}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 1\cdot\frac{1}{36} = \frac{161}{36}$,
   $\mathrm{cov}(X+1, Y-1) = \mathrm{cov}(X,Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\cdot\mathbf{E}Y =$
   $1\cdot 1\cdot\frac{1}{36} + 1\cdot 2\cdot\frac{2}{36} + 1\cdot 3\cdot\frac{2}{36} + \cdots + 6\cdot 6\cdot\frac{1}{36} - \frac{91}{36}\cdot\frac{161}{36} = \frac{1225}{1296}$.

6. A nullhipotézis az, hogy a minta várható értéke megegyezik egy hipotetikus m_0 értékkel.

A felhasznált minta eloszlása normális, ismert σ_0 szórással.
A próbastatisztika:

$$u_n = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$$

ahol $\bar{X}_n$ a mintaátlag, m_0 a hipotetikus érték, σ_0 a minta ismert szórása, n a mintaelemszám.