

Dr. Kuczmann Miklós
JELEK ÉS RENDSZEREK

Dr. Kuczmann Miklós

JELEK ÉS RENDSZEREK

Z

UNIVERSITAS-GYŐR Kht. ♦ Győr, 2005



SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
MŰSZAKI TUDOMÁNYI KAR
TÁVKÖZLÉSI TANSZÉK

Egyetemi jegyzet

Írta: **Dr. Kuczmán Miklós**
egyetemi adjunktus, PhD
Széchenyi István Egyetem

Lektorálta: **Dr. Keviczky László**
egyetemi tanár, akadémikus
Széchenyi István Egyetem
Dr. Ständeisky István
főiskolai docens
Széchenyi István Egyetem

© UNIVERSITAS-GYŐR Kht., 2005
© Dr. Kuczmán Miklós, 2005

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a mű bővített, illetve rövidített változata kiadásának jogát is. A kiadó írásbeli hozzájárulása nélkül sem a teljes mű, sem annak része semmiféle formában nem sokszorosítható.

ISBN

Kiadja az UNIVERSITAS-GYŐR Kht. Felelő kiadó dr. Szekeres Tamás.
Műszaki szerkesztő Fehérvári Arnold.
Készült a Palatia Nyomda és Kiadó Kft. nyomdájában. Felelős vezető Radek József.

Előszó

A könyv a Széchenyi István Egyetem villamosmérnöki és műszaki informatika szakán a BSc képzés tantervének megfelelő „Jelek és rendszerek” című egy féléves tárgy tananyagát tartalmazza.

A könyvben jelek matematikai leírásával, rendszerek matematikai megfogalmazásával foglalkozunk. A jel lehet egy rendszer gerjesztése és célunk a rendszer ezen gerjesztésre adott válaszjelének meghatározása lesz. Mindezt elvégezhetjük az időtartományban, a frekvenciatartományban és a komplex frekvenciatartományban. Már az elején megjegyezzük, hogy a három módszer nem helyettesíti, hanem kiegészíti egymást.

A könyv egymásra épülő részekből, azon belül pedig fejezetekből és alfejezetekből áll, ugyanis külön tárgyaljuk a folytonos idejű és a diszkrét idejű jeleket és rendszereket. Véleményem szerint az anyag így átláthatóbb.

Az Olvasónak tisztában kell lennie a matematika következő fejezeteivel: differenciálszámítás, integrálszámítás, lineáris algebra. Igyekeztem azonban úgy felépíteni a könyvet, hogy a matematikai apparátust a szükséges helyeken, a szükséges mértékben felelevenítem, sok helyen lábjegyzet formájában. Nem árt azonban a hiányosságokat pl. a Bolyai-sorozat idevágó köteteinek tanulmányozásával pótolni. Az elméleti háttérrel minden esetben példákkal is illusztrálok. A képletek levezetése és a tételek bizonyítása során pedig minden lépést részletezek a jobb érthetőség

érdekében. Teszem ezt pontosan a matematikai alapok esetleges hiánya miatt.

A könyv terjedelmi korlátok miatt számos példát, példaprogramot, a gyakorlati életben is előforduló illusztratív problémát nem tartalmaz. Ezeket a <http://www.sze.hu/~kuczmann> honlapon teszem közzé, ahol egy folyamatosan bővülő és javuló példatárat is talál az Olvasó. Akár a példákban, akár a könyvben fellelt hibák, elírások jelzését szívesen veszem.

Jelen kiadás a könyv első verziója. Előadásaim, valamint a honlapon közzétett segédanyagok és megjegyzések kiegészítésként szolgálnak a könyv mellé, melyek célja a tananyag finomítása, és a következő kiadás még tökéletesebbé tétele.

Köszönöm dr. Keviczky László akadémikus és dr. Standeisky István docens gondos lektori munkáját. Köszönetemet fejezem ki dr. Borbély Gábornak a Távközlési Tanszék vezetőjének, aki sokat tett azért, hogy az Egyetem oktatója lehessenek és dr. Iványi Amáliának, volt konzulensemnek, aki elindított pályámon.

Győr, 2005. március-augusztus

Dr. Kuczmann Miklós, PhD
egyetemi adjunktus
kuczmann@sze.hu

Tartalomjegyzék

1. Jelek	2
1.1. A jel fogalma	2
1.2. Jelek osztályozása	3
1.3. Folytonos idejű jelek	5
1.3.1. Folytonos idejű jelek megadása	5
1.3.2. Az egységugrásjel	8
1.3.3. A Dirac-impulzus	11
1.3.4. Az általánosított derivált fogalma	13
1.4. Diszkrét idejű jelek	18
1.4.1. Diszkrét idejű jelek megadása	18
1.4.2. Az egységugrásjel	21
1.4.3. Az egységimpulzus	21
1.4.4. Az egységugrásjel és a Dirac-impulzus kapcsolata	23
1.5. Jelek további osztályozása	23
2. Rendszerek	27
2.1. A rendszer fogalma	27
2.2. Rendszerek osztályozása	28
3. Hálózatok	33
3.1. A hálózat fogalma	33
3.2. Jelfolyam típusú hálózatok elemei	34

4. FI rendszerek analízise az időtartományban	37
4.1. Az ugrásválasz és alkalmazása	37
4.1.1. Az ugrásválasz definíciója	37
4.1.2. A válaszjel számítása	40
4.2. Az impulzusválasz és alkalmazása	43
4.2.1. Az impulzusválasz definíciója	43
4.2.2. A válaszjel számítása	45
4.3. A súlyfüggvénytétel összefoglalása	48
4.4. A gerjesztés-válasz stabilitás	55
4.5. A rendszeregyenlet	56
4.5.1. A rendszeregyenlet definíciója	56
4.5.2. A gerjesztés-válasz stabilitás	58
4.6. Az állapotváltozós leírás	60
4.6.1. Az állapotváltozós leírás definíciója	60
4.6.2. Az állapotváltozós leírás előállítása a hálózati reprezentáció alapján	62
4.6.3. Az állapotváltozós leírás megoldása	64
4.7. Az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet kapcsolata	88
4.7.1. Az állapotváltozós leírás meghatározása a rendszeregyenlet ismeretében	88
4.7.2. A rendszeregyenlet meghatározása az állapotváltozós leírás ismeretében	90
5. DI rendszerek analízise az időtartományban	92
5.1. Az ugrásválasz és alkalmazása	92
5.2. Az impulzusválasz és alkalmazása	94
5.2.1. Az impulzusválasz definíciója	94
5.2.2. A válaszjel számítása	96
5.3. Az ugrásválasz és az impulzusválasz kapcsolata . .	98
5.4. A gerjesztés-válasz stabilitás	103
5.5. A rendszeregyenlet	104
5.5.1. A rendszeregyenlet definíciója	104

5.5.2.	A rendszegyenlet előállítása a hálózati reprezentáció alapján	106
5.5.3.	A rendszegyenlet megoldása	107
5.5.4.	A gerjesztés-válasz stabilitás	112
5.6.	Az állapotváltozós leírás	121
5.6.1.	Az állapotváltozós leírás definíciója	121
5.6.2.	Az állapotváltozós leírás előállítása a hálózati reprezentáció alapján	123
5.6.3.	Az állapotváltozós leírás megoldása	124
5.7.	Az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet kapcsolata	135
5.7.1.	Az állapotváltozós leírás meghatározása a rendszeregyenlet ismeretében	136
5.7.2.	A rendszeregyenlet meghatározása az állapotváltozós leírás ismeretében	138
6.	FI rendszerek analízise a frekvenciatartományban	141
6.1.	Szinuszos állandósult válasz számítása	141
6.1.1.	A szinuszos jel	141
6.1.2.	A szinuszos jel komplex leírása	142
6.1.3.	Az átviteli karakterisztika	149
6.2.	Periodikus állandósult válasz számítása	170
6.2.1.	Folytonos idejű periodikus jel Fourier-felbontása	171
6.2.2.	A periodikus válasz számítása	191
6.3.	Jelek és rendszerek spektrális leírása	193
6.3.1.	A Fourier-transzformáció és a spektrum	194
6.3.2.	A Fourier-transzformáció tételei	200
6.3.3.	Folytonos idejű jelek spektruma	208
6.3.4.	A válasz spektruma és időfüggvénye	216
7.	DI rendszerek analízise a frekvenciatartományban	226
7.1.	Szinuszos állandósult válasz számítása	226
7.1.1.	A szinuszos jel	226

