

Tájékoztató a szóbeli vizsgáról

(Elektromágneses terek alapjai, 2013-2014 / 2. félév)

A sikeres írásbeli beugrót követően a hallgató szóbeli vizsgán vesz részt, amelynek kezdetén egy elméleti kérdést, valamint egy példát kell húznia (külön halmazból). Ezek átgondolására kb. 10-15 perc áll rendelkezésére, azután megkezdődik a vizsga, amely általában kb. 5-15 percet vesz igénybe. További tudnivalók:

- A felkészüléshez papír és íróeszköz használható; számológép nem kell. A tétel és a példa részletes, írásos kidolgozáshoz általában kevés az idő, de vázlat írására elegendő. Bár a vizsga szóbeli, a tétel ismertetése során további írásra (rajzolásra) lehet szükség.
- A példát számszerűen megoldani nem kell: a lényeg csupán a megoldás elvi menetének ismertetése.
- A szóbeli vizsgáztatás kötetlen abban az értelemben, hogy a kihúzott kérdés csupán a kezdeti irányt adja meg; a vizsgáztató – ha szükségét látja – belekérdezhet más anyagrészekbe is.
- A példasort nem adjuk ki előre. Az elméleti kérdések aktuális listája alább olvasható. A tárgy oktatói azonban mindenkor fenntartják a jogot a példák és kérdések halmazának bővítésére vagy szűkítésére, illetve azok átfogalmazására.

Az elméleti kérdések aktuális listája :

1. Mutassa be az elektromágneses tér forrásmennyiségeit, valamint azok megjelenési formáit és matematikai leírását!
2. Mutassa be a folytonossági egyenlet különböző alakjait!
3. Mutassa be az elektromágneses tér intenzitásvektorait, és kapcsolatukat az erőhatással!
4. Mutassa be az elektromágneses tér „gerjesztett” vektorait, és kapcsolatukat a forrásmennyiségekkel!
5. Mutassa be röviden a makroszkopikus elektromos és mágneses anyagjellemzők bevezetésének módját és anyag szerkezeti hátterét! *Ezt külön megnevezni!*
6. Ismertesse a Maxwell-egyenletek integrális és differenciális alakját, valamint a köztük lévő kapcsolatot!
7. Ismertesse az elektromágneses vektormezők anyaghatáron teljesülő folytonossági feltételeit!
8. Hogyan változnak a térjellemzők az anyaghatáron, ha ott felületi töltéssűrűség, illetve felületi áram van jelen? Mondjon példát arra, hogy a gyakorlatban milyen körülmények között valósulhatnak meg ezek!
9. Ismertesse az elektromágneses térben az energiasűrűsége és az energiaáramlásra vonatkozó általános összefüggéseket!
10. Ismertesse az elektromágneses térben az erőhatással kapcsolatos összefüggéseket!
11. Ismertesse az Ohm-törvény differenciális alakját, valamint a nem elektromágneses eredetű töltésmozgató hatás figyelembevételének módjait (példával is illusztrálva)!
12. Ismertesse a Maxwell-egyenletek teljes rendszerét (csak differenciális alakban, de kiegészítve a konstitúciós egyenletekkel, folytonossági feltételekkel, valamint az erőhatást és az energiaviszonyokat leíró egyenletekkel)!
13. Ismertesse az elektrodinamika felosztását!
14. Ismertesse és értelmezze az elektrosztatika alapegyenleteit, és jelölje meg néhány alkalmazási területét!
15. Ismertesse az elektrosztatikus skalárpotenciál fogalmát, bevezetésének módját, valamint kapcsolatát a feszültséggel és a térerősséggel!

~~✗~~ Írja fel és értelmezze az elektrosztatika Poisson-egyenletét, és adja meg a homogén közegben érvényes, általános megoldását! Miért körülményes ennek a formulának a használata a gyakorlati esetek nagy részében?

gyakori volt jól ~~✗~~ Mutassa be néhány egyszerű töltéselrendezés (ponttöltés, egyenes vonaltöltés, töltött síkfelület) sztatikus elektromos terét és potenciálterét! Milyen módszerrel lehet, illetve célszerű ezeket számolni?

~~✗~~ Mutassa be a sztatikus töltésdipólus elektromos terét és potenciálterét!

~~✗~~ Fogalmazza meg az elektrosztatika peremérték-feladatát, és illusztrálja példákkal a vonatkozó peremfeltételeket!

~~✗~~ Ismertesse a helyettesítő töltések módszerét és a töltéstükrözés elvét! Hogyan épül ez a módszer a Poisson-egyenlet egyértelmű megoldhatóságára?

~~✗~~ Fogalmazza meg az elektromos teret leíró vektormezők anyaghatáron érvényes folytonossági feltételeit a skalárpotenciál segítségével!

~~✗~~ Ismertesse a vezető anyagok viselkedését elektrosztatikus térben, valamint a vezető-szigetelő határon érvényes folytonossági feltételeket; definiálja az elektróda fogalmát!

~~✗~~ Ismertesse a kapacitás fogalmát és energetikai hátterét; fejezze ki a kapacitást a térjellemző mennyiségekkel! Térjen ki az „önmagában álló elektróda” esetére is!

~~✗~~ Ismertesse az elektróda-rendszert jellemző együttthatókat, különös tekintettel a részkapacitásokra! Adjon az utóbbiakra szemléletes értelmezést!

~~✗~~ Hogyan számítható ki a sztatikus elektromos térben tárolt energia? Ismertesse az elektróda-rendszer energiájára vonatkozó formulákat is!

~~✗~~ Ismertesse és értelmezze a stacionárius áramlási tér alapösszefüggéseit! Mely területeken alkalmazható ez a problémátípus?

~~✗~~ Ismertesse a stacionárius áramlási tér Laplace-egyenletét! Sorolja fel, és illusztrálja példával az egyenlet egyértelmű megoldhatóságát biztosító peremfeltételeket!

~~✗~~ Ismertesse az ellenállás fogalmát, és fejezze ki a térjellemző mennyiségekkel!

~~✗~~ Hogyan számítható a térbeli áramlás által vezető anyagban keltett hőteljesítmény (Joule-vesztesség)?

~~✗~~ Miben áll, és meddig terjed a stacionárius áramlás és az elektrosztatika analógiája? Mikor és hogyan alkalmazható a tükrözés módszere áramlási tereknel?

~~✗~~ Ismertesse a stacionárius áram mágneses terére vonatkozó alapegyenleteket, és a problémátípus főbb alkalmazási területeit!

~~✗~~ Ismertesse és értelmezze a Biot-Savart-törvényt! Illusztrálja egy egyszerű példával!

~~✗~~ Ismertesse az ön- és kölcsönös indukció fogalmát és energetikai hátterét! Térjen ki a külső és belső induktivitás fogalmára!

~~✗~~ Hogyan számítható a stacionárius mágneses térben tárolt energia? Ismertesse a tekercsrendszer energiájára vonatkozó formulát is!

~~✗~~ Mutassa be az indukálási jelenségeket (nyugalmi és mozgási), valamint az indukált feszültség számítását! Mondjon példákat gyakorlati alkalmazásra!

~~✗~~ Ismertesse a távvezeték elosztott paraméterű modelljét és a távíró egyenleteket! Meddig terjed a modell érvényességi köre, azaz milyen feltételek mellett írható le egy hullámvezető viselkedése az ismertetett modellel?

~~✗~~ Mutasson be néhány gyakori távvezeték-konstrukciót, jellemezze azok elektromos és mágneses terét! Hogyan befolyásolja a távvezeték geometriája a vezetékparamétereket?

~~✗~~ Ismertesse a távvezeték-re vonatkozó Helmholtz-egyenletet; mutassa be és értelmezze annak általános megoldását!

~~✗~~ Mutassa be a távvezeték hullámparamétereit, ill. kapcsolatukat a fázissebességgel és a hullámhosszal! Térjen ki az ideális távvezeték speciális esetére is!

- ~~40.~~ Definiálja a reflexiós tényezőt; ismertesse speciális lezárások (illesztett, nyitott végű, rövidre zárt) esetén az ideális távvezetéken kialakuló áram- és feszültségviszonyokat!
- ~~41.~~ Ismertesse a tetszőleges impedanciával lezárt ideális távvezeték feszültség- és áramviszonyait, valamint az állóhullám-haladóhullám felbontást! Mi az energetikai tartalma a reaktanciával lezárt ideális távvezetéken kialakuló hullámképnek?
- ~~42.~~ Hogyan határozhatók meg a feszültségamplitúdó minimum- és maximumhelyei a távvezeték mentén, a lezárás ismeretében?
- ~~43.~~ Definiálja az állóhullámarányt, és ismertesse számítását! Hogyan használható ez a mennyiség nagyfrekvenciás impedancia-mérésre?
- ~~44.~~ Ismertesse a távvezeték kétkapuként történő leírását, a láncparamétereket, valamint a T- és Π -helyettesítőképeket! Tekinthetők-e ez utóbbiak koncentrált paraméterű hálózati megvalósításnak?
- ~~45.~~ Ismertesse a bemeneti impedancia fogalmát és számítási módját! Hogyan használható ez a mennyiség illesztési feladat megoldására?
- ~~46.~~ Írja fel a homogén hullámegyenletet az elektromos, illetve a mágneses térerősségre!
- ~~47.~~ Értelmezze a térerősség-vektor komplex amplitúdójának fogalmát (szinuszos állandósult állapot), és írja fel az elektromágneses hullámok Helmholtz-egyenletét az elektromos térerősségre vonatkozóan!
- ~~48.~~ Definiálja a síkhullám fogalmát, és írja fel a síkhullám egydimenziós Helmholtz-egyenletét! Mit jelent a TEM-típusú hullámterjedés?
- ~~49.~~ Ismertesse, hogy miben áll a síkhullám-távvezeték analógia, és meddig terjed az érvényességi köre, azaz mikor nem alkalmazható!
- ~~50.~~ Ismertesse a síkhullám viselkedését ideális szigetelőben! Térjen ki a hullámparaméterek, a fázissebesség és a hullámhossz számítására!
- ~~51.~~ Ismertesse, hogy miként terjed az energia a síkhullámban! Vezesse be és értelmezze a komplex Poynting-vektort!
- ~~52.~~ Ismertesse a síkhullám viselkedését vezető anyagban! Térjen ki a hullámparaméterek számítására, valamint a behatolási mélység fogalmára! Hogyan alkalmazható ez a jelenség nagyfrekvenciás terek árnyékolására?
- ~~53.~~ Ismertesse az áramkiszorítás jelenségét, a váltakozó áramú ellenállás fogalmát és közelítő számítását hengeres vezetőre!
- ~~54.~~ Ismertesse a polarizáció fogalmát síkhullámra vonatkozóan! Alkalmazható-e itt a távvezeték-analógia?
- ~~55.~~ Ismertesse a síkhullám viselkedését anyaghatáron, különös tekintettel a merőleges beesésre. Alkalmazható-e itt a távvezeték analógia?
- ~~56.~~ Ismertesse a Hertz-dipólus fogalmát valamint elektromos és mágneses terének fő jellemzőit! Mit jelent a közeltér és a távotér?
- ~~57.~~ Ismertesse a Hertz-dipólus távolterének jellemzőit! Térjen ki a teljesítményáramlásra is!
- ~~58.~~ Ismertesse az alapvető antennajellemzőket (iránykarakterisztika, sugárzási ellenállás, irányhatás, antennanyereség, hatásos felület), és adja meg ezek értékét a Hertz-dipólusra!
- ~~59.~~ Ismertesse az antennákra vonatkozó átviteli egyenletet, és értelmezze annak összetevőit!

2014.05.12.

1. tétel

- közvetlen források

↳ töltés $\boxed{\nabla E}$: nyugvó töltések

$$[Q] = As$$

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \quad (\text{elektron})$$

elozelaski: folytonosaka) térfogati töltéssűrűség

$$[\rho] = \frac{As}{m^3}$$



$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

$$\boxed{Q_V = \int_V \rho \, dV}$$

b) felületi ~

$$[\sigma] = \frac{As}{m^2}$$



$$\boxed{Q_S = \int_S \sigma \, dS} \quad \text{felületi integrál}$$

pl.: kiterjesztett fémtárgy, elektródák
vékony lemezekc) vonalas ~

$$[q] = \frac{As}{m}$$
$$\boxed{Q_L = \int_L q \, dl} \quad \text{vonali integrál}$$

d) pontszerű

$$[Q] = As$$

$$\rho(\vec{r}) = Q_p \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_p)$$

tér pont

térfogati Dirac

$$[\delta] = \frac{1}{m^3}$$

$$\int \delta \, dV = 1$$

~~18. mozg. töltések → áramerő~~

- Coulomb-törvény =

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

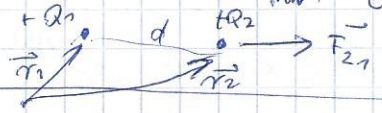
Q_1 és töltés Q_2 ké. ne hirt. energi

ϵ_0 : vákuum-permittivitás
számszátított mennyiség

$$8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$$

$$|\vec{F}_{21}| = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2}$$

$d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$
inverz négyzetes
erőtörvény



M: mozg. töltések → áramerő



$$I_S(t) = \lim_{t \rightarrow \phi} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$[I_S] = A$$

S-en átáramló, Q-tal jellemző áramerő

eloszlásai =

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0} \rightarrow \text{statu. } \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot c^2}$$

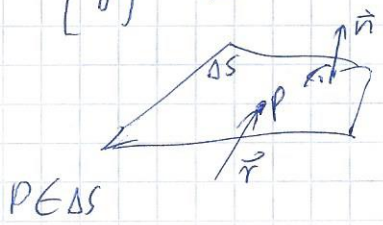
tervezési állandó

a, térbeli

$$[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$$

$\vec{j}$:= áramsűrűség-vektor

egys. idő alatt átáramló töltés
egys. felületen



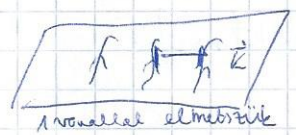
$$\vec{n} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \lim_{dS \rightarrow \phi} \frac{I_{dS}}{dS} = \lim_{\substack{dS \rightarrow \phi \\ dt \rightarrow \phi}} \frac{\Delta Q}{dt \cdot dS}$$

működés
komponens!

$$I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

b, felületi

$$[\vec{k}] = \frac{A}{m}$$



pl: szalagsterén áramvezetők (NPA'k)

- nagyfokú: skin-hatás (áramelszívás)

c, vonalszerű → „drótkban folyó”

$$[\vec{I}] = A$$

- Biot-Savart =

Magneses erőtervény

$$|\vec{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{|I_1 \cdot I_2|}{d} \cdot l$$



$$\Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

definiált állandó
vákuum-permeabilitás

1A: $I = 1A$ ha
 $I_1 = I_2 = I, d = l = 1m$
 $F = 2 \cdot 10^{-7} N$

2. tétel

folytonossági egyenlet: töltés és áram kapcsolata

a, szabad töltéshordozó árama

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q \cdot A \cdot n \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

$$I = - \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{I}{A} = j = q \cdot n \rightarrow \vec{j} = q \cdot \vec{v}$$

sebesség: leírja a töltések mozgását

pl.: fém, vákuum

$$\vec{j} = q_+ \cdot \vec{v}_+ + q_- \cdot \vec{v}_-$$

poz.