7.1.2.	A szinuszos jel komplex leírása	229
7.1.3.	Az átviteli karakterisztika	232
7.2.	Periodikus állandósult válasz számítása	245
7.2.1.	Diszkrét idejű periodikus jel Fourier-felbon- tása	246
7.2.2.	A periodikus válasz számítása	257
7.3.	Jelek és rendszerek spektrális leírása	260
7.3.1.	A Fourier-transzformáció és a spektrum	260
7.3.2.	A Fourier-transzformáció tételei	265
7.3.3.	Diszkrét idejű jelek spektruma	272
7.3.4.	A válasz spektruma és időfüggvénye	280
8.	FI rendszerek analízise a komplex frekvenciatarto- mányban	282
8.1.	A Laplace-transzformáció	282
8.1.1.	A Laplace-transzformáció tételei	284
8.1.2.	Folytonos idejű jelek Laplace-transzformáltja	296
8.2.	A Laplace-transzformáció alkalmazása	306
8.2.1.	A válaszjel Laplace-transzformáltjának meghatározása	306
8.2.2.	Az inverz Laplace-transzformáció	307
8.2.3.	Az átviteli függvény pólus-zérus elren- dezése, a rendszer stabilitása	315
9.	DI rendszerek analízise a komplex frekvenciatarto- mányban	317
9.1.	A z-transzformáció	317
9.1.1.	A z-transzformáció tételei	319
9.1.2.	Diszkrét idejű jelek z-transzformáltja	331
9.2.	A z-transzformáció alkalmazása	340
9.2.1.	A válaszjel z-transzformáltjának meghatá- rozása	340
9.2.2.	Az inverz z-transzformáció és a kifejtési tétel	341

9.2.3. Az átviteli függvény pólus-zérus elrendezése, a rendszer stabilitása	351
10. Mintavételezés és rekonstrukció	353
10.1. A mintavételezett jel időfüggvénye	353
10.2. A mintavételezett jel spektruma	355
10.2.1. Kapcsolat a mintavételezett jel spektruma és a diszkrét idejű jel spektruma között . .	355
10.2.2. Kapcsolat a mintavételezett jel spektruma és a folytonos idejű jel spektruma között . .	359
10.3. Mintavételezett jel rekonstrukciója	366
10.3.1. Nulladrendű tartószerv	366
10.3.2. Aluláteresztő szűrő	369
11. Diszkrét idejű szimuláció	374
11.1. Az impulzusválasz szimulációja	375
11.2. Az átviteli függvény szimulációja	379
11.3. Differenciáló és integráló operátorok mintavételes közelítése	380
12. FI nemlineáris rendszerek analízise	386
12.1. Az állapotváltozós leírás fogalma	386
12.2. Az állapotváltozós leírás előállítása a hálózati reprezentáció alapján	387
12.3. Az állapotváltozós leírás linearizálása	388
12.4. Az állapotváltozós leírás numerikus, közelítő megoldása	394
13. DI nemlineáris rendszerek analízise	397
13.1. Az állapotváltozós leírás fogalma	397
13.2. Az állapotváltozós leírás linearizálása	398
13.3. Az állapotváltozós leírás megoldása „lépésről lépésre”-módszerrel	400

1. rész Alapfogalmak

Ebben a bevezető részben összefoglaljuk azokat az alapvető tudnivalókat, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz. Megadjuk a *jel*, a *rendszer* és a *hálózat* fogalmát, és azon ismereteket, amelyekre alapozni fogunk.

A jel témakörben példákkal is alátámasztva bemutatjuk a jelek megadásának különböző módjait. Bevezetünk két, számunkra fontos jelet, a folytonos idejű egységugrást és a Dirac-impulzust, valamint a diszkrét idejű egységugrást és az egységimpulzust (diszkrét idejű Dirac-impulzus). Egyszerű példákkal illusztráljuk ezek alkalmazási lehetőségeit. Megadjuk azon fogalmakat és jelosztályokat, amelyeket a későbbiekben használni fogunk.

Megadjuk a rendszer fogalmát. Osztályozzuk a rendszerek alapvető típusait, és megadjuk azon rendszerosztályt, amellyel részletesen is foglalkozni fogunk: ez a *lineáris*, *invariáns* és *kauzális* rendszer. Egy fejezetben azonban röviden kitérünk a *nemlineáris* rendszerekre is.

A hálózat fogalmának segítségével megérthetjük, miként rendelhető egy rendszerhez hálózat és fordítva.

1. fejezet

Jelek

1.1. A jel fogalma

A különböző *folyamatok* mérhető mennyiségeiről információt mérőműszerek (pl. feszültségmérő műszer, árammérő műszer, oszcilloszkóp, számítógéppel támogatott mérési eszközök, hőmérő, sebességmérő stb.) segítségével kaphatunk. Ezen mért mennyiségeket *fizikai mennyiségeknek* nevezzük, melyek matematikai leírását *változók* bevezetésével végezzük, értékük pedig egy adott mértékegységben (pl. SI egységrendszerben, vagy egy kényelmes, koherens egységrendszerben) kifejezett számérték.

A jel a fizikai mennyiség olyan értéke vagy értékváltozása, amely egy egyértelműen hozzárendelt információt hordoz. A jel tehát információtartalommal bír. Sok esetben a változó és a jel ugyanazt jelenti (szinonimák).

Jelek matematikai leírására *függvényeket* alkalmazunk, melyek (legegyszerűbb, de tipikus esetben) egy független változó és egy függő változó között egyértelmű kapcsolatot realizálnak. A független változó (a függvény argumentuma) értékeinek halmaza alkotja a függvény *értelmezési tartományát*, a függő változó összes értéke pedig a *függvény értékkészletét*.

1.2. Jelek osztályozása

A jelek az értelmezési tartomány és az értékkészlet alapján négy típusba sorolhatók (1.1. ábra). A jel értelmezési tartományán ezentúl az *időt*, értékkészletén pedig a vizsgált jel által leírt fizikai mennyiség értékét értjük.

1.) Ha a jel az idő argumentum minden valós értékére értelmezett, akkor *folytonos idejű jel*ről beszélünk. Ezen csoportban legismertebb az *analóg jel* (*folytonos értékű jel*), amelynél a jel értéke is folytonos (pl. egy mikrofon kimenő jele, az ábrán $x_1(t)$).

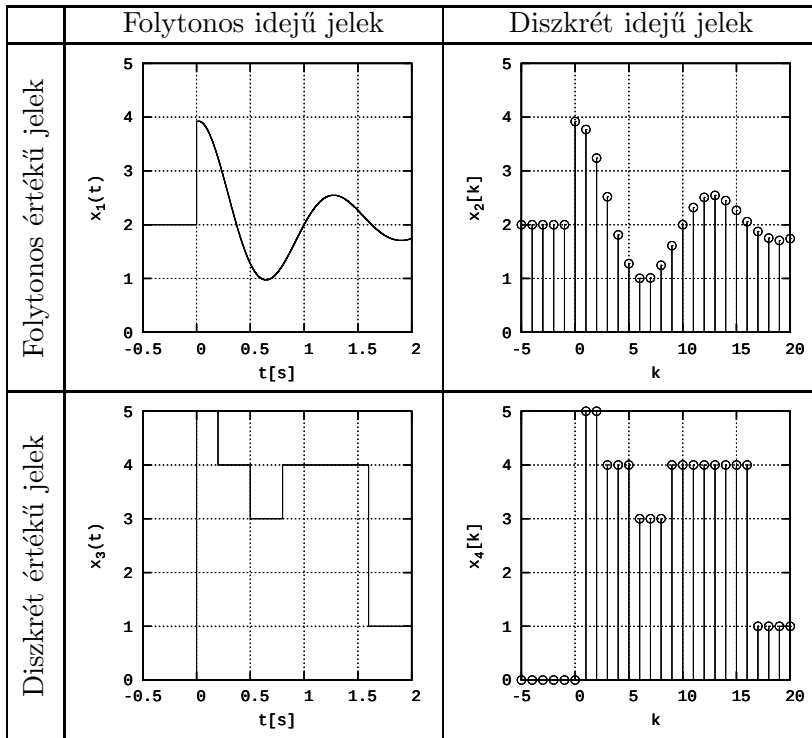
2.) Ha egy analóg jeltől adott (általában egyenletes osztású) időpillanatokban mintákat veszünk, akkor az időben diszkrét, értékkészletében pedig folytonos jelet kapunk, ami voltaképpen egy számsorozat. Ezt *diszkrét idejű jel*nek nevezzük (az ábrán az $x_2[k]$).

3.) Vannak olyan jelek, amelyek csak bizonyos értékeket vehetnek fel egy megszámlálható számhalmaz elemeiből (lépcsős, másnéven *kvantált jel*alak, vagy *diszkrét értékű jel*). Az 1.1. ábrán az $x_3(t)$ jel az időben folytonos, de értékkészletében diszkrét.

4.) Végül a számítástechnika szinte minden műszaki területen jelen lévő alkalmazása miatt nagy jelentősége van a mind időben, mind értékkészletében diszkrét jelnek, amelyet *digitális jel*nek nevezünk. Az $x_4[k]$ kódolása után digitális jelet kapunk.

Megjegyezzük, hogy az $x_2[k]$ jelet az $x_1(t)$ jel un. *mintavételezésével* kapjuk, és a jobb oldali határértéket vesszük figyelembe. Az $x_4[k]$ jelet pedig az $x_3(t)$ jeltől vett minták adják a bal oldali határérték felhasználásával. Mindez a $k = 0$ ütemnél és $x_4[k]$ ugrásainál tűnik ki.

A könyvben csak a folytonos értékű, folytonos idejű és a folytonos értékű, diszkrét idejű jelekkel foglalkozunk (az 1.1. ábrán az első sor). A jel értéke lehet valós vagy komplex, mi azonban csak a valós értékű jelekkel foglalkozunk.



1.1. ábra. Jelek négy alaptípusa

A jeleket további szempontok szerint is csoportosíthatjuk. Egy jelet *determinisztikus jel*nek nevezünk, ha értéke minden időpillanatban ismert vagy meghatározható, kielégítő pontossággal mérhető, s az megismételhető folyamatot ír le. Ilyenkor a jel elvileg képlettel, időfüggvénnyel leírható.

*Sztocasztikus jel*ről beszélünk, ha a jel mérésére tett kísérletek különböző, „véletlenszerű” eredményeket szolgáltatnak. Ebben az esetben nem tudunk egyértelműen egy időfüggvényt megadni, hanem a jel statisztikus tulajdonságait kell meghatározni, pl. a jel un. várható értékét. Sztocasztikus jelek esetében a valószínűségszámítás elméletét is alkalmaznunk kell,

melyre pl. híradástechnikai alkalmazások során lehet szükség.

Sok gyakorlati esetben a jel egy determinisztikus és egy sztochasztikus jel összege.

A továbbiakban kizárólag determinisztikus jelekkel foglalkozunk.

1.3. Folytonos idejű jelek

Egy x jelet akkor nevezünk folytonos idejűnek, ha a jel az idő minden valós értékére értelmezett:

$$\boxed{x = x(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{vagy} \quad -\infty < t < \infty,} \quad (1.1)$$

ahol t jelöli a folytonos időt, melynek SI mértékegysége a szekundum (s), koherens egységrendszerben pl. ms, μ s stb. lehet, $\mathbb{R}$ pedig a valós számok halmaza. Ilyen jel az 1.1. ábrán látható $x_1(t)$ és $x_3(t)$.¹

A továbbiakban csak $x(t)$ jelöléssel hivatkozunk a folytonos idejű jelekre, mert a kerek zárójelbe tett argumentum egyértelműen jelöli, hogy erről van szó (a $t \in \mathbb{R}$ és $-\infty < t < \infty$ jelöléseket elhagyjuk).

1.3.1. Folytonos idejű jelek megadása

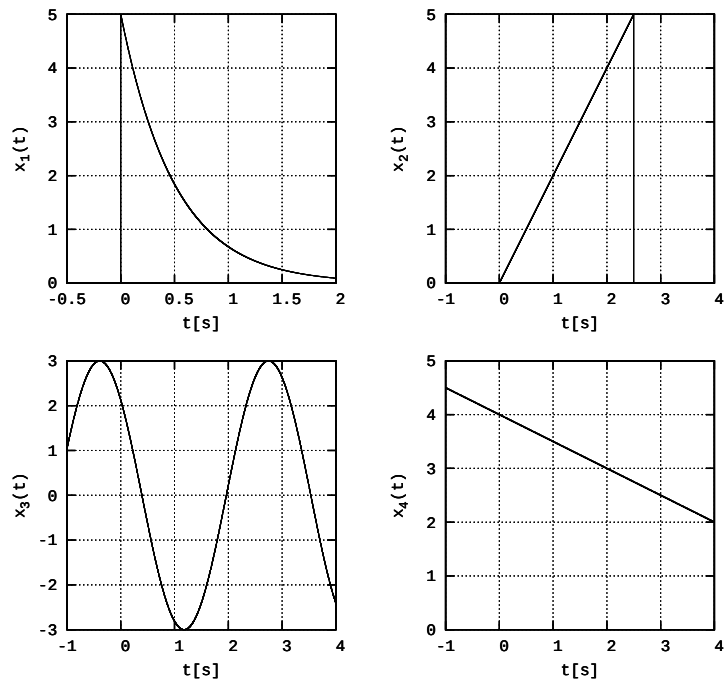
Folytonos idejű jelek megadására több lehetőségünk van, amelyeket itt példákkal is szemléltetünk.

1.) Képlet. Egy függvény segítségével az $x(t)$ jelet tetszőleges t időpillanatban meghatározhatjuk:²

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0; \\ 5e^{-2t}, & \text{ha } t \geq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

¹Folytonos idejű jel megjelenítésére alkalmas eszköz pl. az oszcilloszkóp, melynek képernyőjén a mért jel egy időszelétét vizsgálhatjuk.

²Az $x_2(t)$ jelben szereplő $\wedge$ jel az és kapcsolatot jelöli, azaz a $t \geq 0$ és a $t < 2,5$ feltételnek egyaránt teljesülni kell.



1.2. ábra. Folytonos idejű jelek grafikus megadása

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0; \\ 2t, & \text{ha } t \geq 0 \quad \wedge \quad t < 2,5; \\ 0, & \text{ha } t \geq 2,5, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$x_3(t) = 3 \cos(2t + \pi/4), \quad (1.4)$$

$$x_4(t) = 4 - 0,5t. \quad (1.5)$$

2.) Grafikus ábrázolás. Segítségével a jel időbeli lefutása szemléletesen megadható. Legtöbb esetben csak kvalitatíve, véges időintervallumra szorítkozva és korlátozott pontossággal tudjuk felvázolni.³ Néhány esetben (pl. ha a jel periodikus, vagy lecsengő

³Matematikai szoftverek segítségével az ábrák tökéletesen szerkeszthetők.

jellegű) következtetni lehet a jel nem ábrázolt részeire is. Az 1.2. ábrán ábrázoltuk az (1.2)-(1.5) képletekkel megadott jeleket.

3.) Differenciálegyenlet. Egy folytonos idejű jel megadható egy n -edrendű differenciálegyenlettel, de ebben az esetben egy *adott* t időpontban (célszerűen a $t = 0$ -ban) meg kell adnunk n számú un. kezdeti értéket is. A legegyszerűbb esetet példán keresztül mutatjuk be:

$$\frac{dy}{dt} = -2y, \quad y(0) = 5,$$

ahol $y = y(t)$ a meghatározandó időfüggvény. Először formálisan szorozzuk meg a differenciálegyenlet mindkét oldalát dt -vel:⁴

$$\begin{aligned} dy &= -2y \, dt \xrightarrow{(1)} \frac{dy}{y} = -2 \, dt \xrightarrow{(2)} \int \frac{1}{y} \, dy = -2 \int dt \xrightarrow{(3)} \\ \ln y + C_1 &= -2(t + C_2) \xrightarrow{(4)} y = e^{-2t-C} = e^{-2t} e^{-C} = M e^{-2t}. \end{aligned}$$

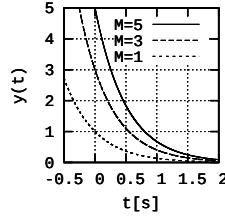
Az (1) lépésben vigyük át az y változót a bal, a t változót pedig a jobb oldalra (*változók szeparálása*). A (2) lépésben formálisan integráljuk az egyenlet mindkét oldalát. A (3) lépésben felhasználjuk az $1/y$ és az 1 integranduszok primitív függvényét, az $\ln y + C_1$ és a $t + C_2$ függvényeket, és a (4) lépésben rendezzük az egyenletet y -ra úgy, hogy a C_1 és C_2 konstánokat összevonjuk egyetlen C konstánssá ($C = C_1 + 2C_2$). Végül helyettesítsük az e^{-C} konstánt M -el. Ezáltal az $y = M e^{-2t}$ megoldáshalmazt kapjuk, ahol az M konstans értékét a $t = 0$ időpillanatban adott érték segítségével határozzuk meg: $y(0) = M e^0 = 5$. Így az időfüggvény a következő:

$$y(t) = 5e^{-2t}.$$

A könyv ábráit az Octave és a GnuPlot programok segítségével készítettük el [www.octave.org].