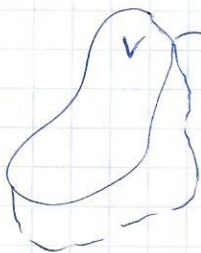
neg. töltéshordozók

a 2 sebesség nagyságban eltérhet

b, töltésmegmaradás elve $\rightarrow$ alapvető természeti tv.

$$\frac{dQ}{dt} = \text{konstans} \quad (= \Phi)$$

$\hookrightarrow$ világgegegyetem össz. töltése



$S(V)$ prémfelület

$$\oint_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{s} = - \frac{dQ_V}{dt}$$

Gauss

$$\oint_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \int_V \text{div } \vec{j} \, dV$$

$$- \frac{dQ_V}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV \stackrel{V=\text{dől.}}{=} =$$

$\forall V$ -re
integrandus
egyenlő

$$\oint_{S(V)} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = 0$$

integrális alak

$$= - \int_V \frac{d\rho}{dt} \, dV$$

$\hookrightarrow$ felírhatjuk

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

differenciális alak

töltésre vonatkozó
folytonossági egyenlet

~~Magg töltések → áramerősség~~

- Coulomb-törvény:

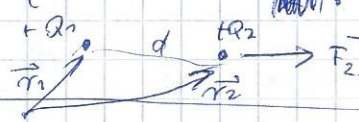
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Q_1 és Q_2 töltés $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ távolság

ϵ_0 : vákuum-permittivitás
származtatott mennyiség
 $8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$$|\vec{F}_{21}| = k \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} ; d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

inverz négyzetes erőttörvény



M: mozgó töltések → áramerősség



$$I_S(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad [I_S] = A$$

I_S áramerősség ΔQ töltés Δt idő

elvezetők:

$$C^2 = \frac{1}{\mu_0 \cdot \epsilon_0} \quad \text{vákuum } \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 \cdot c^2}$$

μ_0 permeabilitási állandó

a, térbeli

$$[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}$$

$\vec{j}$: áramsűrűség-vektor
egys. idő alatt átfolyó töltés
egys. felületen



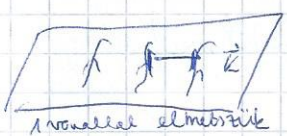
$$\vec{n} \cdot \vec{j}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{I_{\Delta S}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S}$$

méréshez komponens!

$$I_S = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

b, felületi

$$[\vec{k}] = \frac{A}{m}$$



pl.: szilíciumos áramvezetők (NPA'k)
- nagyfrekv. skin-hatás (áramelszívás)

c, vonalszerű

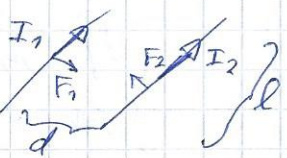
→ „drótként folyd”

$$[I] = A$$

- Biot-Savart:

Mágneses erőttörvény

$$|\vec{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{|I_1 \cdot I_2|}{d} \cdot l$$



$$\Rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

vákuum-permeabilitás

$$1A: I = 1A \text{ ha } I_1 = I_2 = I, d = l = 1m$$

$$F = 2 \cdot 10^{-7} N$$

3. tétel

Az intenzitásvektorok az EM-térben lévő vektormezőkhöz tartoznak, erőhatással kapcsolatosak, mérhetőek.

1) elektromos térerősség

Egységegyenlőség $\vec{F}$ ^{pozitív} töltésre ható erő $\rightarrow \underline{U = \phi}$

$$[\vec{E}] = \frac{V}{m}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{próba}}$$

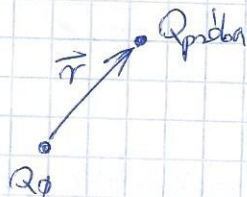
Ha ^{próbatöltésre hat} fémstöltést + próbatöltést tekintünk, akkor ez ~~levezethető~~

Visszavezethető a

Coulomb-törvényre.

~~a Coulomb-törvényre~~

példa: Q_0 töltés az origóban



$$|\vec{r}| = r$$

Coulomb: $\rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{próba}}$

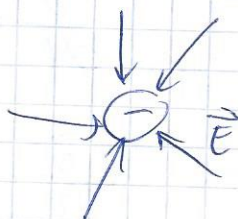
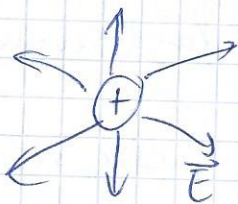
$$\vec{E}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \vec{e}_r$$

A térben csak
radikális irányú
komponense van

komponense
nincs
azt

$$= \begin{cases} E_r(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \\ E_\vartheta = 0 \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

Ez a tér gömbstimmétrikus ($\frac{\partial}{\partial \vartheta} = 0$ és $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$),
tiszta radikális tér van a töltés körül.

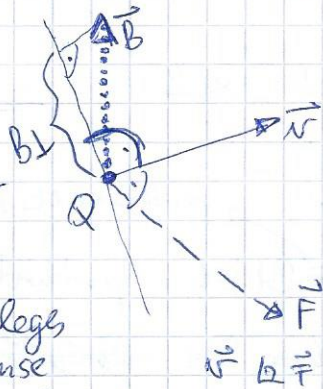


nyilván

2) Mágneses indukció (fluxussűrűség)

→ mozgó testekre ható erő
→ jellemző

$$\boxed{[\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2} = T \text{ (tesla)}}$$



$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

(ha $\vec{E} = \phi$)

→ mozgásra
nem hat erő

Lorentz-erő

$$F = q \cdot v \cdot B_{\perp} \rightarrow$$

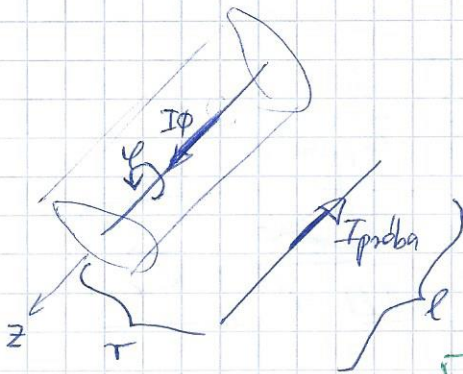
$$\boxed{B_{\perp} = \frac{F}{q \cdot v}}$$

$\vec{B}$ merőleges
komponense

→ $\vec{v}$ és $\vec{F}$ által meghatározott síkban

példa

I_0 vonaláram egy hengerk. rendszer z tengelyében



$$F = B \cdot I \cdot l \rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{F}{I \cdot l}}$$

Ampère-féle gerjesztési tör.

$$\boxed{\vec{B}(r, \varphi, z) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_{\varphi}}$$

Biot-Savart / Ampère

$$|\vec{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|I_0| \cdot |I|}{d} \cdot l$$

$$|I_0| = I$$

$d = r$ távolság

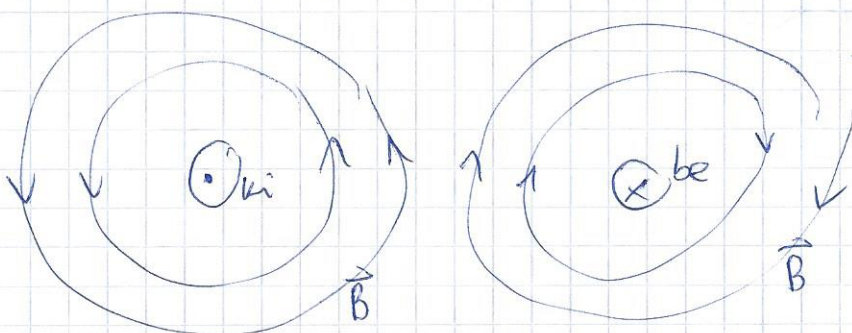
$$= \begin{cases} B_r = 0 \\ B_{\varphi}(r) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

Henger-szimmetrikus tere van!

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \text{ fordulásszim.}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \text{ eltolási szim.}$$

nyíllal jelezve



4. tétel

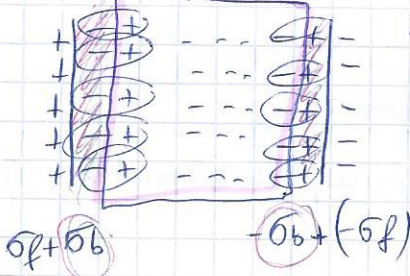
1) Elektromos eltolás-vektor

$$[\vec{D}] = \frac{As}{m^2}$$

displacement

polarizáció: dipolusok rendeződése

semleges



eredetileg töltésemleges

dielektrikumban (m.g. anyag) súlyponteltolás
köv. be torzulások miattA polarizáció-vektorral jelképezhető
(= dipólusmomentum-sűrűség) $\vec{P}$

$$\vec{E} \propto \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} \Rightarrow \begin{pmatrix} - \\ + \end{pmatrix}$$

legyen $\boxed{q_b = -\text{div } \vec{P}}$

elektromos Gauss:

$$\text{div } \vec{D} = \rho = q_b$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

S minden töltést
tartalmaz, a molekulák
dipólusok is
"mikro" szkopikus
alak

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (\rho_f + \rho_b) = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot (\rho_f - \text{div } \vec{P})$$

$$\text{div } (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}}) = \rho_f$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho_f}$$

"makro"
már csak szabad
töltés

továbbiakban:

$$\rho \equiv \rho_f$$

lin. diel. esetén: $\vec{P} \propto \vec{E}$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Spec.: vákuumban (levegő, nem polarizálható anyag):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$



2) Mágneses térerősség

$$[\vec{H}] = \frac{A}{m}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

szabad áram

kötött áram, pl. e^- pályák

polarizációs áram

Legyen $\vec{J}_b = \text{rot } \vec{M}$

 $\vec{M} :=$ mágneszettség

(=mágneses dipólusmomentum-sűrűség)

Gyújtási törvény:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \text{Maxwell I: } \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \\ \bullet B = \mu_0 \cdot H \\ \bullet B = \epsilon_0 \cdot E \end{cases}$$

"mikro"

$$\text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \cdot \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

 $\mu_0 \cdot \epsilon_0$

$$\left(\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \right) \xrightarrow{1/\mu_0}$$

$$\int_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad \checkmark$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \left(\vec{J}_f + \text{rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} \sim \vec{M}$$

$$\text{rot } \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \right)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_f + \text{rot } \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} &= \mu_0 \cdot \epsilon_0 \\ \text{rot } \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) &= \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \right) \\ &= \vec{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \end{aligned}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} - \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

"makro"

továbbáiban

$$\vec{J} = \vec{J}_f$$

lin. mágneses közegben: $\vec{M} \propto \vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

vákuum: $\mu_r = 1$

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$

5. tétel1) ϵ $\rightarrow$ permittivitás

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}}$$

$$\hookrightarrow \rho_b = -\operatorname{div} \vec{P} \quad (\text{dipól.mom. sűrűség})$$

lineáris dielektrikumban: $\vec{P} \sim \vec{E}$

$$\boxed{\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E}}$$

szuszeptibilitás - drókamperg (khi)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \underbrace{(1 + \chi)}_{\epsilon_r} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \vec{E}$$

 ϵ_r : anyagra jellemző relatív permittivitás (diel. állandó) ϵ_0 : vákuum-permittivitás $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$

$$\boxed{\epsilon \cdot \vec{E} = \vec{D}}$$

származtatott

anizotrop anyagokban ϵ irányfüggő $\rightarrow$ leírása tenzorokkal
speciális eset: vákuum/levegő: $\epsilon_r = 1 \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ ϵ_0 származtatott, mert c természeti állandó, ~~μ_0 anyagjellemző~~ definíciós állandó

$$\text{Biot-Savart} \quad (F) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{|I_1 \cdot I_2|}{d} \cdot l$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}$$

$$\left. \begin{array}{l} F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \\ I_1 = I_2 = 1 \text{ A} \\ d = l = 1 \text{ m} \end{array} \right\} \mu_0 \rightarrow$$

2) $\mu \rightarrow$ permeabilitás

$$\vec{J}_b = \text{rot } \vec{M}$$

$\hookrightarrow$ mágneszettség, mág. dip. mom. - sűrűség

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} - \vec{M}}$$

lineáris mágneses közegben: $\vec{M} \sim \vec{H}$

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$



$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B} - \chi_m \cdot \vec{H}$$



$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} \leftarrow \mu_0 (H + M) = \mu_0 (H + \chi_m \cdot H) = \mu_0 H (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r H$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \cdot \vec{H} \leftarrow \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} \rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}}$$

μ_r : anyagjellemző relatív permeabilitás

μ_0 : vákuum-permeabilitás $= 5\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$

anizotrop anyagokban: μ tenzorális mennyiség

speciális eset: vákuum/levegő: nem mágneses anyagok

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

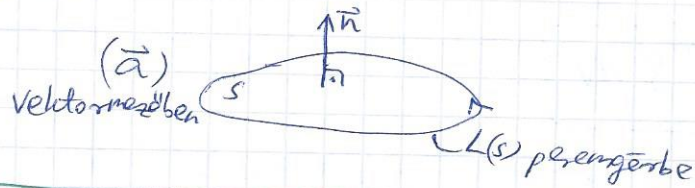
Permittivitás: A közeg mennyire áll ellen a rá ható elektromos tétel szemben, polarizációs képesség, anyagban belüli ter csökkenésének képessége.

Permeabilitás: átvezetőképesség

három csoport: Ferro, Para, Diamágneses anyagok
 ferro: állandó mágnes lesz kiűzve mágneses tér hatására + megtartja mágneses jelét χ_m nagy
 para: kiűzve mágneses tér nélkül nem mutatnak mágneses jel-t χ_m is 70 lehet
 dia: $\chi_m < 0 \rightarrow$ ellentétesen állnak be kiűzve mágneses tér hatására

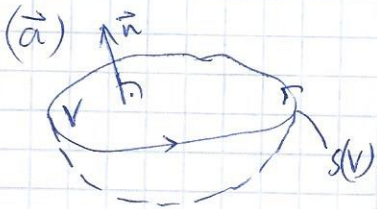
6. tétel1) Integráltételek:

- Stokes

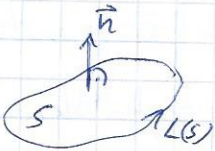


$$\oint_S \text{rot } \vec{a} \, d\vec{s} = \oint_{L(S)} \vec{a} \, d\vec{l}$$

- Gauss - Ostrogradszkij



$$\int_V \text{div } \vec{a} \, dV = \oint_{S(V)} \vec{a} \, d\vec{s}$$

2) Maxwell-egyenletek Integrális alakja

- Ampere-féle gerjesztési törvény

$\vec{H}$ cirkulációja = zárt felületet áthaladó áramerősséggel

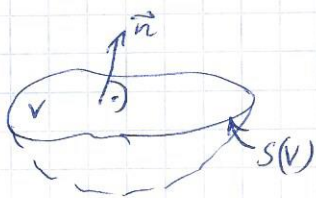
$$\oint_{L(S)} \vec{H} \, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{s}$$

↓ vezérlési
 ↓ eltolási

- Faraday-féle indukciós törvény

$$\oint_{L(S)} \vec{E} \, d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \, d\vec{s}$$

↓ S felület változhat időben → mozgási indukció



• Gauss-törvény (elektromos)

$$\oint_{S(V)} \vec{D} \, d\vec{s} = \int_V \rho \, dV$$

összfluxus
össztöltés

• Gauss-törvény (mágneses)

$\equiv$ mágneses monopólus nemlétezésének törvénye

$$\oint_{S(V)} \vec{B} \, d\vec{s} = 0$$

3) Maxwell-egyenletek differenciális alakja

Átállítás integrálisból = • első kettőre $\rightarrow$ Stokes-tétel

második kettőre $\rightarrow$ Gauss-Osztragszékij

• Utána integrálok elhagyhatók, mert a térfogat/felület tetszőleges, és az integrandusok egyenlők!

$$\bullet \text{ Ampère: } \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\bullet \text{ Faraday: } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\bullet \text{ el. Gauss: } \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\bullet \text{ mág. Gauss: } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

A terek komponenseinek hátránya van, ezért a deriválásban ugrás lép fel, ami probléma. (amelyekhatár jellemzői)

$\downarrow$
nem differenciálható

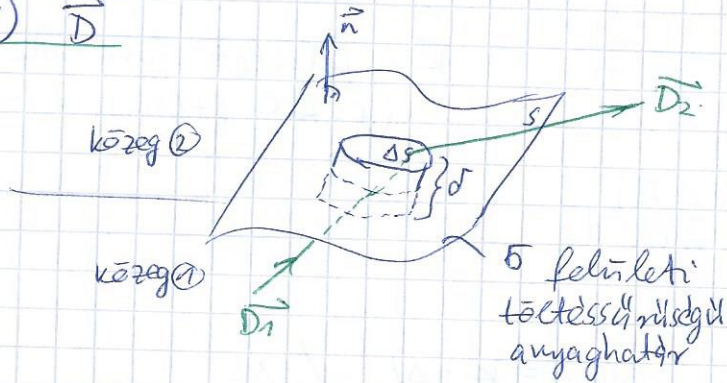
$\downarrow$
Folytonossági feltételek kellene

Az integrális alak általánosabb.