⁴Az egyes lépések közötti átmenetet nyilak jelölik, s a nyilak fölé írt sorszám a részletezett lépéseket és műveleteket jelöli. Ezt a fajta magyarázatot a későbbiekben is használni fogjuk.

A megoldás ismeretében C értéke számunkra már érdektelen. Megjegyezzük, hogy M értékének meghatározása pedig azt jelenti, hogy az Me^{-2t} görbeseregéből kiválasztjuk azt a függvényt, amelyik a differenciálegyenlet mellett kielégíti a megadott feltételt is (az 1.3. ábrán M különböző értékeire láthatunk megoldásokat). A kapott eredmény helyességéről a függvény differenciálegyenletbe történő visszahelyettesítésével győződhetünk meg (az e^{-2t} függvény idő szerinti deriváltja $-2e^{-2t}$). Az



1.3. ábra. Az Me^{-2t} jel

$$y(t) = Me^{\lambda t}$$

típusú időfüggvényre az időtartománybeli analízis során még visszatérünk (itt $\lambda = -2$).

4.) Értékek felsorolása. A folytonos idejű jel közelítő leírását kapjuk egy adott időintervallumban, ha értékeit adott t_k időpillanatokban felsoroljuk. Ilyen adatsort kaphatunk, ha pl. egy mérést számítógéppel végzünk. Az előző példa esetében válasszuk a $t_k = k(0, 2)$ időpillanatokot:

$$y(t_k) = \{5; 3,35; 2,25; 1,51; 1,01; 0,68; \dots\}.$$

1.3.2. Az egységugrásjel

A vizsgált folyamatokat leíró jelek egy adott időpillanatban kezdődnek, ami nyugodtan választható nullának. Az *egységugrásjel* hasznos lesz ilyen jelek leírására, melynek jele és definíciója az alábbi:⁵

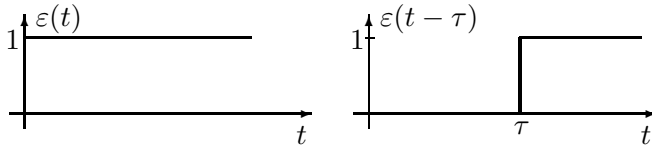
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0; \\ 1, & \text{ha } t > 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

⁵Szokás *Heaviside-függvénynek* is nevezni és $1(t)$ -vel jelölni.

A szakaszonként folytonos egységugrásjelnek a $t = 0$ időpillanatban *ugrása*, *véges szakadása* van, ahogy az 1.4. ábrán látható. Itt bal oldali határértéke (a $t = -0$ időpillanatban) 0, jobb oldali határértéke (a $t = +0$ időpillanatban) pedig 1:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow -0} \varepsilon(t) = \varepsilon(-0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \varepsilon(t) = \varepsilon(+0) = 1.} \quad (1.7)$$

Az $\varepsilon(t)$ jel értéke a $t = 0$ időpillanatban nincs definiálva.



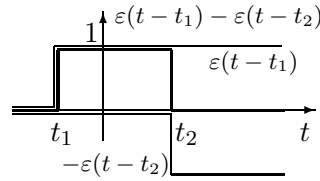
1.4. ábra. Az egységugrásjel és eltoltja ($\tau > 0$)

Szükségünk lehet egy tetszőleges τ idővel eltolt egységugrásjelre, amely a következőképp adható meg:

$$\boxed{\varepsilon(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < \tau; \\ 1, & \text{ha } t > \tau, \end{cases}} \quad (1.8)$$

azaz, az $\varepsilon(t - \tau)$ a t tengelyen jobbra, az $\varepsilon(t + \tau)$ pedig balra tolódik el az $\varepsilon(t)$ jelhez képest, hiszen előbbinek a $t = \tau$, utóbbinak pedig a $t = -\tau$ helyen van ugrása (l. 1.4. ábra).

Az egységugrásjelet és eltolját *véges tartójú jelek* matematikai formulával történő megadására alkalmazzuk. Véges tartójúnak nevezünk egy jelet, ha az egy véges intervallumon kívül mindenütt nulla értékű. Egy jel csak véges ideig figyelhető meg: gondoljunk pl. arra, hogy egy jelet oszcilloszkóppal vizsgálunk, s a jelnek csak az oszcilloszkóp képernyőjén ábrázolható részét látjuk. Az egységugrásjel alkalmas



1.5. ábra. A négyszögletes ablak előállítás

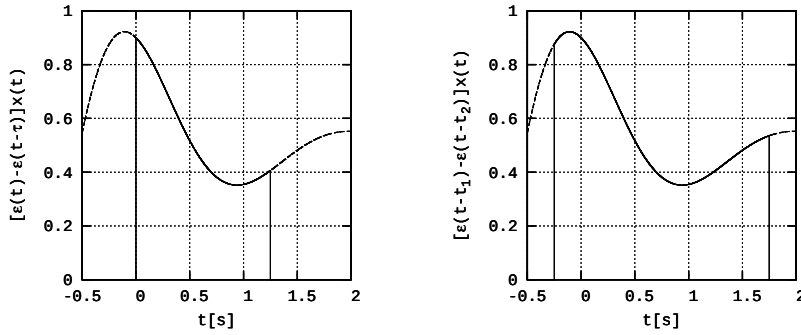
arra, hogy a vizsgált jelet úgy írjuk le, hogy adott részét kitarjuk egy négyszögletes ablakkal, amit két eltolt egységugrásjel különbségeként állíthatunk elő (l. 1.5. ábra). Tegyük fel, hogy az $x(t)$ jel időben egy adott $t_1 \leq t \leq t_2$ intervallumát szeretnénk ábrázolni, ekkor a következő összefüggést kell alkalmaznunk:

$$y(t) = [\varepsilon(t - t_1) - \varepsilon(t - t_2)] x(t). \quad (1.9)$$

Egyes jeleket majd ilyen típusú jelek összegeként állítjuk elő.

Példaképp az 1.6 ábrákon az $x(t) = 0,5 + 0,4e^{-t} \cos(3t)$ jelet szaggatott vonallal ábrázoltuk és az (1.9) típusú ablakozó jellel történő beszorzás után az eredő függvényt folytonos vonallal jelöltük ($t_1 = 0$ és $t_2 = 1,25$ s, valamint $t_1 = -0,25$ s és $t_2 = 1,75$ s). A folytonos vonallal rajzolt jel időfüggvénye tehát felírható a következő formában:

$$y(t) = [\varepsilon(t - t_1) - \varepsilon(t - t_2)] (0,5 + 0,4e^{-t} \cos(3t)).$$



1.6. ábra. Ablakozó függvények alkalmazása

Ezek alapján az (1.2) és (1.3) jeleket úgy is felírhatjuk, hogy

$$x_1(t) = \varepsilon(t)5e^{-2t}, \quad x_2(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 2,5)]2t.$$

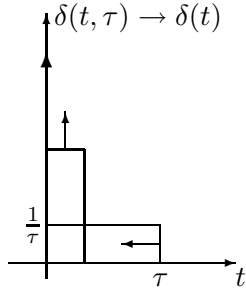
1.3.3. A Dirac-impulzus

Egy másik fontos jel az *egységnyi intenzitású impulzus*, melynek értelmezése az alábbi:

$$\delta(t, \tau) = \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)}{\tau}. \quad (1.10)$$

Ennek szélessége tehát τ , magassága pedig $1/\tau$, s így *intenzitása (területe) egységnyi* (l. 1.7. ábra). Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a $\delta(t, \tau)$ integrálja egységnyi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, \tau) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} dt = 1. \quad (1.11)$$



Látható, hogy minél rövidebb ideig tart ez az impulzus, értéke annál nagyobb lesz, ami a definícióból következik. Szemléletesen (de ez nem a korrekt definíció), ha $\tau \rightarrow 0$, akkor a $\delta(t, \tau)$ impulzus az ún. *Dirac-impulzussal* írható le:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)}{\tau},$$

1.7. ábra. A *Dirac-impulzus szemléltetése*

azaz $\delta(t)$ minden t értékre nulla, kivéve a $t = 0$ helyet, ahol értéke végtelen nagy, miközben intenzitása definíció szerint egységnyi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1. \quad (1.12)$$

A Dirac-impulzus (Dirac-féle delta függvény) szokásos jelölése egy nyíl (l. 1.7. ábra). A *Dirac-impulzus páros függvény*.