7. tétel

A Maxwell-egyenletek differenciális alakját ki kell egészíteni azokkal a határfeltételekkel, hogy az ugrások hatását ki-
küszöböljük!

1) $\vec{D}$



A henger δ magasságú,
 ΔS alapfelületű, egyik
fele ①-es, másik ②-es
közegbeli.

Maxwell 3 (el. Gauss) -ból = (integrális alak)

$$\int_{SV} \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dV$$

$$\underbrace{-D_{1n} \cdot \Delta S}_{\text{alaplapp}} + \underbrace{D_{2n} \cdot \Delta S}_{\text{fedlapp}} + \underbrace{\mathcal{O}(\delta)}_{\text{páldst, } \delta \rightarrow 0} = \sigma \cdot \Delta S$$

$$\begin{array}{l} V \rightarrow \phi \, d\phi \\ \Delta S \rightarrow \phi \\ \downarrow \\ / : \Delta S \end{array}$$

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$$

Az eltérés norm. irányú kom-
ponense ugorhat σ -val.

Ha $\sigma = \phi \Rightarrow D_{2n} = D_{1n}$, azaz D_n folytonosan megy át
az anyaghatáron.

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma} \quad \text{általánosán}$$

2) $\vec{B}$

hasonló levezetés

Maxwell 4-ből (magn. Gauss)

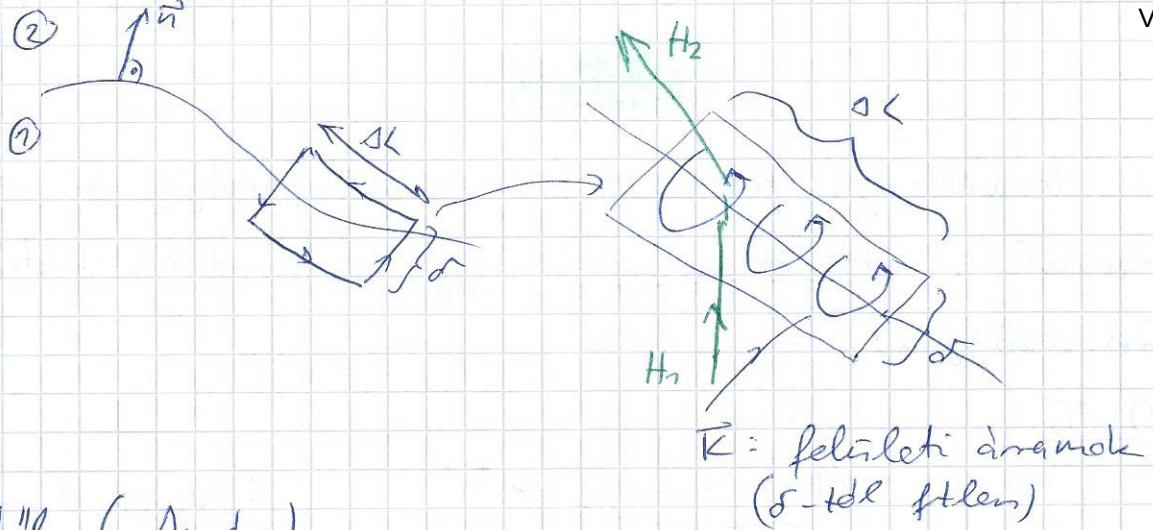
$$\int_S \vec{B} d\vec{s} = 0$$

$$-B_{1n} + B_{2n} = 0$$

$$\boxed{B_{2n} = B_{1n}} \Rightarrow$$

B_n mindig folytonosan megy át.

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0} \quad \text{általánosán}$$

3) $\vec{H}$ 

1. Maxwellből (Ampère)

$$\oint_{L(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

$$-H_{1t} \cdot \Delta L + H_{2t} \cdot \Delta L + \mathcal{O}(\delta) = K \cdot \Delta L \quad / : \Delta L$$

$$H_{2t} - H_{1t} = K$$

 H_t -nek ugrása lehet, ami K

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

→ érintő irányú vektort ad.

 $A \vec{K}$ a $\vec{H}$ -ban merőleges ugrást okoz.4) $\vec{E}$

hasonló levezetés Maxwell 2 (Faraday)-ból

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

, tehát E_t mindig folytonos. E_t, E_n a felület két oldalán, azonos pontban mint térfüldsség.

például: elektródák felszíne

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

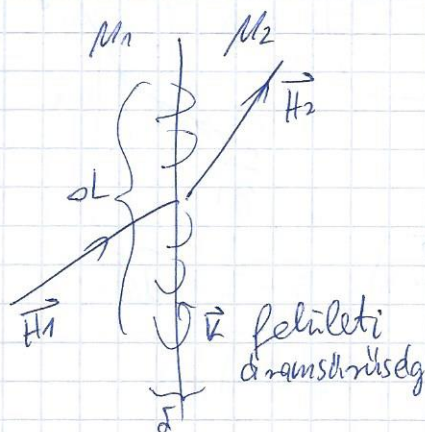
(4. Maxwell)

5) $\vec{j}$

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \rightarrow \text{felületi töltéssűrűség}$$

8. tétel

(előző tétel kicsit másképp)

1) Mágneses térerősség ($\vec{H}$)

Maxwell 1

$$\oint_{L(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

$$-H_{1t} \cdot \Delta L + H_{2t} \cdot \Delta L + \mathcal{O}(\delta) = \vec{K} \cdot \Delta L \quad / : \Delta L$$

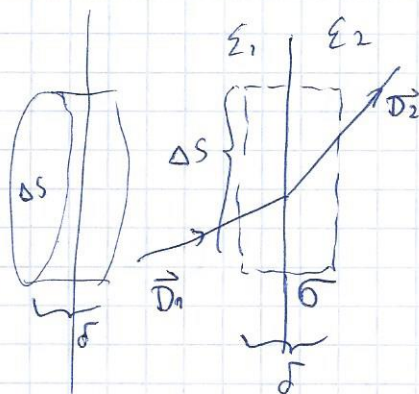
$$H_{2t} - H_{1t} = K$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

A $\vec{K}$ a $\vec{H}$ -ban merőleges irányú ugrást okoz, H_t -nek lehet ugrása, ha $\vec{K} \neq \vec{0}$. Ha $\vec{K} = \vec{0}$, akkor $H_{2t} = H_{1t} \rightarrow$ nincs ugrás.

A felület síkjában folyó áram ($\vec{K}$) esetén a felületi áramsűrűségnek megfelelően ugrik H_t .

Például egy teleres felületen hasonló jelenség lép fel.

2) Elektromos eltolás ($\vec{D}$)

Maxwell-3

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho \, dV$$

$$\underbrace{-D_{1n} \cdot \Delta S}_{\text{alaplapp}} + \underbrace{D_{2n} \cdot \Delta S}_{\text{fedlapp}} + \underbrace{\mathcal{O}(\delta)}_{\text{palást } \delta \rightarrow 0} = \sigma \cdot \Delta S \quad / : \Delta S$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

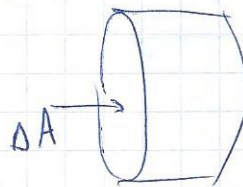
$\Delta S \neq 0$
de
 $V \rightarrow 0 \quad \delta \rightarrow 0$
miatt

Tehát ha a felületi töltéssűrűség σ , akkor az elektromos eltolás normális komponense az anyaghatáron σ -val ugrik.

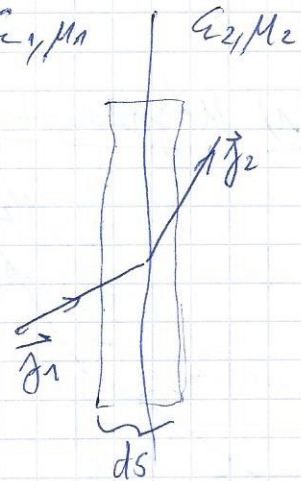
Például egy kondenzátor felületén jellemző a jelenség.

3/ Áramsűrűség ($\vec{j}$)

$$\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV$$



$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \rho = \sigma$$



$$-j_{1n} \cdot \Delta A + j_{2n} \cdot \Delta A = - \frac{\partial \sigma}{\partial t} \cdot \Delta A \quad | : \Delta A$$

$$j_{2n} - j_{1n} = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Az áramsűrűség normális irányú ~~komponense~~ az időegység alatt megváltozott töltéssűrűség mértékével ugrik anyaghatáron.

9. tétel

Maxwell 1,2 (diff. alak):

$$1. \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad | \cdot \vec{E} \rightarrow -\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$2. \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad | \cdot \vec{H} \rightarrow \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\underbrace{\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}}_{\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})} = \underbrace{-\vec{E} \cdot \vec{j}}_{\substack{\uparrow \\ \text{alapegyenlet}}} - \underbrace{\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial w}{\partial t}}$$

1) w

$$[w] = \frac{1}{m^3} \quad \text{az EM-tér energiasűrűsége}$$

specialis eset: lineáris elektromos és mágneses tér

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \epsilon \cdot \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \mu \cdot \vec{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \epsilon \cdot \vec{E} \cdot \vec{E}}_{E^2} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \cdot \vec{H} \cdot \vec{H}}_{H^2} \right)$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m)}$$

2) $\vec{E} \cdot \vec{j}$

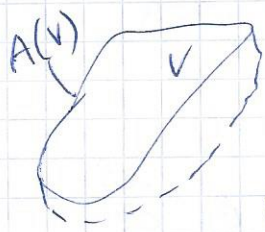
$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_b) \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j} - \sigma \cdot \vec{E}_b}{\sigma}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \left(\frac{1}{\sigma} \cdot \vec{j} - \vec{E}_b \right) \cdot \vec{j} = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{j}^2 - \vec{E}_b \cdot \vec{j}$$

3) Alapegyenletünk így néz ki most:

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} - \vec{E}_b \cdot \vec{j} + \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H})}$$

lokális energiamérleg



A lokális energiamezőből
 $\downarrow \int dV$

$$\underbrace{\int_V -\frac{\partial w}{\partial t} dV}_{V = \text{állandó}} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV - \int_V (\vec{E}_b \cdot \vec{j}) dV + \underbrace{\int_V \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) dV}_{\substack{\text{Gauss-Ostrogradskij} \\ \downarrow \\ \oint_{A(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{A}}}$$

$V = \text{állandó}$

$$-\frac{d}{dt} \int_V w dV$$

A térfogatban tárolt energia változási gyorsaságának (-1)-eszerese

$$-\frac{dW}{dt} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV - \int_V \vec{E}_b \cdot \vec{j} dV + \oint_{A(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{A}$$

globális energiamező,

Poynting-tétel

a, b, c, d,

a, Az EM-térben tárolt energia változási gyorsasága

$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{j^2}{\sigma}$

b, hőteljesítmény, joule-vesztesség $\rightarrow$ ténergia csökkenése, $\sim R \cdot I^2$

c, külső töltésmozgató hatás • áramcsűrűség

$\rightarrow E_z$ a külső (nem EM) erők munkája, azaz a beáplott teljesítmény

d, felületen keresztűl kisugárzott teljesítmény, veszteség

1) Poynting-vektor

Egységnyi felületen egységnyi idő alatt átáramló energia, azaz a felületegységen áthaladó teljesítmény.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$[\vec{S}] = \frac{W}{m^2}$$

$$P_s = \oint_A \vec{S} d\vec{A}$$

$$W = \int w dV$$

$$w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

10. tétel1) Lorentz-erő

- pontszerű objektumokra

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- gyakorlatban: kiterjedt testekre

erőssűrűség:

$$\vec{f} = \rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

$$\frac{Q}{\Delta V}$$

$$\frac{Q \cdot \Delta \vec{v}}{\Delta V} = \rho \cdot \vec{v}$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A \cdot \rho \cdot \Delta t \cdot v}{\Delta t}$$

$$\frac{I}{A} = j = \rho \cdot v$$

V térfogaton:

$$\vec{F} = \int_V \vec{f} dV$$

Nem használható jól a gyakorlatban, mert anyagjellemzők vannak az egyenletben, például:

$$\vec{f} = \underbrace{\rho_f \cdot \vec{E}}_{\text{szabad töltés}} - \underbrace{\frac{1}{2} E^2 \cdot \text{grad } \epsilon + \dots}_{\text{szabad áram}} + \underbrace{\vec{j} \times \vec{B} - \frac{1}{2} H^2 \cdot \text{grad } \mu + \dots}_{\text{anyaghatáron számolunk velük}}$$

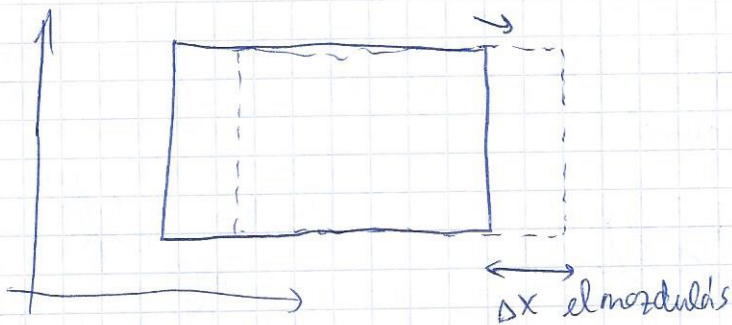
$$\vec{B} = \phi \Rightarrow \vec{F} = \vec{E} \cdot Q$$

$$\vec{E} = \phi \Rightarrow \vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Mivel a Lorentz-erő tígy merőleges $\vec{v}$ -re, ezért munkát nem végez!

↓
A mágneses tér egy mozgó töltés kinetikus energiáját nem változtatja meg.

2) Virtuális munka elve



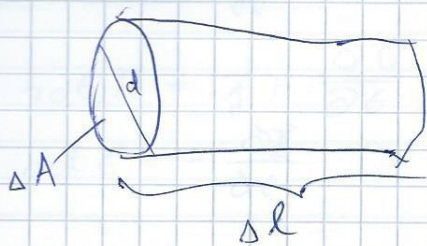
W_{EM} változik, mert az EM-tér munkát végez a testen

$$\Delta W_{EM} = -F_x \cdot \Delta x$$

Ha más erő nem játszik szerepet az elmozdításban, akkor:

$$F_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} - \frac{\Delta W_{EM}}{\Delta x} = \boxed{- \frac{\partial W_{EM}}{\partial x} = F_x}$$

Egy mágneses térben mozgó vezetőben a töltésekre hat a Lorentz-erő, ezért a vezető két vége között feszültség mérhető.

11. tétel

$$R = \frac{U}{I}$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta A}$$

↑
vezetőképesség

$$I = j \cdot \Delta A$$

$$U = E \cdot \Delta l$$

$$U = R \cdot I$$

$$E \cdot \Delta l = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta A} \cdot j \cdot \Delta A$$

↓

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}}$$

- Ehhez hozzáadódhatnak nem elektromágneses eredetű térerősségek ($\vec{E}_b$) és áramsűrűségek ($\vec{j}_b$) (beiktatott ...)
- A töltésekre hat egy nem elektromos eredetű $\vec{E}$.
- Beiktatott térerősség lehet például egy mágneses térben mozgó vezetőben fellépő $\vec{v} \times \vec{B}$ indukált elektromos térerősség. Másik példa egy kémiai eredetű telep diffúzió, ahol az $\vec{E}_b$ az elektrolitban lép fel és a töltéseket mozditja el az elektródák között.
- Így $\boxed{\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b)}$
- Beszélni kell még a beiktatott áramsűrűségről ($\vec{j}_b$), melyre jó példa a Van-de Graaf generátor, ahol nem folyik áram, de mégis mozognak a töltések, mert egy szalag hordozza őket. Így a végző képlet, differenciális Ohm-törvény:

$$\boxed{\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b}$$

12. tétel1) Maxwell-egyenletek differenciális alakja

I. $\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

III. $\text{div } \vec{D} = \rho$

II. $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

IV. $\text{div } \vec{B} = 0$

} Mezőhatások
nem értelmez-
hetők

2) Konstitúciós egyenletek, anyagegyenletek

• $\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$

• $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

• $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b$

3) Folytonossági (határ) feltételek

• $\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$

ugrása van

• $\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$

• $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$

ugrása van

• $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$

} normális
irány} tangenciális
irány4) Energia, erő

• $\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \epsilon \cdot \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \mu \cdot \vec{H}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

• $\vec{f} = \rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$

$$\uparrow$$
$$\frac{Q}{\Delta V}$$

$$\uparrow$$
$$\frac{Q \cdot \vec{r}}{\Delta V} = \rho \cdot \vec{r} = \vec{r}$$

ok-okozati összefüggés

5) Fennállnak még kezdeti feltételek is, illetve a kauzalitás.