Az (1.12) összefüggés igaz az időben eltoló Dirac-impulzusra is:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{t_0-0}^{t_0+0} \delta(t - t_0) dt = 1.} \quad (1.13)$$

Ebből kifolyólag fennáll a következő összefüggés, ami *definiálja* is a Dirac-impulzust: ha az $f(t)$ jel folytonos a $t = t_0$ helyen, akkor

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0),} \quad (1.14)$$

hiszen ha az $f(t)$ időfüggvényt beszorozzuk a $\delta(t - t_0)$ Dirac-impulzussal, akkor egy olyan függvényt kapunk, amelynek értéke mindenütt nulla, kivéve a $t = t_0$ helyet, ahol viszont értéke egy olyan Dirac-impulzus, melynek nagysága arányos a konstans $f(t_0)$ értékkel. Így írhatjuk, hogy

$$f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

A $\delta(t)$ jel matematikailag egyszerűbben kezelhető, mint a $\delta(t, \tau)$ impulzus, ezért hacsak lehet az utóbbit a Dirac-impulzussal közelítjük. Ez a közelítés viszont csak akkor jogos, ha τ sokkal kisebb a vizsgált folyamat jellemző idejénél. Hogy mi egy *folyamat jellemző ideje*, arról a következő részekben lesz szó.

A Dirac-impulzus értelmezhető pl. a következő páros függvény határeseteként, amikor $\tau \rightarrow 0$ (erre a 6. fejezetben még visszatérünk):

$$\delta_1(t, \tau) = \frac{\tau}{\pi(t^2 + \tau^2)}. \quad (1.15)$$

Ha $\tau \rightarrow 0$ és $t \rightarrow 0$, akkor a jel értéke végtelenhez tart, hiszen a nevező gyorsabban tart nullához, $t \rightarrow \infty$ esetén pedig nullához

tart a jel. Ezen jel görbe alatti területe szintén egységnyi:⁶

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{\pi(t^2 + \tau^2)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{\tau}}{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} dt \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{t}{\tau} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \stackrel{(2)}{=} 1,$$

vagyis $\tau \rightarrow 0$ esetén szintén Dirac-impulzust kapunk.

1.3.4. Az általánosított derivált fogalma

Az $\varepsilon(t)$ jel és a $\delta(t)$ jel között szoros kapcsolat van. Ezt vizsgáljuk a következőkben. Ehhez azonban a *jel deriváltjának* fogalmára lesz szükségünk. Ha az $x = x(t)$ jel differenciálható, akkor képezhetjük annak deriváltját:

$$x'(t) \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (1.16)$$

ami szintén egy időfüggvény, és az $x(t)$ jel derivált jelének nevezzük feltéve, hogy ez a határérték létezik.⁷

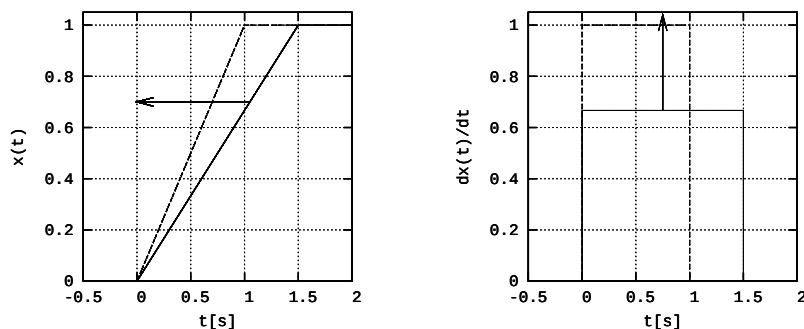
Előfordul, hogy egy folytonos idejű jel szakaszonként differenciálható, viszont az egyes szakaszok átmeneténél a jelnek véges szakadása (ugrása) lehet.

Ennek kezelésére vezetjük be az *általánosított derivált* fogalmát, amelynek definíciója a következő: egy $x(t)$ jel deriváltja az az $x'(t)$ jel, melynek segítségével az $x(t)$ jel a következőképp állítható elő:

$$\boxed{x(t) = \int_{t_0}^t x'(\tau) d\tau + x(t_0).} \quad (1.17)$$

⁶Tudjuk, hogy $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Ha az $x = \frac{t}{\tau}$ helyettesítéssel élünk, akkor $\arctan \frac{t}{\tau} = \frac{1}{1+(\frac{t}{\tau})^2} \frac{1}{\tau}$. Ezt használjuk ki az (1) lépésben. Az $\arctan$ függvény határértéke a ∞ -ben $\frac{\pi}{2}$, míg a $-\infty$ -ben $-\frac{\pi}{2}$. Egyszerűsítés után a (2) lépésben tehát 1-et kapunk eredményül.

⁷A későbbiekben az idő szerinti deriváltat sokszor a jel fölé helyezett ponttal jelezzük: $x' = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$.



1.8. ábra. A példában szereplő $x(t)$ jel és $x'(t)$ deriváltja (itt $\tau = 1$ s és $\tau = 1,5$ s)

Ebben az esetben $x(t)$ nem feltétlenül folytonos jel. Rendszerint fennáll, hogy $x(-\infty) = 0$ és ekkor $t_0 = -\infty$ választható:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^t x'(\tau) d\tau.} \quad (1.18)$$

Vizsgáljuk meg ezt az 1.8. ábrán látható egyszerű példán keresztül! Vegyük azt az esetet, amikor az $\varepsilon(t)$ függvényt a következő jellel közelítjük ($\tau \rightarrow 0$):

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0; \\ t/\tau, & \text{ha } t > 0 \quad \wedge \quad t < \tau; \\ 1, & \text{ha } t \geq \tau. \end{cases}$$

Ezen jel deriváltja a következőképp határozható meg. A jel három szakaszból áll, első és harmadik szakasza konstans, melyek deriváltja nulla, középső szakasza egy egyenes, melynek meredeksége $1/\tau$. Az $x'(t)$ derivált jel tehát egy olyan négyszögimpulzus, amelynek értéke a $0 < t < \tau$ intervallumban $1/\tau$, vagyis $x'(t) = \delta(t, \tau)$ (vö. az (1.10) összefüggéssel és az 1.7. ábrával).

Ha $\tau \rightarrow 0$, akkor az $x(t)$ jel az $\varepsilon(t)$ függvényhez, az $x'(t)$ derivált jel pedig a $\delta(t)$ Dirac-impulzushoz tart. Helyettesítsük

vissza ezen eredményt az (1.18) definíciós összefüggésbe:

$$\boxed{\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau.} \quad (1.19)$$

Az integrál értéke a $t < 0$ időpillanatokban nulla (egészen $t = -0$ -ig), hiszen ott $\delta(t)$ értéke is nulla. A $t = 0$ pillanatban megjelenik a Dirac-impulzus, melynek nagysága végtelen nagy, azonban (1.12) ismeretében tudjuk, hogy a $t = +0$ -ban már egységnyi értéke lesz a vizsgált integrálnak, s a $t > 0$ intervallumban ez már nem növekszik, hiszen $\delta(t)$ értéke ott is nulla, azaz:

$$\boxed{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{ha } t > 0 \end{cases} \equiv \varepsilon(t).} \quad (1.20)$$

Ebből már következik az a fontos összefüggés, hogy a *Dirac-impulzus az egységugrásjel általánosított deriváltja*:

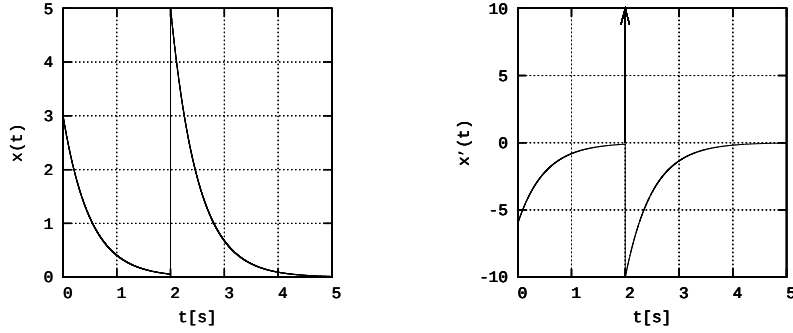
$$\boxed{\varepsilon'(t) = \delta(t).} \quad (1.21)$$

Ebben az esetben az ugrás értéke egységnyi. Meg kell azonban jegyezni, hogy ha az ugrás értéke nem 1, hanem K , azaz a jel $K\varepsilon(t)$, akkor annak deriváltja $K\delta(t)$.