Igy az egész egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása.

Ezt nevezzük egzisztencia és unicitás tételnek.

13. tétel

Az elektrodinamika modernizációja az időbeli változás sebessége szerint történik, így léteznek állandó, lassan változó illetve változó terek.

1) Statisztikus, stacionárius terek

- nincs, vagy elhanyagolható az időbeli változás $\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$
- például a hálózati 50 Hz hatások

• elektrosztatika

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Faraday:} & \text{rot } \vec{E} = 0 \rightarrow \text{örvénymentes} = \text{potenciális} \\ \text{Gauss(él.):} & \text{div } \vec{D} = \rho \rightarrow \vec{D} \text{ forrása a töltés} \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} & \text{lin. anyagokkal dolgozunk azt.} \end{array} \right.$$

fogalmak: elektróda, potenciál, kapacitás *

alkalmazás: nagyfeszültségű technika

• magnetosztatika $\vec{j} = 0$ $\vec{M}$ állandó mágneses tér

$$\left[\begin{array}{ll} \text{rot } \vec{H} = \vec{j} & \text{mest } \vec{j} = 0, \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \\ \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) & \rightarrow \text{permanens mágneses tér} \\ & \hookrightarrow \text{nem lin. fontos} \end{array} \right.$$

* homogén egyenletrendszer - konstans $\vec{M}$ a megoldása
inhomogén tag lesz, ha benne van az $\vec{M}$ $\rightarrow$ nem lesz 0 a megoldás

• Stacionárius dinamika

$$\left[\begin{array}{ll} \text{div } \vec{j} = 0 & \text{folytonossági egyenletből} \\ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b & \text{dinamikai leíró egyenletek} \end{array} \right.$$

fogalmak: ellendítés, áramkörök

alkalmazás: földelés, biztonság, mélyagyi stimuláció (DBS)
impedanciatomográfia / anató. képalkotás

• Stacionárius mágneses tér

- stacionárius áramok hozzák létre

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \vec{j} \\ \text{div } \vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}) \end{cases}$$

fogalmak: induktivitás, vektortencziál
mágneses török

alkalmazás: villamosenergia-átalakítók
(transzformátorok)

Stacionárius tér: egyirányú, csatolásban van az áramlási (3.) térrel, nincs rá visszahatással.

2) kvázistacionárius terek - lassú időbeli változás

• Örvényáramok tere Magneto kvázistat.

↳ eltérési áramok hatása elhanyagolható ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0$)

↳ mert a fémekben a vezetési áramsűrűség sokkal nagyobb, mint az eltérési áramsűrűség

$$|\vec{j}| \gg \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right|$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} + \vec{j}_b$$

E és M tér indukcióval csatolásban van.

fogalmak: időben szinuszosan változó terek, skin hatás, behatolási mélység

alkalmazás: villamos gépek, röntgensugárzás, anyagvizsgálat

• kvázistacionárius áramlás Elektrokvázistat.

↳ Az indukció csatolás elhanyagolható $\rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \approx 0 \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = 0$
kapacitív csatolás az eltérési áramok ellen van
alkalmazás: nagyfeszültségű szigetelőtechnika

3) Hullámterek

Hullámterjedés: a tér ferdeit nem jelennek meg az egyenletekben jellemzően lineáris közegek, szinuszos változás

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases}$$

fogalmak: komplex tervektor, síkhullám, TK, polarizáció, reflexió...

alkalmazás: antennák, hullámvezetők, optika, mikrohullámú eszközök, metamaterialok

sem chd, sem lap. csatolást nem hanyagoljuk el

14. tétel

ELEKTROSZTIKA

1) Alapegyenletek~~Elektrosztatika~~ Elektrosztatika: stacionárius terek

Az időbeli változás elhanyagolható, vagy nincs.

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$$

- Maxwell 2 - Faraday:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = 0}$$

Tehát az elektromos tér örvénymentes, másnéven potenciális, mert a rotációja 0.

- Maxwell 3 - el. Gauss:

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}$$
, tehát $\vec{D}$ forrása a töltés

- A kettő közötti összefüggés:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$$\hookrightarrow \rho_b = -\text{div } \vec{P}$$

$$\text{lineáris közegben: } \vec{P} \sim \vec{E}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \cdot \chi \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \underbrace{(1 + \chi)}_{\epsilon_r} \vec{E}$$

$$\vec{D} = \underbrace{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}_{\epsilon} \cdot \vec{E} = \boxed{\epsilon \cdot \vec{E} = \vec{D}}$$

Mivel $\text{rot } \vec{E} = 0$, ezért potenciális, tehát:

$$\boxed{\vec{E} = -\text{grad } \Phi} \quad (\text{mert } \text{rot grad } \Phi = 0)$$

elektromos skalárpotenciál
(következő felében bővebben)



2) Néhány alkalmazási terület

- nagyfeszültségű technika
- nagyfrekvenciás technika
- analógiaként a stationárius ^{mágneses térrel} ~~analógi~~ _{analógia}

15. tétel

$$\text{Elektrosztatikus t\acute{e}r} = \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \approx \phi}$$

↓

$$\text{Maxwell 2 - Faraday: } \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

1) Fogalma, bevezetése

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = \phi}$$

örvénymentes, potenciális

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi \quad (\text{mert } \text{rot}(\text{grad } \Phi) = \phi)$$

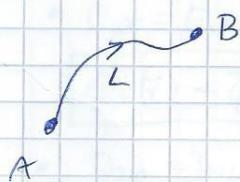
$\Phi :=$ elektromos skálárpotenciál

- Φ a t\acute{e}r minden pontjában tetsz\H{o}leges \u00e1lland\u00f3val eltelhet\u0151
- Φ egy addit\u00edv \u00e1lland\u00f3 erej\u00e9ig hat\u00e1rozatlan

$$\Phi'(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}) + k$$

$$\text{grad}(\Phi'(\vec{r})) = \text{grad}(\Phi(\vec{r})) + \underbrace{\text{grad}(k)}_{\vec{0}} = \text{grad}(\Phi(\vec{r}))$$

2) Fesz\u00fclts\u00e9g



$$\boxed{\int \text{grad } \Phi \, d\vec{e} = \Phi(B) - \Phi(A)}$$

gradiens vonalementi
integr\u00e1la (m\u00e1tel)

$$\underbrace{\int \vec{E} \, d\vec{e}}_{\text{elektromotoros}} = \int -\text{grad } \Phi \, d\vec{e} = \boxed{\Phi(A) - \Phi(B) = U_{AB}}$$

A \u00e9s B pontok k\u00f6z\u00f6tti
potenci\u00e1ll\u00f3n\u00f3bs\u00e1g $\rightarrow$ fesz\u00fclts\u00e9g

Az \u00fatvonalat\u00f3l csak akkor f\u00f3ggetlen, ha a t\acute{e}r \u00f3r\u00e9nymentes.
(potenci\u00e1lis)

csak a 2 végponttól függ

→

A potenciált egy referenciaponthoz képest vesszük (r_0)



$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Általában a referenciapontot a ∞ -ben vesszük fel, potenciálja a referenciapotenciál, azaz Φ ,
 ez az öltetés görbe felvétel

3) potenciál kapcsolata a térerősséggel:

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$\Downarrow$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$\rightarrow$ amiből $\vec{E}$ kiszámolható

Φ : skalárváltozó, csak egy leírása $\vec{E}$ -nek

$\vec{E}$: vektormennyiség

Φ : $\vec{E}$ potenciálja
 ekvivalenciaosztályt alkot
 egy eltolással nézve

16. tétel

$$\left[\begin{array}{l} \vec{E} = -\text{grad } \Phi \Rightarrow \underline{\text{rot } \vec{E} = 0} \quad \text{elektrosztatika: } \frac{\partial}{\partial t} \times \vec{B} \\ \text{div } \vec{D} = \rho \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (\text{lineáris közeg}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Maxwell-2: } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

$$\text{div } \epsilon \cdot \vec{E} = \rho \quad \rightarrow \epsilon \text{ kiemelhető, mert homogén az anyag}$$

$$\text{div}(-\epsilon \cdot \text{grad } \Phi) = \rho$$

$$-\text{div}(\text{grad } \Phi) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \rightarrow \quad \text{div}(\text{grad } \Phi) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\boxed{\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}}$$

Laplace-operátor

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

(fizikában például ugyanez van a hőmérsékleteloszláshoz)

A Δ -operátor anyaghatáron nem értelmezhető, mert a térnek ugrása van



Folytonossági feltételek Φ -re

$$\bullet \quad E_{2t} = E_{1t}$$

$$\boxed{\Phi_2(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) + K}$$

konstans

$$\underline{K := \Phi} \Rightarrow \Phi \text{ folytonos}$$

$$\bullet \quad D_{2n} = D_{1n} + \sigma$$

$$\left(\vec{n} \cdot \epsilon_2 \cdot (-\text{grad } \Phi_2) \right) = \vec{n} \cdot \epsilon_1 \cdot (-\text{grad } \Phi_1) + \sigma$$

$$; \quad \frac{\partial}{\partial n} := \vec{n} \cdot \text{grad} \dots$$

merőleges iránymenti derivált

$$\boxed{-\epsilon_2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\epsilon_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \sigma}$$

speciális esetben: $\underline{\sigma = 0}$

$$\boxed{\epsilon \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ folytonos az anyaghatáron}}$$

A Poisson-egyenlet „általános” megoldása:

↳ végtelen, homogén, lineáris közeg, ρ levegő, vákuum

• elemi megoldás:

ponttöltés: $\phi(\vec{r}) = Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

(Q az $\vec{r}'$ helyen van)

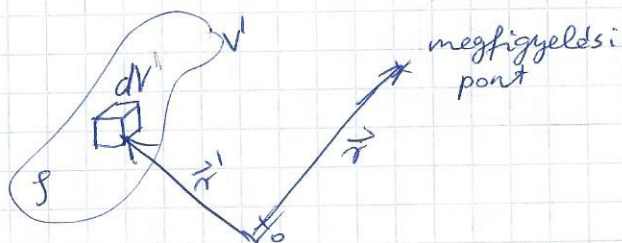
$\vec{r}$: megfigyelés.

$$\Delta \phi(\vec{r}) = - \frac{Q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}')}{\epsilon_0}$$

$$\downarrow \dots$$

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

• általános megoldás (szuperpozícióval)



$$Q \leftarrow \rho \cdot dv'$$

integrálva az egész téren:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}} \quad Q(\vec{r})$$

Körülmenyes a használata, mert ρ -t általában nem ismerjük előre, valamint az egyenlet megoldásához szükséges feltételek (végtelen, homogén, lineáris közeg) nem mindig állnak ~~fel~~ fenn.

17. tétel

Bilicz / 2.1; 2.2; 2.3 pl.

10-13. oldal

elektromos Gauss:

1) Gauss - tétel

$$\oint_{S(V)} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

$$\epsilon \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV$$

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon} \cdot \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon}$$

A potenciálteret mindig így kapjuk meg, hogy az elektromos térerősség kapott összefüggést integráljuk a ferrástól r távolságban lévő ponttól az r_0 referenciapontig.

$$\varphi = \int_r^{r_0} \vec{E}(r) \cdot d\vec{r}$$

$$r_0 \rightarrow \infty$$

$$\varphi(\infty) = \varphi$$

2) ponttöltés tere

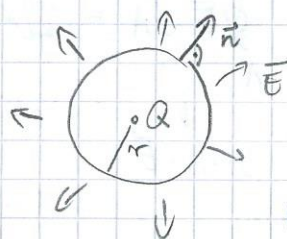
$$\text{VAGY } \varphi = - \int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Vákuumban elhelyezkedő ponttöltés
- Az el. térerősség vektor mindenhol merőleges a gömbhéjra, nagysága csak r -től függ.
- Gömbszimmetrikus elektromos tér,

$$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

Gauss:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_V \rho dV$$



$(\vec{r})$ a töltéstől a vizsgált pontba mutat

$$\epsilon_0 \cdot E(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 = Q$$

$$\vec{D} \parallel \vec{n} \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{n} \rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\varphi(r) = \int_r^{r_0} \frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\frac{Q}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

konvenció:

Ha r_0 referenciapontot a ∞ -be választjuk, akkor:

$$r_0 = \infty$$

$$\varphi(\infty) = \varphi$$

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= 0 + \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{r_0}^r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

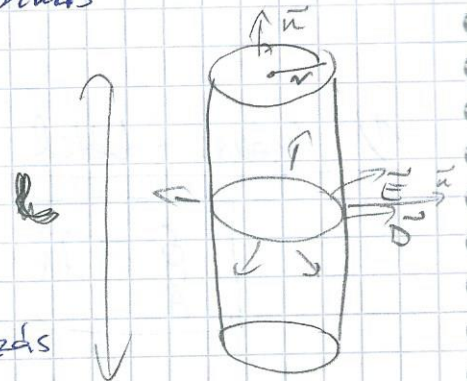
2) Végtelen hosszú egyenes vonaltöltés tere ; q töltéssűrűség

- A tér geometriája hengerszimmetrikus

Gauss:

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \underbrace{\int_V \rho dV}_{\text{henger térfogat}}$$

$\vec{n} \parallel \vec{E}$



- A henger palástjára merőleges $\vec{E} \Rightarrow$ szorzás

- A henger alapjainál párhuzamos $\vec{E} \Rightarrow \phi$ $\vec{n} \perp \vec{E}$

$$\epsilon_0 \cdot E(r) \cdot 2\pi r \cdot l = l \cdot q$$

$$E(r) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\phi(r) = \int_r^{r_0} E(r) dr = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

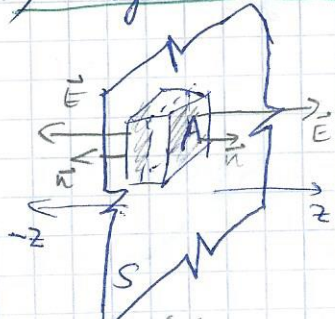
nem szükséges az egyenlőség

Válasszuk $r_0 = 1$ -et

$$\phi(r) = \phi(r_0) + \int_{r_0}^r \vec{E} d\vec{l} = \int_{r_0}^r \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{q}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

3) Végtelen kiterjedésű sík tere ; σ felületi töltéssűrűséggel

- Az $\vec{E}$ -vonalak merőlegesek a síkra, homogén tér



$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \underbrace{\int_V \rho dV}_{A \cdot \sigma}$$

$\vec{E} \perp A \Rightarrow \vec{E} \parallel \vec{n}$

$$2 \cdot A \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot A \cdot \sigma$$

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

A tér erőssége nem függ a távolságtól.

$$\phi(z) = \int_z^{z_0} E(z) dz = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z_0 - z) \quad (z_0 = \phi) \rightarrow \text{választás}$$

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z_0 - z)$$

$$\phi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|$$

$z > 0, z_0 > 0$ választás

$$\phi(z) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (z_0 - z)$$

$$\phi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z|$$

5) Számítási módszerek

Az el.sztat. feladatok megoldása egyértelmű adott elrendezés mellett, + potenciál feladatok

Tetszőleges elrendezés visszavezethető superpozícióval pont, vonaltöltések tereire. Alkalmazhatjuk a vektoris tükrözés módszerét is.

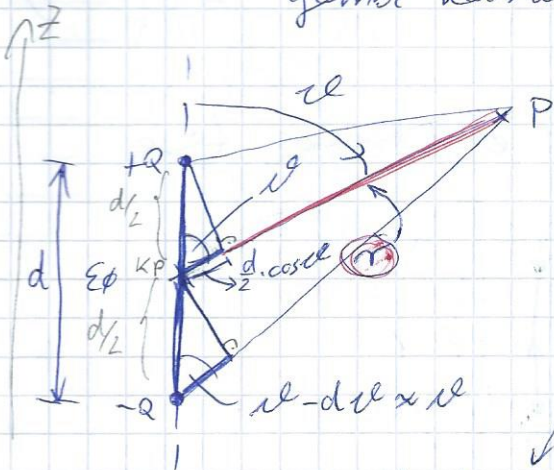
18. tétel

Sztatikus

töltésdipólus

1) potenciálter

gömbi koordináta-rendszerben

 $r \gg d$ 

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r}$$

$$\Phi(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos\theta} \right)$$

KP: a gömbi
koordináta-rendszerben
azaz

d^2 -es tag elhanyagolható a r^2 -es
névelésénél

távolság +Q-től

távolság -Q-től

$$\Phi(r) \approx \dots = \frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q \cdot d}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2}$$

- irányfüggő

- négyzetesen sugárfüggő

$\vec{p} = Q \cdot d$ dipólismomentum

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} =$$

$$|\vec{p}| = Q \cdot d \quad |\vec{p}| = p$$

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^3}$$

$$\rightarrow p \cdot r \cdot \cos\theta = \vec{p} \cdot \vec{r}$$

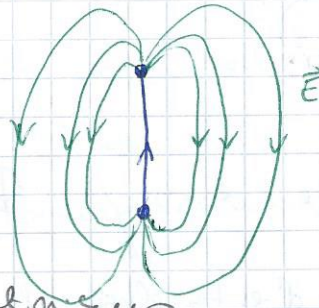


2) elektromos tere

$$\vec{E} = - \text{grad } \Phi_{r, \vartheta, \varphi} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \right)$$

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{P}{2\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^3} \\ E_\vartheta &= \frac{P}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^3} \\ E_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

dipólus elektromos tere



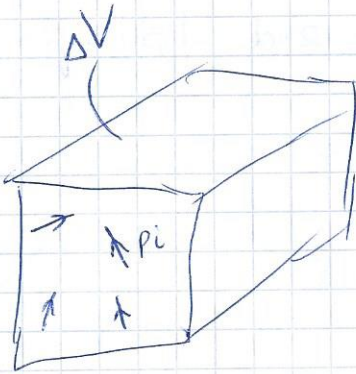
z tengelyre forgásszimmetrikus

3) EXTRA polarizáció - vektor, dipólusmomentum - sűrűség

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

↓ divergenciája a kötött töltéseket adja meg a szigetelőanyagban

$$\rho_b = - \text{div } \vec{P}$$

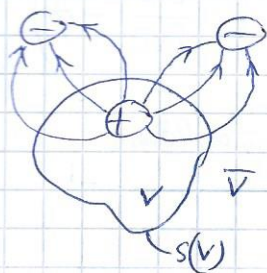


$$\vec{P} \triangleq \frac{\sum_i \vec{P}_i}{\Delta V}$$

AV-vel leszamalt

19. tétel

Például egy elrendezés:

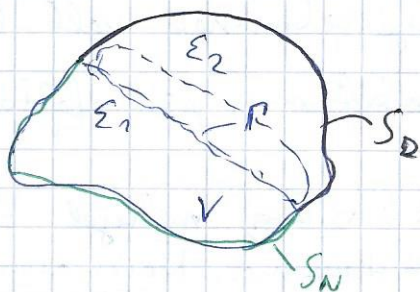


$\Rightarrow$



$S(V)$ peremre olyan feltételeket kell felírnunk, amik a kívül rekedt töltések ($\ominus$) hatását közvetítik.

Két szigetelőanyag határán:



$S_D \cap S_N = \emptyset$ diszjunktak

$S_D \cup S_N = S$

- Ha a térrészből kivesszük az anyaghatárt, akkor felírható rá a Laplace - Poisson - egyenlet:

$$\boxed{V \setminus \Gamma : \quad \Delta \Phi = - \frac{\rho}{\epsilon}} \quad (\text{nem érvényes a határfelületen})$$

- A határfelületre határfeltételeket kell felírnunk, hogy teljes legyen az egyenletrendszer. Tudjuk (16. tétel), hogy:

- $k = \phi$ esetén Φ folytonos

- $\sigma = \phi$ esetén $\epsilon \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n}$ folytonos a határon

Igy ezekre határfeltételeket írunk fel:

$$\left[\begin{array}{l} \rightarrow \Phi = f \text{ (előírt)} \rightarrow \text{Dirichlet határfeltétel } (S_D) \\ \rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = g \text{ (előírt)} \rightarrow \text{Neumann határfeltétel } (S_N) \end{array} \right.$$

S_D és S_N a tartományon (V) kívüli töltések hatását jellemzi.

- Az elektródokat célszerű kizárni V -ből és S_0 -nak felvenni, mert $\Phi = f$ előírt függvény.
- Ahol σ ismert, ott célszerű S_N -t felírni. ($\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \phi$)
↳ felületi töltéssűrűség

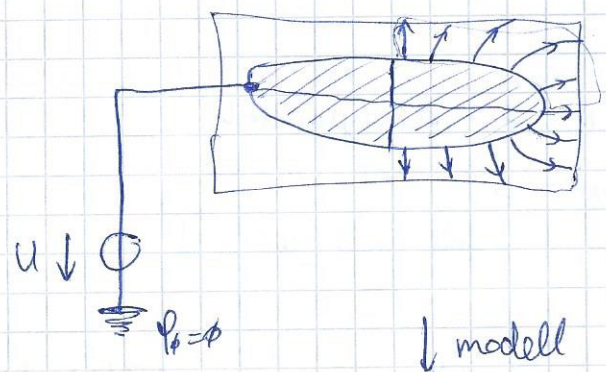
$\Gamma: S_0, S_N$, és $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ ($\forall \Gamma$) esetén a probléma megoldása egyértelmű.

→ csak egyetlen Φ elegeti ki a Poisson-t és a peremfeltételeket

- S_N -t általában szimmetriasíkra írunk elő.

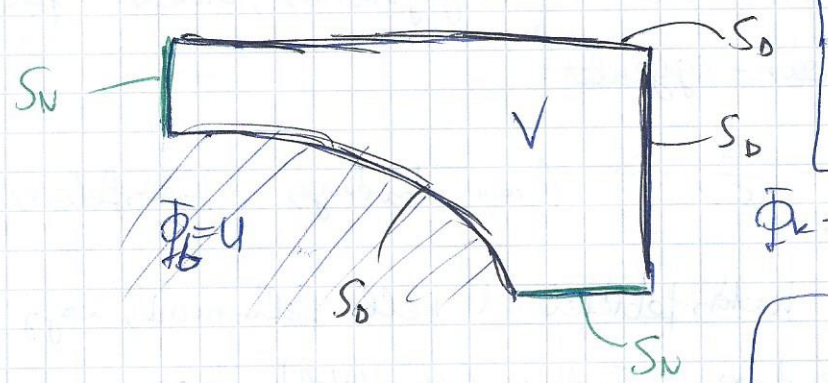
Példa:

∞ hosszú kábel U potenciálon



A par. diff. egyenletnek ($\Delta \Phi$) V -n egyértelműnek kell lennie ezért definiáljuk a peremfeltételeket.

A szimmetriasíkra, melyre $\vec{E}$ párhuzamos, Neumannt írunk fel, mert $E_{xt} = E_{xt}$



és így $E = \phi$, tehát $-\text{grad } \Phi = \phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \phi$$

Neumann!

$$\Phi_0 = U \quad \Phi_k = \phi$$

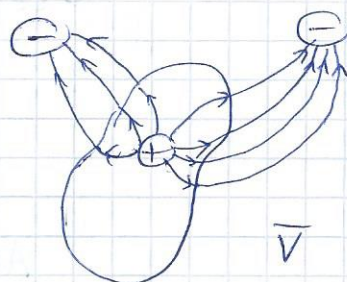
→ konstans → deriváltja $\phi \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \phi \Rightarrow S_N$

S_N : szimmetriasík

De a Dirichlet "szigorúbb", úgyhogy azt vesszük fel, ha ismerjük a potenciált.

20. tétel

Az elektródák tereit úgy számítjuk ki például, mint ha azt a terület a helyettesítő, fiktív töltések hozták volna létre.



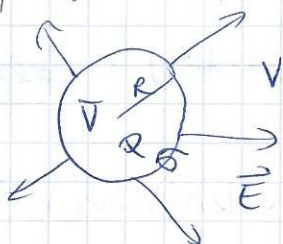
A fiktív töltéseket pösmfeldttelekekkel helyettesítjük (nem egyértelmű, ∞ sok elrendezés lehetséges)

Azt várjuk el a helyettesítő töltések rendszerétől, hogy az együttes potenciáljuk valamennyi elektródát konpotenciálissá tegye. ($\Delta \Phi = 0$ egyenletet ~~nem~~ kielégítik)

(konstans potenciált hoznak létre, így a pösmfeldtteleket is)

Példa: Horgóban álló töltött fémgömb

a) helyettesítő ponttöltéssel



$$E_r = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r > R \end{cases} \quad (\text{ponttöltés pösm})$$

↑
Gauss

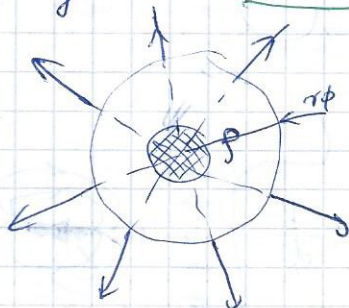


$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

✓ helyettesítés

gömb → ponttöltés
fémgömb → töltéstöltés

b) helyettesítő töltött szigetelő gömbbel:



$$r_0 < R \quad \text{ahol}$$

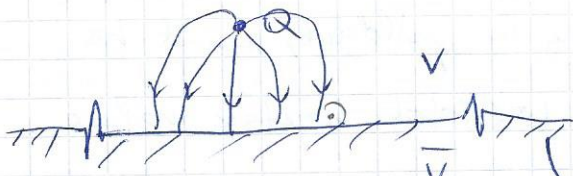
$$S = \frac{Q}{\left(\frac{4\pi r_0^3 \pi}{3} \right)}$$

↳ úgy választjuk meg

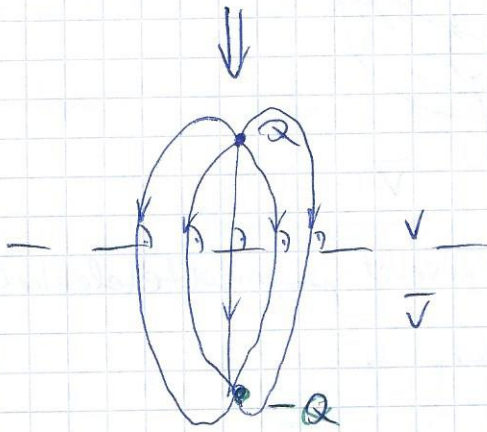
$$E_r = \begin{cases} \frac{S}{3\epsilon_0}, & r \leq r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r \geq r_0 \end{cases}$$

Töltéstüközés elve

a) ponttöltés + föld (∞ vezető) feltér)



$E_t = \phi \Rightarrow \Phi$ konstans
 mert $\vec{E}$ merőleges a felületre
 $\Phi := \phi$ Dirichlet



Az eredeti tér és a tükrözött tér hasonló, ha $-Q$ feltehetően van, sőt V -ben exakt módon meg is egyezik.

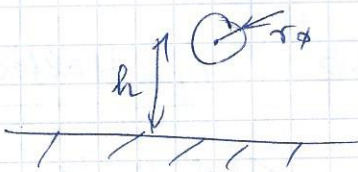
Ez azt jelenti, hogy kielégíti a

unicitás

- Poisson-egyenletet
- peremfeltételt (szimmetrikus)

b) Ezzel analóg problémák:

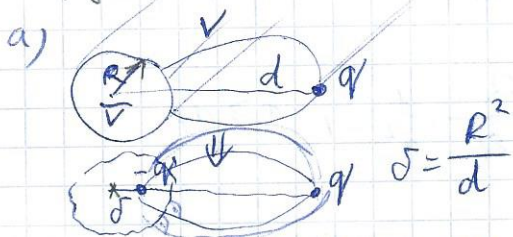
- töltés + fémlémez
- fémgömb (kis sugárú közelítéssel ponttöltés) + föld



Ha $r_0 \ll h$, akkor alkalmazható a kis sugárú közelítés, és használható Q ponttöltés helyettesítő töltéseknek.

$$\frac{r_0}{h} \leq \frac{1}{10}$$

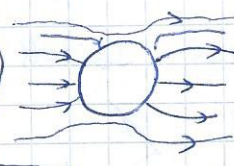
EXTRA: henger-tüközés, gömbi tüközés
 vonaltöltés + földet fémhenger
 - q : pozitív vonaltöltés



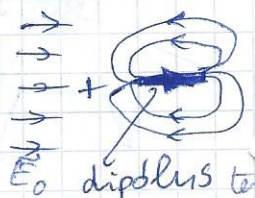
$$Q' = -Q \cdot \frac{R}{d}$$

$$d' = \frac{R^2}{d}$$

Dipólussal ^{hasonló} (tehát) ∞ vezető gömb homogén térben



az erővonalak a gömb felületére



$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{2n} - D_{1n} = \sigma \end{cases}$$

skalárpotenciál: $\boxed{\vec{E} = -\text{grad } \Phi}$

1) $\vec{E}$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$-\text{grad } \Phi_1 = -\text{grad } \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

↓

Φ folytonos anyaghatáron

2) $\vec{D}$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \vec{n} \cdot \vec{D}_1 + \sigma$$

$$\vec{n} \cdot \epsilon_2 \cdot (-\text{grad } \Phi_2) = \vec{n} \cdot \epsilon_1 \cdot (-\text{grad } \Phi_1) + \sigma$$

$$-\epsilon_2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = -\epsilon_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \sigma$$

$$\epsilon_1 \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \sigma$$

↓

$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ -nek ugrása van anyaghatáron,

ha $\sigma \neq 0$, akkor $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ folytonos.

20.

Hengeres tükörzés (folyt.)

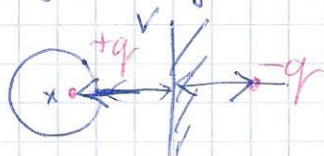
b) analóg problémák

- 2 henger ($-q$ és $+q$)



tűl. sugarú hengerek között is jó

- henger + föld



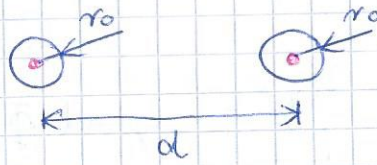
- vonaltöltés + semleges (elszigelt) flakbenger)



3 vonaltöltés térének szuperpozíciója

Gömbi tükrözés (folyt.)

b) analóg probléma: gömb + gömb
csak $r_0 \ll d$ kisugárzó közelítésnél



22. fejelet

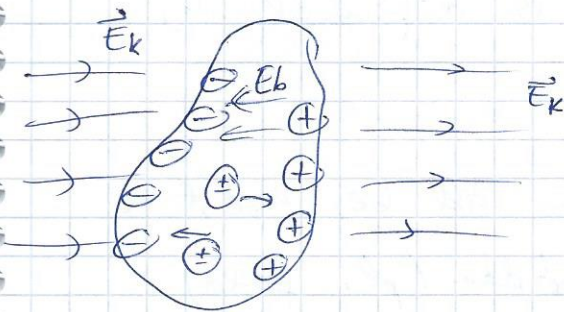
1) Vezetők viselkedése elsztat. térben

↳ vezeték és megjelölés

↳ szabad

↳ kötött töltések

- A vezetékben szabad töltések vannak, melyek a külső elektromos tér hatására elmozdulnak. Ezt nevezzük töltésmegosztásnak, influenciának.