Példa. Elemezzünk most egy olyan példát, amelyhez hasonló a későbbiekben gyakran elő fog fordulni. Vegyünk egy olyan $x(t)$ jelet, amelyet szakaszonként az $x_1(t)$ illetve az $x_2(t)$ folytonos jel ír le, és a kettő találkozásánál (a t_1 helyen) $x(t)$ -nek K értékű véges szakadása van (egy példa látható az 1.9. ábrán):

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{ha } t < t_1; \\ x_2(t), & \text{ha } t \geq t_1. \end{cases} = \begin{cases} x_1(t) = 3e^{-2t}, & \text{ha } t < 2s; \\ x_2(t) = 5e^{-2(t-2)}, & \text{ha } t \geq 2s. \end{cases}$$

A vizsgált jel a $t < t_1$ időintervallumban folytonos és differenciálható, tehát $x'_1(t)$ deriváltját elő tudjuk állítani. Ugyanezt



1.9. ábra. A példában szereplő $x(t)$ jel és $x'(t)$ deriváltja

meg tudjuk tenni a $t > t_1$ időintervallumban is, ahol a derivált $x'_2(t)$. A jelnek azonban a $t_1 - 0 \leq t \leq t_1 + 0$ helyen szakadása van, ahol deriváltja a $\delta(t)$ jellel arányos, s mivel a szakadás értéke K , ezért a derivált értéke $K\delta(t)$, s így:

$$x'(t) = \begin{cases} x'_1(t), & \text{ha } t < t_1; \\ K\delta(t - t_1), & \text{ha } t = t_1; \\ x'_2(t), & \text{ha } t > t_1. \end{cases} = \begin{cases} -6e^{-2t}, & \text{ha } t < 2s; \\ 4,945\delta(t - 2), & \text{ha } t = 2s; \\ -10e^{-2(t-2)}, & \text{ha } t > 2s. \end{cases}$$

A K értéke számolható: $K = x_2(t_1) - x_1(t_1) = 5 - 3e^{-4} = 4,945$.

Vizsgáljunk meg egy másik módszert is a derivált meghatározására. Ehhez először fel kell írunk az $x(t)$ függvényt ablakozott jelek segítségével zárt alakban. A jel első tagja $t = t_1$ időpillanatig tart, ez tehát előállítható az $x_a(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]x_1(t)$ alakban, a második tag pedig $t > t_1$ időpillanattól lép be, s így felírható az $x_b(t) = \varepsilon(t - t_1)x_2(t)$ alakban. Az $x(t)$ jel ezen két jel összege

$$x(t) = x_a(t) + x_b(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)]x_1(t) + \varepsilon(t - t_1)x_2(t).$$

Ezután végezzük el a deriválást formálisan, vagyis pl. a jel első tagja ($x_a(t)$) két függvény szorzatából áll, tehát úgy deriváljuk, mintha két függvény szorzatának deriváltját határoznánk meg,

nevezetesen $(uv)' = u'v + uv'$. Voltaképpen erről van szó, tehát

$$\begin{aligned} x'_a(t) &= [1 - \varepsilon(t - t_1)]' x_1(t) + [1 - \varepsilon(t - t_1)] x'_1(t) = \\ &= -\delta(t - t_1) x_1(t) + [1 - \varepsilon(t - t_1)] x'_1(t), \end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned} x'_b(t) &= [\varepsilon(t - t_1)]' x_2(t) + \varepsilon(t - t_1) x'_2(t) = \\ &= \delta(t - t_1) x_2(t) + \varepsilon(t - t_1) x'_2(t). \end{aligned}$$

Használunk kell egy másik deriválási szabályt is, nevezetesen, hogy két (vagy több) függvény összegeként felírható függvényt úgy deriválunk, hogy az egyes függvények deriváltjait összegezzük, s így megkapjuk a végeredményt:

$$\begin{aligned} x'(t) = x'_a(t) + x'_b(t) &= -\delta(t - t_1) x_1(t) + [1 - \varepsilon(t - t_1)] x'_1(t) + \\ &+ \delta(t - t_1) x_2(t) + \varepsilon(t - t_1) x'_2(t). \end{aligned}$$

A derivált jel tartalmaz eltolt Dirac-impulzusokat, melyekről azonban tudjuk, hogy csak a $t = t_1$ időpillanatban vesznek fel értéket, minden más időpillanatban értékük nulla. Ha tehát vesszük pl. a $\delta(t - t_1) x_1(t)$ szorzatot, akkor azt látjuk, hogy az $x_1(t)$ jel be van szorozva egy eltolt Dirac-impulzussal. Az $x_1(t)$ jel hiába vesz fel adott értékeket a $t = t_1$ időpillanaton kívül, azokat nullával szorozzuk, azaz a szorzat csak a $t = t_1$ időpillanatban ad $\delta(t - t_1) x_1(t_1)$ értéket. Általánosan tehát azt mondhatjuk, hogy egy $\delta(t - t_0)$ Dirac-impulzus és egy időfüggvény szorzatából adódó időfüggvény olyan, hogy csak a $t = t_0$ helyen vesz fel értéket, ami a függvény $t = t_0$ helyen vett helyettesítési értékének és a Dirac-impulzusnak a szorzata. Ez a Dirac-impulzus tehát a függvény helyettesítési értékével arányos. Ennek ismeretében a derivált jel a következő végleges alakot ölti:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\delta(t - t_1) x_1(t_1) + [1 - \varepsilon(t - t_1)] x'_1(t) + \\ &+ \delta(t - t_1) x_2(t_1) + \varepsilon(t - t_1) x'_2(t) = [1 - \varepsilon(t - t_1)] x'_1(t) + \\ &+ \delta(t - t_1) [x_2(t_1) - x_1(t_1)] + \varepsilon(t - t_1) x'_2(t), \end{aligned}$$

ami megegyezik az előbbi megfontolásokból kapott végeredménnyel. A számpéldánál maradva:

$$x'(t) = 3[1 - \varepsilon(t - 2)]e^{-2t} + 4,945\delta(t - 2) + 5\varepsilon(t - 2)e^{-2(t-2)}.$$

1.4. Diszkrét idejű jelek

Egy x jelet akkor nevezünk diszkrét idejűnek, ha független változója csak egész értékeket vehet fel:

$$\boxed{x = x[k], \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{vagy} \quad k \in [-\infty, \dots, -1, 0, \dots, \infty],} \quad (1.22)$$

ahol k jelöli a „diszkrét időt” (*ütemnek* hívjuk), $\mathbb{Z}$ pedig az egész számok halmazát. Ilyen jel az 1.1. ábrán látható $x_2[k]$ és $x_4[k]$. Ez pl. úgy képzelhető el, hogy egy folytonos idejű jelből T_s mintavételi periódusidővel egyenletesen mintákat veszünk a $t_k = kT_s$ időpillanatokban, s a vízszintes tengelyen csak k értékét tüntetjük fel, ami a k -adik *ütem* (a gyakorlatban pl. egy folyamat folytonos idejű jelét mintavételi kártyával mérjük). Az 1.1. ábrán $T_s = 0,1$ s.