A töltésmegosztás lecsatja a külső tér hatását. Az átrendeződés addig tart, amíg: $E_{küt} = E_{büt}$ lesz,

($\sim 10^{-19}$ s felekben)

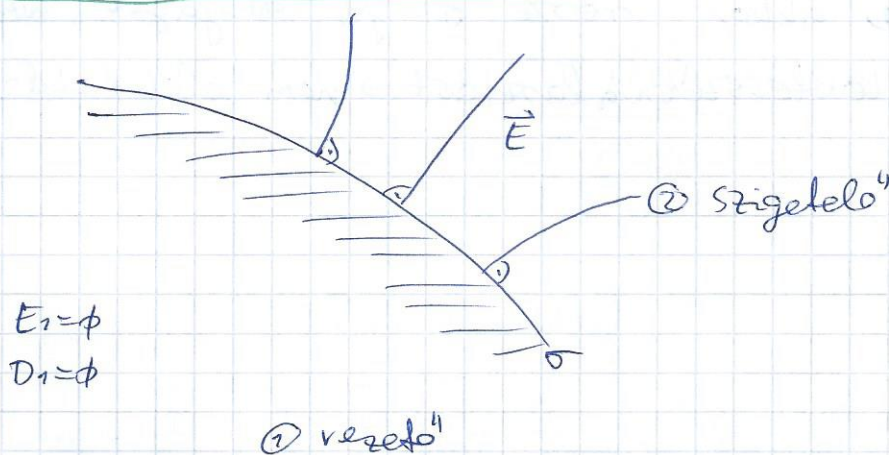
↳ lemegy a mozgás

Külső jó vezetékben hosszabb idő

↑
amíg a felületen
ellen a tér, van
az egyensúly

Az az anyag tekinthető elektrodinak, amely elegendő szabad töltést tartalmaz. Az anyag szílein felületi töltéssűrűség halmozódik fel. (Elegendő, hogy kompenzálja a külső teret)

2) Vezető - szigetelő határa



$$\left. \begin{array}{l} E_{zt} = E_{it} \\ E_t = \phi \end{array} \right\}$$

$$E_{zt} = \phi$$

→ Az elektromos térnek nincs tangenciális komponense a vezeték kívül.
Az erővonalak merőlegesen állnak ki a vezető anyagból

$$\left. \begin{array}{l} D_{zn} = D_{in} + \sigma \\ D_t = \phi \end{array} \right\}$$

$$D_{zn} = \sigma$$

→ A merőlegesen kilépő elektromos eltolás vektor a felületi töltéssűrűséggel egyenlő.

A vezető anyag (elektroda):

- elegendő szabad töltést tartalmaz
- elvipotenciális, azaz egy potenciál rendelkezhet hozzá.
- felületére merőleges az $\vec{E}$ és a $\vec{D}$
- sem benne, sem a felületén nem változik $\vec{E}$

Elektrodát a stat. áramlási ténél is definiálunk, pl. a földelés.

Elektrosztatikában egy statikus tér áll be, ezért a rosszabb σ -jú anyagok is elektrodák (pl. föld)

↳ vezetőképesség

Áramlási ténél a föld már nem elektroda, mert

$\sigma_{\text{földelés}} > \sigma_{\text{föld}} \Rightarrow$ a földelés az elektroda.

Ha nő a frekvencia, akkor rosszabb σ -jú anyagok nem tudják követni a töltésszétválasztást $\rightarrow$ nem elektrodák

áramlási tér $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$ vezetők telítődnek (jóval / rosszabb)

$$\sigma_{\text{vez}} \gg \sigma_{\text{szig}}$$

↓
vezet a közeg,

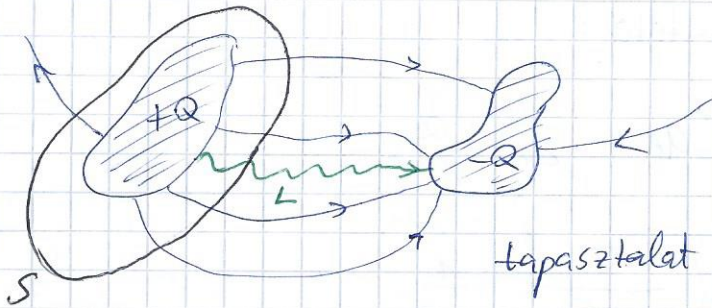
$$\frac{\sigma_{\text{elektroda}}}{\sigma_{\text{közeg}}} \geq 10^1 - 10^2$$

ha ugyan problémákban merülnek anyagok szigeteléséhez képest jóval nagyobb a vezetőképessége

23. tétel1) Kapacitás

- töltéstárolási képességet jelent

elektrodákon vizsgálva: ($\Phi \neq 0 \Rightarrow Q \neq 0$)



tapasztalat szerint: $U = \Phi^+ - \Phi^-$

$$U \sim Q$$

$\Downarrow$

$\frac{Q}{U}$

$$\frac{Q}{U} = \text{konstans}$$

$$C \triangleq \frac{Q}{U}$$

$$[C] = F$$

kapacitás definíciója

térelméleti definíció:

$$C = \frac{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

2) Energia (k db elektróda)

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_V \Phi \cdot \rho \, dV = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot \int_{V_k} \rho \, dV = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot \underbrace{\int_{S_k} \sigma \, d\vec{s}}_{Q_k}$$

$\uparrow$ (25. tételben) $k=2$

tehát: $W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot Q_k \stackrel{k=2}{=} \frac{1}{2} \cdot \Phi^+ \cdot Q + \frac{1}{2} \cdot \Phi^- \cdot (-Q) =$

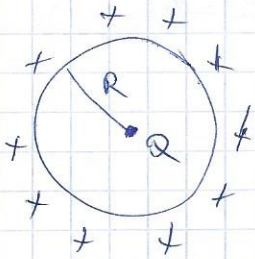
$$= \frac{1}{2} \cdot Q \cdot (\underbrace{\Phi^+ - \Phi^-}_U) = \boxed{\frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = W_e} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2}$$

$$C = \frac{2 \cdot W_e}{U^2}$$

gyakorlatban alkalmazható,

3) Önmagában álló elektróda eset

- Egy Q töltésű, gömb alakú elektróda értéke úgy számolható, hogy $r > R$. (R a gömb sugara)



Gauss-tétel:

$$\int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

↓

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \varphi(r_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} r_0 \rightarrow \infty \\ \varphi(r_0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$U = \varphi - \varphi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}} = \boxed{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r = C}$$

- Önmagában álló végtelen hosszú q vonaltöltés

$$E(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

Legyen $r_0 = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{1}{r}}$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{d}\right) = \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{1}{a} + \ln \frac{b}{d} \right) \end{aligned}$$

Két ilyen elektróda a és b sugárral, d távolságra egymástól:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left(\ln \frac{d}{a} - \ln \frac{b}{d} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{d^2}{ab}$$

$$\boxed{C' = \frac{2\pi \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{d^2}{ab}}}$$

$$Q = q \cdot l$$

superpoz.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a} + \left(-\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{d} \right)$$

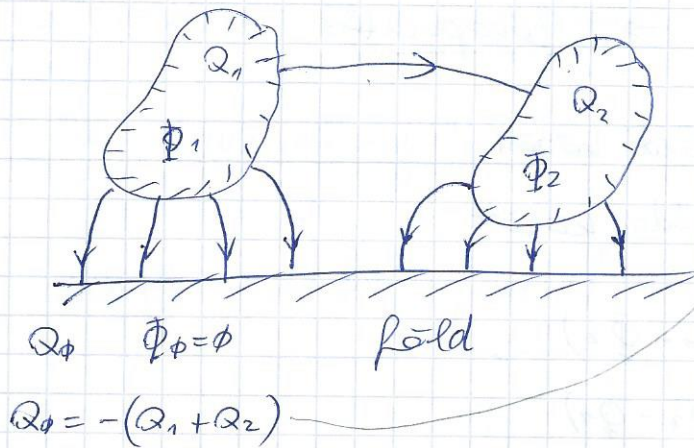
$$\begin{aligned} \varphi_1 &: a \text{ sugárú } \epsilon_0\text{-ban} \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{-q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{d}\right) &= \\ \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{d}\right) &= \\ = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{a} + \ln \frac{d}{a} &= \ln \frac{d}{a} \end{aligned}$$



24. tétel

több elektródaból álló rendszer: $k=0 \dots n$ ($n+1$ db)
 referencia = föld

példa: $n=2 \rightarrow 3$ elektróda, egyik a föld



$$\sum_{k=0}^n Q_k = 0$$

$$\begin{cases} \Phi_1 = p_{11} \cdot Q_1 + p_{12} \cdot Q_2 \\ \Phi_2 = p_{21} \cdot Q_1 + p_{22} \cdot Q_2 \end{cases}$$

p_{ik} függ a geometriától
 + anyagszerűsége
 és az anyagelrendezéstől

p_{ik} : potenciálegységhatár

$p_{ik} = p_{ki} \rightarrow$ töltésekben reciprokok

$$\underline{\Phi} = \underline{P} \cdot \underline{Q}$$

$$\underline{\gamma} = \underline{P}^{-1}$$

γ_{ik} : kapacitás együttható

$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$
 reciprokok

$$\underline{Q} = \underline{\gamma} \cdot \underline{\Phi}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \gamma_{11} \cdot \Phi_1 + \gamma_{12} \cdot \Phi_2 = \gamma_{11} \cdot \Phi_1 + \underbrace{\gamma_{12} \cdot \Phi_1 - \gamma_{12} \cdot \Phi_1 + \gamma_{12} \cdot \Phi_2}_{\Phi} \\ &= \underbrace{(\gamma_{11} + \gamma_{12})}_{C_{1\phi}} \Phi_1 - \underbrace{\gamma_{12}}_{C_{12}} (\Phi_1 - \Phi_2) \end{aligned}$$

$C_{1\phi}$ földkapacitás C_{12} kölcsönkapacitás

$$Q_2 = \gamma_{21} \cdot \Phi_1 + \gamma_{22} \cdot \Phi_2 = \dots = \underbrace{(\gamma_{21} + \gamma_{22})}_{C_{2\phi}} \Phi_1 - \underbrace{\gamma_{21}}_{C_{21}} (\Phi_2 - \Phi_1)$$

Ezek alapján:

részkapacitások:

- $C_{1\phi} = \sigma_{11} + \sigma_{12}$
 - $C_{2\phi} = \sigma_{21} + \sigma_{22}$
 - $C_{12} = C_{21} = -\sigma_{12} = -\sigma_{21} \rightarrow$ földkapacitás
- } $\rightarrow$ földkapacitások

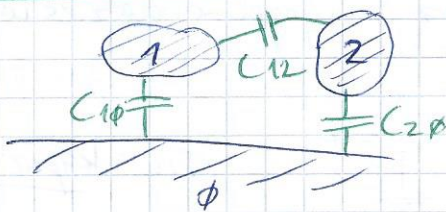
földkapacitások: elektróda - föld között

főkapacitás: két elektróda között

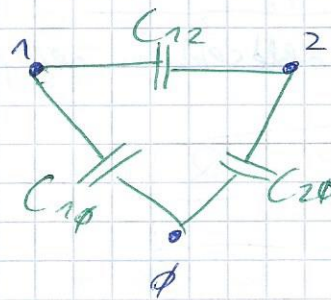
$$Q_1 = C_{1\phi}(\Phi_1 - \phi) + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$Q_2 = C_{2\phi}(\Phi_2 - \phi) + C_{12}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

Szemléltetés:



kapacitáshozzat reprezentáló
szenzenzáterek



Általánosán:

$$Q_i = C_{i\phi} \cdot (\Phi_i - \phi) + \sum_{k=1}^n C_{ik} \cdot (\Phi_i - \Phi_k) \quad (i=1, \dots, n)$$

↓
földkapacitás

↓
földkapacitás

$$C_{i\phi} = \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} \quad \text{földkapacitás}$$

$$C_{ik} = -\sigma_{ik} \quad \text{földkapacitás}$$

25. tétel

Vektoralizisból tudjuk, hogy: (elvileg), (de inkább nem), (kéne)

! $\boxed{\text{div}(a \cdot \text{grad } b) = \text{grad } a \cdot \text{grad } b + a \cdot \text{div}(\text{grad } b)}$

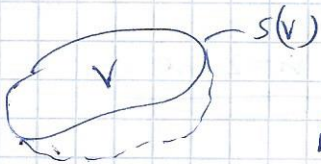
- végtelen, homogén, lineáris közegünk van (most: $a=b=\Phi$) (vákuum)
- a töltéssűrűség véges kiterjedésű, a végtelenben véges töltés van

$$W_e = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2 dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \int_V |\text{grad } \Phi|^2 dV$$

$a=b=\Phi$

$$\text{div}(\Phi \cdot \text{grad } \Phi) = |\text{grad } \Phi|^2 + \underbrace{\Phi \cdot \text{div}(\text{grad } \Phi)}_{\boxed{\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}}$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} \cdot \Phi$$



kifejezése,

Gauss-Osztrogradszkij

$$\boxed{\frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \int_V |\text{grad } \Phi|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \Phi \cdot \rho dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{S(V)} \Phi \cdot \text{grad } \Phi \cdot \vec{s} dS = W_e}$$

gömb környezete

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S(V)} \Phi \cdot \text{grad } \Phi \cdot \vec{s} dS = \phi \text{ mert: nagy távolságban}$$

$\rightarrow \sim$ ponttöltés

$$\Phi \sim \frac{1}{R}$$

$$\text{grad } \Phi \sim \frac{1}{R^2}$$

$$|S| \sim R^2$$

$\rightarrow 0$

$$\Phi \cdot \text{grad } \Phi \cdot s \sim \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot R^2 = \boxed{\frac{1}{R} \rightarrow \phi}$$

Ezért a teljes tényleg:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_V \Phi \cdot \rho dV$$

↑
elektromos
mezőben
tárolt energia

↑ ahol

töltés van, azokra a tartományokra vonatkozik

↑
elektrosztatikus

Elektródarendszer energiája:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int \Phi \cdot \rho \, dV$$

k . elektróda



$\Downarrow$ diszkrét

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot \int_{V_k \rightarrow \epsilon} \rho \, dV$$

$V_k \rightarrow \epsilon$: elektróda térfogata

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot \underbrace{\int_{S_k} \sigma \, dS}_{Q_k}$$

Így:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot Q_k$$

$\epsilon \rightarrow 1$ -től elég,
mert $\Phi_0 = \phi$ lenne

poténciálisokra nem
használható, mert a
körülé nem regularitása
van a poténciális helyén

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \Phi_1 \cdot Q_1 + \frac{1}{2} \cdot \Phi_2 \cdot Q_2 + \dots \quad \leftarrow \text{pl } n=2 \text{ -re}$$

$$= \left(\frac{1}{2} p_{11} \cdot Q_1^2 + \frac{1}{2} p_{22} \cdot Q_2^2 + \underbrace{p_{12} \cdot Q_1 \cdot Q_2}_{p_{12}=p_{21} \text{ reciprok}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \kappa_{11} \cdot \Phi_1^2 + \frac{1}{2} \kappa_{22} \cdot \Phi_2^2 + \underbrace{\kappa_{12} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2}_{\kappa_{12}=\kappa_{21} \text{ reciprok}}$$

$$W_e = \frac{1}{2} C_{1\phi} \cdot (\Phi_1 - \phi)^2 + \frac{1}{2} C_{2\phi} \cdot (\Phi_2 - \phi)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \cdot (\Phi_1 - \Phi_2)^2$$

Ugy viselkedik, mint ha 3 független kondenzátor
energiájának az összege lenne.

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\kappa_{11} + \kappa_{12}) \Phi_1 - \kappa_{12} \cdot \Phi_2 = \kappa_{11} \cdot \Phi_1 + \kappa_{12} \cdot \Phi_1 - \kappa_{12} \cdot \Phi_2 \\ Q_2 &= (\kappa_{21} + \kappa_{22}) \Phi_2 - \kappa_{12} \cdot \Phi_1 = \kappa_{21} \cdot \Phi_1 + \kappa_{22} \cdot \Phi_2 - \kappa_{12} \cdot \Phi_1 \end{aligned}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left(\kappa_{11} \cdot \Phi_1^2 + \kappa_{22} \cdot \Phi_2^2 - \kappa_{12} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 + \kappa_{21} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 + \kappa_{22} \cdot \Phi_1 \cdot \Phi_2 - \kappa_{12} \cdot \Phi_2^2 \right)$$

26. tétel

1) Alapegyenletek

Maxwell 1 - Ampère:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi$$

$$\text{div rot } \vec{H} = \text{div } \vec{j}$$

$$\text{div rot } \vec{H} = \phi \quad \text{vektoranalízis}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{j} = \phi} \rightarrow \text{ferrásmentes}$$

$$\text{folytonossági egyenlet:} \quad \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Maxwell 2 - Faraday

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = 0} \rightarrow \text{örvénymentes (potenciális)}$$

$$\boxed{\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b}$$

differenciális Ohm-tör

nem függ a közeg vezetőképességétől (például Van de Graaf generátor)

2) Tegyük fel, hogy egy zárt felületen $\vec{j}$ állandó, vagy a felület egy A részén állandó, a többin ϕ . $\vec{j}$ legyen a felületre merőleges.

$$\boxed{I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = j \cdot A}$$

• gömbi felületre:

$$\vec{j}_r(r) = \frac{I}{A} = \frac{I}{4\pi r^2} = \vec{j}$$

diff. Ohm-tör

$$\vec{E}_r(r) = \frac{1}{\sigma} \vec{j}_r(r) = \frac{I}{4\pi \sigma \cdot r^2} = \vec{E}$$

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \vec{E}_r(r) dr = \int_r^\infty \frac{I}{4\pi \sigma r^2} dr = \frac{I}{4\pi \sigma \cdot r} = \varphi(r)$$

$$U_{12} = \varphi(r_1) - \varphi(r_2) = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{I}{4\pi\sigma} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

$$G = \frac{I}{U} = 4\pi\sigma \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

$$I = U \cdot 4\pi\sigma \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}$$

• Vonalferrásra

$$j \cdot \underbrace{2\pi \cdot r \cdot l}_{\text{csak palást}} = I \rightarrow$$

$$j = \frac{I}{2\pi r l}$$

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{i}{2\pi\sigma}$$

$$(i = \frac{I}{l})$$

$$\varphi(r) = \frac{i}{2\pi\sigma} \cdot \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

A problématispus alkalmazható:

- földelésbiztosítások földelés, biztosítónál
- orvosi mérőeszközök DBS, rmpitom.
- minden távfény, ami nem EMT

fogalmak: ellenállás, áramkörök

27. tétel

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{j} = \rho$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\vec{E}_b, \vec{j}_b = 0$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

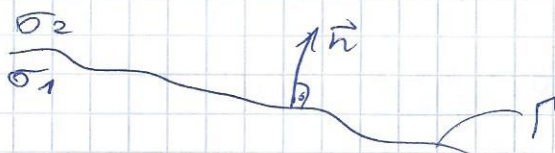
$$\text{div } \vec{j} = \rho$$

$$\text{div } (-\sigma \cdot \text{grad } \Phi) = \rho$$

$\downarrow$ σ állandó, ha homogén a közeg $\rightarrow$ osztunk vele

$$\text{div}(\text{grad } \Phi) = \rho$$

$$\Delta \Phi = \rho$$

Peremfeltételek

Maxwell 2
Faraday

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\hookrightarrow \Phi_2 = \Phi_1 + \text{konstans}$$

$$\hookrightarrow \Phi$$



$$\Phi \text{ folytonos}$$

$$\text{folyt. egyenlet} \quad \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV$$

$$j_{2n} = j_{1n} - \frac{\partial \rho_s}{\partial t}$$

$$j_{2n} = j_{1n}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$$

$$\vec{j} = -\sigma \cdot \text{grad } \Phi$$

$$-\sigma_2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\sigma_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

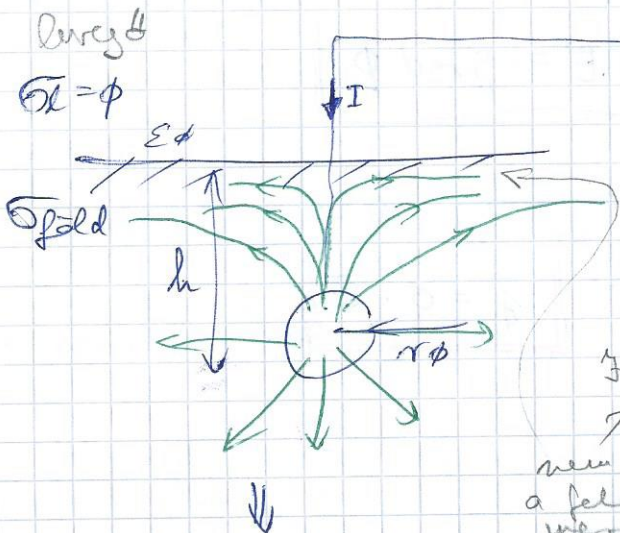
$\uparrow$
vezetőkép.



$$\sigma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ folytonos}$$

Példa

földbe ázott gém (földelés)



$h \gg r_{rod}$

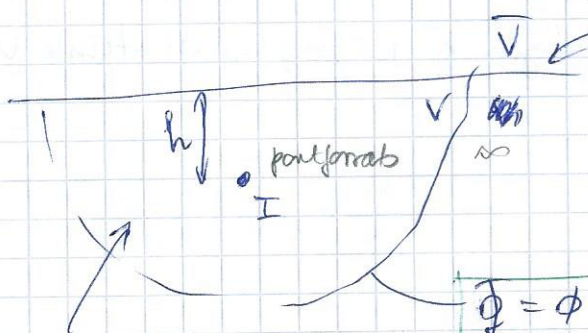
$\epsilon_1 : \epsilon_2$
 $\epsilon_{rod} : \epsilon_2$

$$J_{zu} = J_{in} =$$

nem lehet
a felületre
másképp
komponense

$$-\epsilon_2 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\epsilon_1 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$



$J_n = 0$ (nem folyik ki áram a földből)

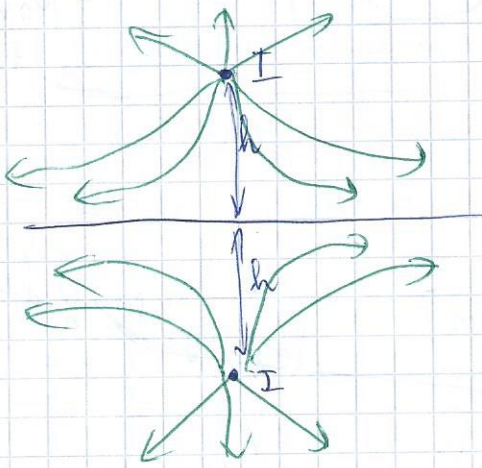
$$J_n = \vec{n} \cdot (-\sigma, \text{grad } \phi) \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

Neumann
homogen

$\phi = 0$ (Dirichlet a ∞ -ben)

V -ben: $\Delta \phi = 0$

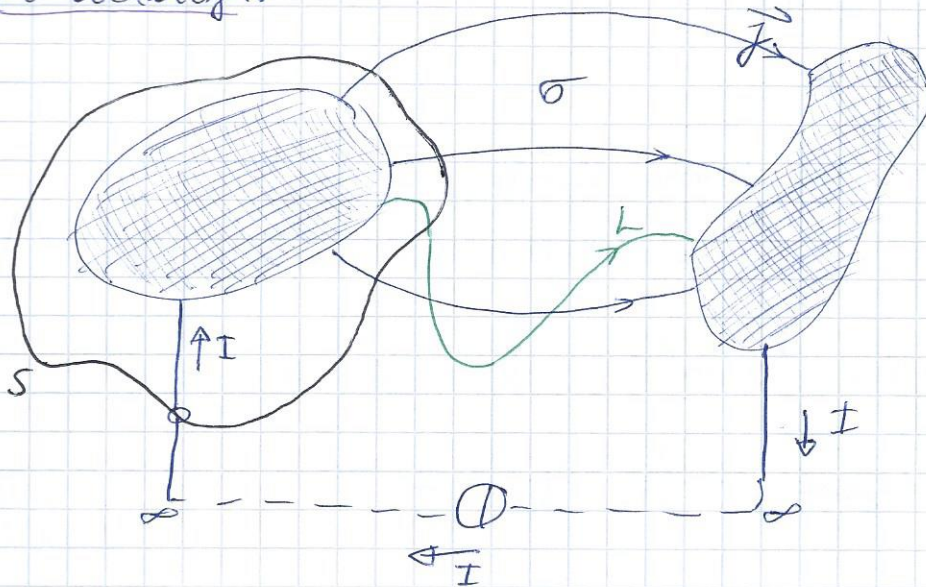
↓ tükörfarmás



A Neumann a szimmetria miatt teljesül.

28.étel

Az elektromos ellenállás az anyag azon tulajdonsága, amely az áram folyását gátolja és az $I^2 \cdot R$ villamos teljesítményt hővé alakítja.



vett elektróda

- $\vec{E}$ L szakaszon vett integrálja megadja U feszültséget:

$$U = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

- $\vec{j}$ S felületen (lyukas, a belső I áramot nem tartalmazza) vett integrálja megadja az áramot.

$$I = \oint_{S^o} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$U \sim I \Rightarrow$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$[R] = \Omega$$

ellenállás

$$G = \frac{I}{U}$$

$$[G] = S$$

konduktancia / vezetőség

$$R = \frac{\int_L \vec{E} \cdot d\vec{e}}{\oint_{S^o} \vec{j} \cdot d\vec{s}}$$

29. tétel

energia mérleg: (globális)

$$-\frac{dW}{dt} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV - \int_V \vec{E}_b \cdot \vec{j} dV + \oint_{A(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}$$

hőteljesítmény, joule-vesztesség

felfedezhetjük az összefüggést:

$$R \sim \frac{1}{\sigma} \quad \text{és} \quad I^2 \sim j^2, \quad \text{tehát}$$

$$I^2 \cdot R \sim j^2 \cdot \frac{1}{\sigma}, \quad \text{tudjuk, hogy } I^2 \cdot R \text{ veszteség.}$$

$$\frac{j^2}{\sigma} = \vec{j} \cdot \vec{E} \stackrel{\sim 1/2}{=} p$$

Ha $\vec{E}_b = \Phi$, akkor $\uparrow$

$$(\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) \text{ tagból jön})$$

$$[p] = \frac{W}{m^3} \quad \text{teljesítménysűrűség}$$

$$P = \int_V p dV = I^2 \cdot R$$

Az ellenálláson hő formájában eldisszipálódik.

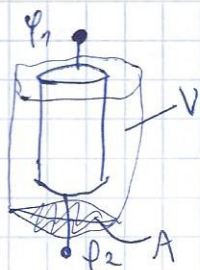
$\uparrow$ levezetése

$$\int_V p dV = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (\text{bal oldal})$$

$$\downarrow \quad R \triangleq \frac{\int_V p dV}{I^2}$$

$$I^2 \cdot R = \left(\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \right)^2 \cdot \frac{\int_V \vec{E} \cdot d\vec{V}}{\oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}} = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \cdot \int_V \vec{E} \cdot d\vec{V} \quad (\text{jobb oldal})$$

Legyen:

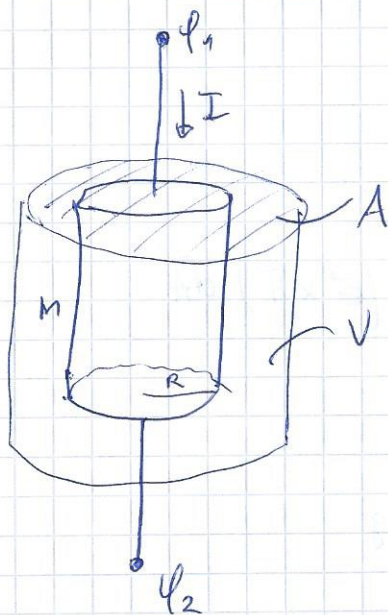


$\rightarrow R$ az alapkör sugara

$\rightarrow m$ a henger magassága

$\rightarrow \phi_1 - \phi_2$ feszültség esik az ellenálláson





- R az alapkör sugara
- m a henger magassága

Az egyenlet bal és jobboldala elvileg egyenlő:

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dV = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \cdot \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{j} \cdot \underbrace{R^2 \cdot \pi}_{\text{alap}} \cdot \underbrace{m}_{\text{magasság}} = \underbrace{\vec{j} \cdot R^2 \cdot \pi}_{\text{alap}} \cdot \vec{E} \cdot m$$

Tehát az egyenlet két oldala megegyezik.

Az eldisszipált teljesítményt az $I^2 \cdot R$ formula adja meg.

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} = U \cdot I$$

30. tételStacionárius áramlási térElektrosztatika

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{j} = \rho$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

$$\Delta \Phi = \rho \quad (\text{mindz})$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$(\vec{E}_b, \vec{j}_b = 0)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (\text{div } \vec{D} = \rho)$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

töltésmentes analógia van.

Akkor nevezzük két mennyiséget analógnak, ha azonos formájú diffegyenletek írják le őket és azonosak a peremfeltételek.

Peremfeltételek: elektroddák

$$\sigma_{\text{elektroda}} \gg \sigma_{\text{közeg}}$$

↓
ekvipotenciális felület

ekvipotenciális felület

Analógia

elektrosztatika	$\vec{E}$	$\vec{D}$	ϵ	Φ	C	(Q)
stac. áramlás	$\vec{E}$	$\vec{j}$	σ	Φ	G	(I)

pl.: $R = \frac{\epsilon}{\sigma \cdot l}$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad G = \frac{\sigma C}{\epsilon}$

fontos: azonos konfiguráció (geometria, peremfeltétel) mellett

~~Áramerősség~~

Lehet, hogy nem tudunk helyettesíteni pl $\epsilon - \sigma$ -t, mert nem létezik ilyen anyag. ϵ átfogása 2-3 nagyságrend, míg σ -é 30 nagyságrend.
 (széles körű analógia)

Ideális szigetelő: $\sigma = 0$, viszont $\epsilon = \infty$ nem létezik! $\Leftarrow$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{U} = \frac{\epsilon \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{U}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint \vec{j} \cdot d\vec{A}}{U} = \frac{\sigma \cdot \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}{U}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon} \end{array} \right.$$

$$G = C \quad \left| \begin{array}{l} \epsilon \ll \sigma \end{array} \right.$$

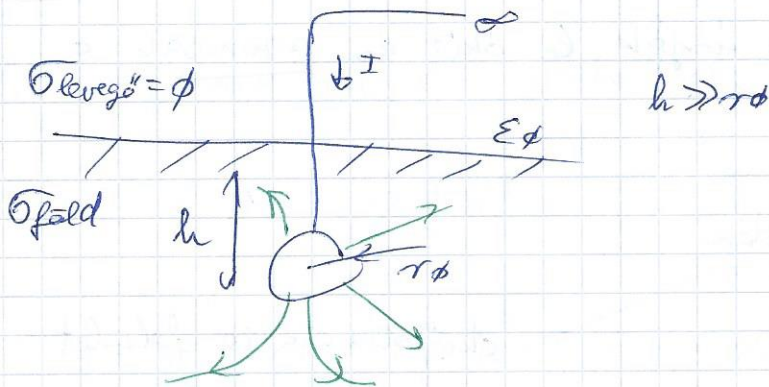
Tükrözés módszere

Az adott σ vezetőképességű közegben a tükrözés módszere úgy alkalmazható, hogy az ^{az} eredeti pólusfeltételeket kielégítő áramlási tétel eredményez.