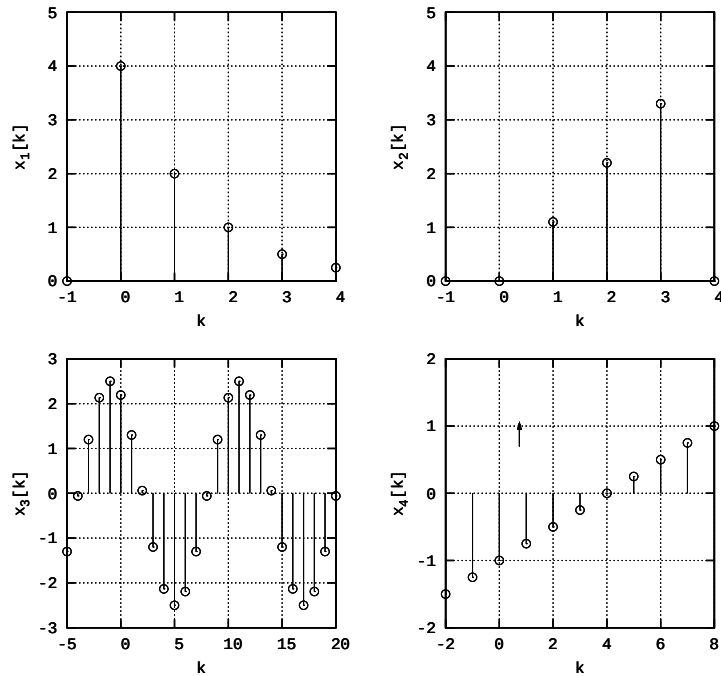
A továbbiakban csak $x[k]$ jelöléssel hivatkozunk a diszkrét idejű jelekre, hiszen a szögletes zárójelben lévő argumentum egyértelműen jelöli, hogy erről van szó és a $k \in \mathbb{Z}$, valamint a $k \in [-\infty, \dots, -1, 0, \dots, \infty]$ jelöléseket elhagyjuk.

1.4.1. Diszkrét idejű jelek megadása

Diszkrét idejű jelek megadására több lehetőségünk van, melyeket a folytonos idejű jelek tárgyalásához hasonlóan példákkal is szemléltetünk.

1.) Képlet. Egy összefüggés segítségével az $x[k]$ jelet k bármely értékére megadhatjuk. Példának vegyünk az alábbi négy jelet:

$$x_1[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0; \\ 4 \cdot 0,5^k, & \text{ha } k \geq 0, \end{cases} \quad (1.23)$$



1.10. ábra. Diszkrét idejű jelek grafikus megadása

$$x_2[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0; \\ 1, 1k, & \text{ha } k \geq 0 \quad \wedge \quad k < 4; \\ 0, & \text{ha } k \geq 4, \end{cases} \quad (1.24)$$

$$x_3[k] = 2,5 \cos \left(\frac{\pi}{6}k + \frac{1}{2} \right), \quad (1.25)$$

$$x_4[k] = 0,25k - 1. \quad (1.26)$$

2.) Grafikus ábrázolás. Tetszőleges $x[k]$ jel időbeli lefutása grafikusán megadható. Az 1.10. ábrán felvázoltuk az (1.23)-(1.26) jelek időfüggvényét.

3.) Értékek felsorolása. A jel véges hosszúságú szegmense megadható az értékek felsorolásával, azaz egy számsorozattal. Az

(1.24) jel véges tartójú, így azt az alábbi módon foglalhatjuk táblázatba:

k	0	1	2	3
$x_2[k]$	0	1,1	2,2	3,3

Az (1.23) jel azonban csak véges számú értékével jellemezhető, hiszen végtelen sok adatot nem tudunk felsorolni, pl.:

k	0	1	2	3	4	...
$x_1[k]$	4	2	1	0,5	0,25	...

Ez természetesen információvesztéssel járhat. A módszer alkalmas lehet számítógépes tárolásra, az $x[k]$ jelet pl. egy vektorba rendezhetjük.

4.) Rekurzív formula. A következő részben tárgyalandó esetekben a jel k -adik ütembeli értéke rekurzív úton számolható az azt megelőző értékek segítségével, pl.:

$$y[k] = 0,5y[k-1] + 0,1y[k-2], \quad y[-1] = 2, \quad y[-2] = 0.$$

A $k = 0, 1, 2, \dots$ ütemekre az $y[k]$ értéke az ún. „lépésről lépésre”-módszerrel számolható, melyhez azonban (jelen példánál) ismerni kell az $y[k]$ jel $k < 0$ ütembeli értékeit is. Most azt tételeztük fel, hogy $y[-1] = 2$ és $y[-2] = 0$. Ezek az ún. *kezdeti feltételek*. A rekurzió tehát a következő:

$$\begin{aligned} y[0] &= 0,5y[-1] + 0,1y[-2] = 0,5 \cdot 2 + 0,1 \cdot 0 = 1; \\ y[1] &= 0,5y[0] + 0,1y[-1] = 0,5 \cdot 1 + 0,1 \cdot 2 = 0,7; \\ y[2] &= 0,5y[1] + 0,1y[0] = 0,5 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 1 = 0,45, \end{aligned}$$

$y[3] = 0,295$ és így tovább. Ebből az egyszerű példából is látható, hogy a rekurziós formula számítógépet alkalmazva nagyon hatékony lehet. Ez a megadási mód valamelyest emlékeztet a folytonos idejű jel differenciálegyenlettel történő megadására, ott azonban ilyen „lépésről lépésre”-módszer nem létezik⁸.

⁸Differenciálegyenletek megoldása során a differenciálegyenletet először differenciaegyenletté kell alakítani, s hasonló módon meg lehet oldani. Erre a 11. fejezetben látunk példákat.

1.4.2. Az egységugrásjel

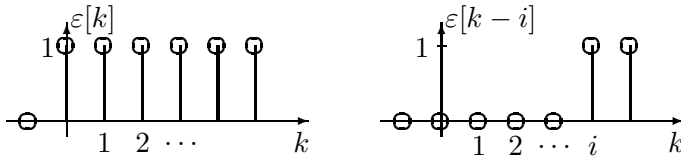
Egy gyakran alkalmazott jel az egységugrásjel, melynek definíciója az alábbi:

$$\varepsilon[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0; \\ 1, & \text{ha } k \geq 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

azaz az egységugrás értéke a $k < 0$ ütemekre 0, nem negatív egész értékekre pedig 1, ahogy az 1.11. ábrán látható. Szükségünk lehet a tetszőleges i ütemmel eltolt egységugrásra, mely a következőképp adható meg:

$$\varepsilon[k-i] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < i; \\ 1, & \text{ha } k \geq i, \end{cases} \quad (1.28)$$

azaz az $\varepsilon[k-i]$ a k tengelyen jobbra, az $\varepsilon[k+i]$ pedig balra tolódik el az $\varepsilon[k]$ jelhez képest, hiszen előbbinek a $k = i$ (l. 1.11. ábra), utóbbinak pedig a $k = -i$ helyen van ugrása.



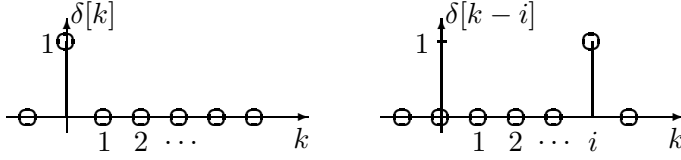
1.11. ábra. Az egységugrásjel és eltoltja

1.4.3. Az egységimpulzus

Az egységimpulzus (diszkrét idejű Dirac-impulzus) jele és definíciója az alábbi (l. 1.12. ábra):

$$\delta[k] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0; \\ 1, & \text{ha } k = 0; \\ 0, & \text{ha } k > 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

azaz az egységimpulzus értéke a $k = 0$ helyen 1, bármely más helyen értéke nulla.



1.12. ábra. Az egységimpulzus és eltoltja

A tetszőleges i ütemmel eltolt egységimpulzus a következőképp adható meg:

$$\delta[k-i] = \begin{cases} 0, & \text{ha } k < i; \\ 1, & \text{ha } k = i; \\ 0, & \text{ha } k > i. \end{cases} \quad (1.30)$$

A $\delta[k-i]$ a k tengelyen jobbra (l. 1.12. ábra), a $\delta[k+i]$ pedig balra tolódik el a $\delta[k]$ jelhez képest, hiszen előbbi a $k = i$, utóbbi pedig a $k = -i$ hely kivételével mindenütt nulla. Az egységimpulzus bevezetésével pl. az (1.23) és az (1.24) jel a következőképp írható le:

$$\begin{aligned} x_1[k] &= 4\delta[k] + 2\delta[k-1] + \delta[k-2] + 0,5\delta[k-3] + \dots, \\ x_2[k] &= 1,1\delta[k-1] + 2,2\delta[k-2] + 3,3\delta[k-3]. \end{aligned}$$

Tetszőleges $x[k]$ jel általánosan a következő alakban írható fel:

$$x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \delta[k-i], \quad (1.31)$$

tehát az $x[k]$ jelet eltolt egységimpulzusok *súlyozott összegeként*, más néven *szuperpozíciójaként* írhatjuk fel.