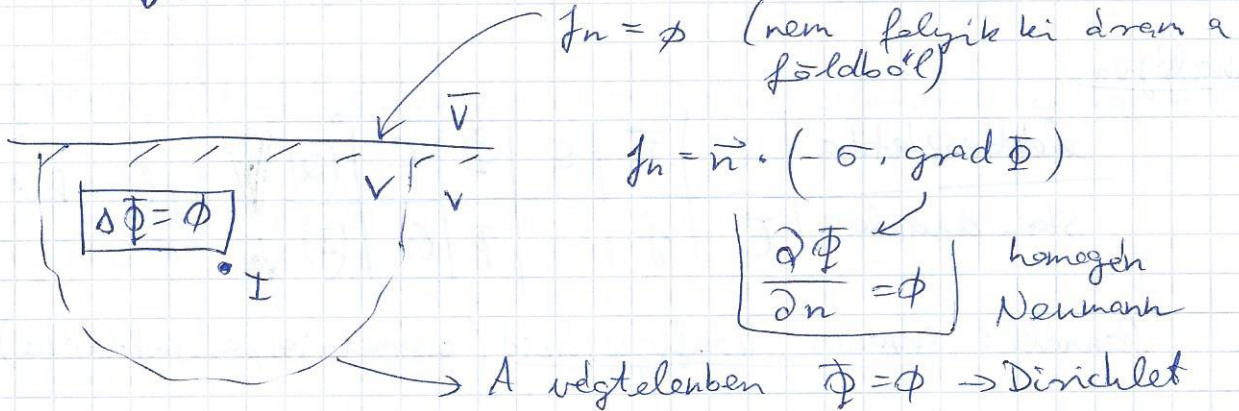
$$j_n = j_n \quad \text{és} \quad E_{zt} = E_{zt}$$

$\hookrightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \phi$

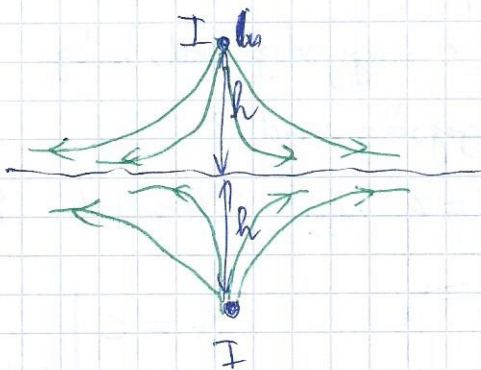
például földelés



↓ modell



↓ tükrözés



- homogen Neumann a szimmetria miatt teljesül

Alkalmazható, ha a két tér (V) egyet módon meggyezik.

KÉPLETEK

1) Fizikai alapok

- Coulomb-tör.

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2}$$

- Mágneses erőtv.
(Biot-Savart, Ampère)

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{|I_1 \cdot I_2| \cdot l}{d}$$

- töltésre vonatkozó folytonossági egyenlet

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

2) EM-teret leíró vektormezők

- $\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

ponttöltés:

$$E_r(r) = \vec{e}_r \cdot \frac{Q_p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

vonaltöltés:

$$E_r(r) = \vec{e}_r \cdot \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

slaplap:

$$E_z(r) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \vec{e}_z$$

- $\vec{B}$

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (\vec{E} = 0)$$

$$|B| = \frac{|F|}{I \cdot l}$$

vezető:

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \cdot \vec{e}_\varphi$$

- $\vec{D}$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_f$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_f$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f$$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

• $\vec{H}$

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_b + \frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$$

$$\vec{j}_b = \text{rot } \vec{M}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

• Maxwell-egyenletek

integrális

differenciális

gerj:
(Ampère)

$$\oint_{L(\vec{r})} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ind:
(Faraday)

$$\oint_{L(\vec{r})} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Gauss:

$$\int_{S(\vec{r})} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int \rho \, dV$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

mágn. Gauss:

$$\int_{S(\vec{r})} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \phi$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

• folytonassági feltételek

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

$$B_{2n} - B_{1n} = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$H_{2t} - H_{1t} = \vec{k}$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{k}$$

$$E_{2t} - E_{1t} = 0$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

• differenciális Ohm-törvény

$$\vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b$$

- Energiaátalakulások EM-térben

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m)$$

lokális E-ménleg:

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{j^2}{\sigma} - \vec{E}_b \cdot \vec{j} + \text{div}(\vec{E} \times \vec{H})$$

globális E-ménleg:
(Poynting-tétel)

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV - \int_V \vec{E}_b \cdot \vec{j} dV + \oint_{A(V)} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}$$

Poynting-vektor:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

- EM-tér által kifejtett erő

pontoszerű objektum:

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

erőssűrűség:

$$\vec{f} = \rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

virtuális munka:

$$-\frac{\partial W_{EM}}{\partial x} = F_x$$

3) Elektrodinamika felosztása

- elektrosztatika

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad \vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

- magnetosztatika

$$\text{rot } \vec{H} = 0 \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$$

- stacioner áramlás

$$\text{div } \vec{j} = 0 \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \quad \vec{j} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{E}_b) + \vec{j}_b$$

- stacioner mágneses tér

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$$

- örményáramok tere

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} + \vec{j}_b$$

- hullámterjedés

$$\text{rot } \vec{H} = \epsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

4) Elektrosztatika

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

• dipólus tere:

$$\Phi_p = \frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^2}$$

$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\cos(\varphi)}{r^3}$$

$$E_\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{r^3}$$

$$E_\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{r^3}$$

• Laplace-Poisson

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

megoldása:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int \frac{\rho(\vec{r}') \cdot dV}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \rho_V(\vec{r})$$

• energija

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho dV + \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot \int_{S(V)} \Phi \cdot \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_V \Phi \cdot \rho dV$$

• elektrodarendszer

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_k \Phi_k \cdot Q_k$$

kapacitás:

$$C = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{s}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{l}}$$

$$C = \frac{2 \cdot W_e}{U^2}$$

kondi E:

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

• n sz kapacitások:

$$Q_i = C_{i0} \cdot \Phi_i + \sum_{k=1}^n C_{ik} \cdot (\Phi_i - \Phi_k)$$

$$\hookrightarrow C_{ik} = -\gamma_{ik} \quad f''$$

$$\hookrightarrow C_{i0} = \sum_{k=1}^n \gamma_{ik} \quad \text{föld}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \Phi_k \cdot Q_k$$

• peremértékek

$$\text{Neumann: } S_n: \frac{\partial \Phi}{\partial n} = g$$

$$\text{Dirichlet: } S_D: \Phi = f$$

5) Stacionárius áramlási té

- Laplace

$$\Delta \Phi = \rho$$

- határfeltételek:

$$\Phi \text{ folytonos, } \sigma \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ folytonos}$$

- ellendülés

$$R = \frac{\int_V \vec{E} \cdot d\vec{e}}{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}}$$

- vesztesség

$$P = \frac{j^2}{\sigma} \quad P = \int_V p \, dV$$

- analógia

eszköz	$\vec{E}$	$\vec{B}$	ϵ	Φ	C
stac. dr	$\vec{E}$	$\vec{j}$	σ	Φ	G

6) Stacionárius áramlási mágneses tere

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\psi_s \triangleq \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{e}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \int_V \vec{A} \cdot \vec{j} \, dV$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{j} \quad \text{Poisson (vektoriális)}$$

mágneses dipólus:

$$\vec{r} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{L}_m = I \cdot \vec{s}$$

megoldása:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, dV$$

- energia:

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \sum_k I_k \cdot \psi_k$$

- Biot-Savart:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \cdot \oint \frac{d\vec{e} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- indukció - eltek

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{\psi_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$L = \frac{\psi_s}{I}$$

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2 \rightarrow L = \frac{2 W_m}{I^2}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot I_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot I_2^2 + M \cdot I_1 \cdot I_2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{kj} \cdot I_k \cdot I_j$$

- indukálási jelenségek

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} - \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \text{egyesített indukáló tör.}$$

7) Tárvvezetékek

- Lecher:

$$C' = \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}$$

$$L' = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{d}{r_0}\right)$$

$$G' \propto \phi$$

- koax:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

- távvezeték egyenletek

$$-\frac{\partial u}{\partial z} = R' \cdot i + L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = G' \cdot u + C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

- hullámegyenlet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \cdot G' \cdot u + (R' \cdot C' + L' \cdot G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

id. TV
1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' \cdot C' \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- 1D Helmholtz

$$\frac{d^2 \bar{u}(z)}{dz^2} - \bar{\gamma}^2 \cdot \bar{u}(z) = 0$$

alt. m. o.

$$\bar{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

$$\bar{u}(z) = \bar{u}^+ \cdot e^{-\bar{\gamma}z} + \bar{u}^- \cdot e^{\bar{\gamma}z}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$\bar{I}(z) = \frac{\bar{u}^+}{z_0} \cdot e^{-\bar{\gamma}z} - \frac{\bar{u}^-}{z_0} \cdot e^{\bar{\gamma}z}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} =$$

- ideális TV

$$\gamma = j\omega \sqrt{L' \cdot C'}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$$

- x-es koordináta-rendszer

$$U(x) = U_2^+ \cdot e^{\gamma x} + U_2^- \cdot e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} \cdot e^{\gamma x} - \frac{U_2^-}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x}$$

- reflexiótenyező

$$|\Gamma_2| \leq 1 \quad \Gamma \triangleq \frac{U_{\text{reflektált}}}{U_{\text{beeső}}} = \frac{U_2^-}{U_2^+} = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = r_2$$

- haladó hullám - állóhullám felbontás

$$U(x) = U_2^+ \cdot (1 - r) \cdot e^{j\beta x} + 2 \cdot U_2^+ \cdot r \cdot e^{-j\varphi} \cdot \cos(\beta x + \varphi)$$

- állóhullámarány

$$\sigma \in [1, \infty[\quad \sigma = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1 + |r_2|}{1 - |r_2|}$$

- Láncparaméterek

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \text{ch}(\gamma l) & Z_0 \cdot \text{sh}(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \cdot \text{sh}(\gamma l) & \text{ch}(\gamma l) \end{bmatrix} \stackrel{\text{id.}}{=} \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & j \cdot Z_0 \cdot \sin(\beta l) \\ \frac{j}{Z_0} \cdot \sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} \quad e^{\gamma l} = A_{11} + \sqrt{A_{12} \cdot A_{21}}$$

- T helyettesítés

$$Z_a = Z_0 \cdot \frac{\text{ch}(\gamma l) - 1}{\text{sh}(\gamma l)}$$

$$Z_b = \frac{Z_0}{\text{sh}(\gamma l)}$$

- Π helyettesítés

$$Y_c = \frac{1}{Z_0 \cdot \text{sh}(\gamma l)}$$

$$Y_d = \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{\text{ch}(\gamma l) - 1}{\text{sh}(\gamma l)}$$

- Z_{BE}

$$Z_b \stackrel{\text{id.}}{=} Z_0 \cdot \frac{Z_2 + j Z_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + j Z_2 \tan(\beta l)}$$

$$Z_0 = \sqrt{Z_{Büj} \cdot Z_{Brz}} \quad \tan(\beta l) = \sqrt{\frac{Z_{Brz}}{Z_{Büj}}}$$

8) Síkhullámok

• Maxwell

$\text{rot } \vec{H} = \sigma \cdot \vec{E} + \varepsilon \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\text{div } \vec{H} = \phi$
$\text{rot } \vec{E} = -\mu \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$	$\text{div } \vec{E} = \phi$

• vektoriális homogén hullámegyenlet

$\Delta \vec{E} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \phi$
$\Delta \vec{H} - \mu \cdot \sigma \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \phi$

• 1D Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial z^2} - \gamma^2 \cdot \vec{E}_x = \phi$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu \cdot (\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

↓ alt. mo.

$$z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

$\vec{E}_x(z) = E^+ \cdot e^{-\gamma z} + E^- \cdot e^{\gamma z}$
$H_y(z) = \frac{E^+}{z_0} \cdot e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{z_0} \cdot e^{\gamma z}$

• analógia

TV	U	I	R'	L'	G'	C'
SH	E_x	H_y	-	μ	σ	ε

• polarizáció

$$\text{alt.} \quad \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - \frac{2 \cdot E_x \cdot E_y \cdot \cos(\varphi)}{E_{x0} \cdot E_{y0}} = \sin^2 \varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}: \quad \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = 1$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ és } E_{x0} = E_{y0} = E_0$$

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$$

$$\varphi = \pi \quad \frac{E_x}{E_{x0}} + \frac{E_y}{E_{y0}} = \phi$$

• teljesítmény

$$P = \frac{1}{2} \cdot E^+ \cdot H^+ \cdot dx dy$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \cdot \vec{E} \times \vec{H}^*$$

• energiateljesítmény

$$\bar{S}(r, \varphi) = \frac{|I|^2 \cdot \omega^2 \cdot l^2 \cdot Z_0}{32\pi^2 \cdot c^2} \cdot \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}$$

• antennajellemzők

iránykarakterisztika

$$3D: h(\varphi, \psi) = \frac{E(r=r, \varphi, \psi)}{\max_{\varphi', \psi'} [E(r=r, \varphi', \psi')]}$$

$$h^{dB} = 20 \lg h$$

$$2D: h(\varphi) = \frac{E(r=r, \varphi)}{\max_{\varphi'} [E(r=r, \varphi')]}$$

$$h_{HD} = |\sin(\varphi)|$$

sugárzási ellenállás

$$R_s = \frac{2 \cdot P_s}{I^2} \stackrel{HD}{=} \frac{2 \cdot \frac{I^2 \cdot l^2 \cdot \beta^2 \cdot Z_0}{12\pi}}{I^2} = 80\pi^2 \cdot \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \Omega$$

irányhatás

$$D = \frac{S_{max}}{S_{\text{átlag}}} = \frac{\max[S(r, \varphi, \psi)]}{P_s / 4\pi r^2}$$

$$D = G_{HD} = 1,5$$

antennanyerés

$$G = \frac{S_{max}}{S_{\text{beáramló}}} = \frac{\max[S(r, \varphi, \psi)]}{P_{be} / 4\pi r^2}$$

$$G^{dB} = 10 \lg G$$

hatásos felület

$$A = \frac{P_{R(ell)}}{S_\phi}$$

$$A_{HD} = \frac{3\lambda^2}{8\pi}$$

$$S_\phi = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{120\pi}$$

• átviteli egyenlet

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi r^2} \cdot G_T \cdot A_R = \frac{P_T \cdot \lambda^2}{16\pi^2 r^2} \cdot G_T \cdot G_R$$

- behatolási mélység

$$\delta \cong \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

$$\gamma = \frac{1+j}{\delta} \quad Z_{\phi} = \frac{1+j}{\sigma \cdot \delta} \quad Z_{\phi} = \frac{\delta}{\sigma}$$

- skin-hatás

$$|\vec{H}(z)| = |\vec{H}_0| \cdot e^{-\frac{z}{\delta}}$$

- teljesítményszempok

$$P + jQ = \frac{l \cdot d \cdot \sigma \cdot \delta}{4} \cdot |E^+|^2 \cdot (1+j)$$

- hengeres vezetők ellenállása

$$\delta > r_0 \rightarrow R_{\phi}' = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{r_0^2 \pi}$$

$$\delta \leq r_0 \rightarrow R_{\phi}' = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{2 r_0 \pi \cdot \delta}$$

9) Hertz-dipólus

$$\vec{H}_{\phi}(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{c \cdot r} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$$\vec{E}_r(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{2}{j\omega r^3} + \frac{2}{c \cdot r^2} \right) \cdot \cos(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$$\vec{E}_{\varphi}(r, \varphi) = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{j\omega r^3} + \frac{1}{c \cdot r^2} + \frac{j\omega}{c^2 r} \right) \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

távoltér

$$\vec{H}_{\phi} = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi} \cdot \frac{j\omega}{c \cdot r} \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

$$\vec{E}_{\varphi} = \frac{\vec{I} \cdot l}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{j\omega}{c^2 r} \cdot \sin(\varphi) \cdot e^{-j\omega \frac{r}{c}}$$

- időfüggvény

$$H_{\phi}(r, \varphi, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi c} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

$$E_{\varphi}(r, \varphi, t) = \frac{I_0 \cdot l \cdot \omega}{4\pi \epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{r} \cdot \cos(\omega t - \beta r)$$

$$\eta \cong 377 \Omega$$