1.4.4. Az egységugrásjel és a Dirac-impulzus kapcsolata

Az egységugrás kifejezhető egységimpulzusokkal a következőképp:

$$\boxed{\varepsilon[k] = \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i] \equiv \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \dots,} \quad (1.32)$$

az egységimpulzus pedig kifejezhető az egységugrással:

$$\boxed{\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1].} \quad (1.33)$$

Utóbbi általánosításával juthatunk el a folytonos idejű ablakhoz hasonló diszkrét idejű ablakhoz. Ha a levont $\varepsilon[k-1]$ helyett pl. $\varepsilon[k-4]$ -et íránk, akkor egy olyan jelet kapnánk, ami csak a $0 \leq k \leq 3$ intervallumban adna 1 értéket, minden más helyen pedig nullát. Ezzel lehetőség nyílik véges tartójú jelek leírására. Az (1.24) jel így a következőképp adható meg:

$$x_2[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4]\} \quad 1, 1k,$$

azaz az $1, 1k$ típusú jelet, amely a $-\infty \leq k \leq \infty$ intervallumban értelmezett, szorozzuk egy olyan ablakkal, amely csak a $0 \leq k \leq 3$ intervallumban ad egységnyi értéket. Ha tehát az $1, 1k$ jelet az $\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4]$ ablakon keresztül nézzük, akkor pont a kívánt $x_2[k]$ jelet kapjuk.

1.5. Jelek további osztályozása

A mérnöki gyakorlatban kialakult néhány elnevezés a jelek fajtáira és jellemzőire. Ezek közül a számunkra fontosakat tárgyaljuk a következőkben.

1.) Belépőjelek és nem belépő jelek. Egy folytonos idejű $x(t)$ jelet *belépő*nek nevezünk, ha értéke t negatív értékeire azonosan nulla. Egy diszkrét idejű $x[k]$ jel akkor belépő, ha értéke k

negatív értékeire azonosan nulla. Tehát

$$\boxed{x(t) = 0, \quad \text{ha } t < 0, \quad \text{illetve} \quad x[k] = 0, \quad \text{ha } k < 0.} \quad (1.34)$$

Az (1.2) folytonos idejű és az (1.23) diszkrét idejű jelek tehát belépőjelek. A legegyszerűbb belépőjelek az egységugrás és a Dirac-impulzus. Bármely $x(t)$, vagy $x[k]$ jel egységugrással szorozva belépőjelet ad. Általánosan azt mondhatjuk, hogy az $x(t)$ jel a t_0 helyen belépőjel, ha értéke a $t < t_0$ időintervallumban nulla. Analóg módon az $x[k]$ jel a k_0 helyen belépőjel, ha értéke a $k < k_0$ időintervallumban nulla. Tehát

$$\boxed{x(t) = 0, \quad \text{ha } t < t_0, \quad \text{illetve} \quad x[k] = 0, \quad \text{ha } k < k_0.} \quad (1.35)$$

Ha nem adható meg olyan t_0 időpillanat, illetve k_0 ütem, amelyre az előző feltétel teljesül, akkor a jel *nem belépő* típusú. Ilyen tipikus példa a nem belépő szinuszos jel, az $x(t) = X \cos \omega t$ és az $x[k] = X \cos \vartheta k$ jel, amivel a 6. és a 7. fejezetben részletesen foglalkozunk. További példák nem belépő jelekre: $x(t) = e^{-2t}$, $x[k] = 1$.

2.) Páros és páratlan jelek. Egy $x(t)$, illetve $x[k]$ jelet *párosnak* nevezünk, ha a jelre igaz, hogy

$$\boxed{x(-t) = x(t), \quad \text{illetve} \quad x[-k] = x[k],} \quad (1.36)$$

azaz, ha a jel a függőleges tengelyre (az ordinátára) szimmetrikus. Példák páros jelekre:

- $x(t) = 1$,
- $x(t) = 5 \cos \omega t$, illetve $x[k] = \cos \vartheta k$,
- $x(t) = e^{-5|t|}$, illetve $x[k] = 2|k|$,
- $x(t) = \delta(t)$, $x(t) = \delta(t+2) + \delta(t-2)$, illetve $x[k] = \delta[k]$.

Egy $x(t)$, illetve $x[k]$ jelet *páratlannak* nevezünk, ha teljesül, hogy

$$\boxed{x(-t) = -x(t), \quad \text{illetve} \quad x[-k] = -x[k],} \quad (1.37)$$

azaz, ha a jel az origóra szimmetrikus. Példák páratlan jelekre:

- $x(t) = 2t$, illetve $x[k] = -5k$,
- $x(t) = 5 \sin \omega t$, illetve $x[k] = \sin \vartheta k$,
- $x(t) = \delta(t + 2) - \delta(t - 2)$.

Bármely $x(t)$, illetve $x[k]$ jel felbontható egy páros és egy páratlan jel összegére:

$$\boxed{x(t) = x_{\text{ps}}(t) + x_{\text{ptl}}(t), \quad x[k] = x_{\text{ps}}[k] + x_{\text{ptl}}[k],} \quad (1.38)$$

ahol

$$\boxed{x_{\text{ps}}(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)], \quad x_{\text{ps}}[k] = \frac{1}{2} \{x[k] + x[-k]\},} \quad (1.39)$$

illetve

$$\boxed{x_{\text{ptl}}(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)], \quad x_{\text{ptl}}[k] = \frac{1}{2} \{x[k] - x[-k]\}.} \quad (1.40)$$

3.) Korlátos jelek. Egy $x(t)$, illetve $x[k]$ jel *korlátos*, ha létezik olyan véges M érték, amelyre teljesül hogy:

$$\boxed{|x(t)| < M, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{illetve} \quad |x[k]| < M, \quad k \in \mathbb{Z}.} \quad (1.41)$$

Korlátos jel pl. az $x(t) = X \cos \omega t$, mivel $x(t)$ értéke abszolút értékben maximálisan X lehet. Az $x(t) = \varepsilon(t)$ és az $x[k] = \varepsilon[k]$ jel szintén korlátos. Fontos megjegyezni, hogy míg a $\delta[k]$ korlátos (értéke a $k = 0$ helyen 1), addig a $\delta(t)$ jel nem korlátos, mivel értéke végtelen nagy a $t = 0$ helyen.

4.) Abszolút integrálható jelek. A folytonos idejű $x(t)$ jelet *abszolút integrálhatónak* nevezzük, ha

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.} \quad (1.42)$$

5.) Abszolút összegezhető jelek. A diszkrét idejű $x[k]$ jelet *abszolút összegezhetőnek* nevezzük, ha

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty.} \quad (1.43)$$

6.) Négyzetesen integrálható jelek. A folytonos idejű $x(t)$ jelet *négyzetesen integrálhatónak* nevezzük, ha

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.} \quad (1.44)$$

7.) Négyzetesen összegezhető jelek. A diszkrét idejű $x[k]$ jelet *négyzetesen összegezhetőnek* nevezzük, ha

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 < \infty.} \quad (1.45)$$

8.) Periodikus jelek. Egy $x(t)$ folytonos idejű jel *periodikus* a T periódusidővel, ha $x(t+T) = x(t)$ fennáll t minden értékére. Egy $x[k]$ diszkrét idejű jel *periodikus* a K periódussal, ha $x[k+K] = x[k]$ fennáll k minden értékére. A periodikus jel egy tipikus példája a *szinuszos jel*, másnéven *harmonikus jel*.

2. fejezet

Rendszerek

2.1. A rendszer fogalma

A *rendszer egy fizikai objektum valamilyen modellje*, melynek segítségével modellezhetjük, matematikailag leírhatjuk annak működését.

Rendszer pl. egy szabályozandó berendezést (pl. egy szivattyút), amelyhez szabályozó eszközt kell tervezni, egy bonyolult ipari robotot, de rendszer lehet egy rugóra akasztott test és a rugó együttesen. A rendszer lényege, hogy matematikai formába öntsük azt a bonyolult folyamatot, amelynek *szimulációját* el szeretnénk végezni annak érdekében, hogy megbizonyosodjunk az objektum tulajdonságairól, megtudjuk, hogy az hogyan fog viselkedni, ha valamilyen hatás éri.

Ezek a külső hatások a rendszer *bemenetei*, másnéven *gerjesztések*, s a rendszer ezen gerjesztésekre *válaszokkal* reagál, melyek a rendszer *kimenetei*.

Az előző részben tárgyalt jelek tehát akár a rendszer bemenetei és kimenetei is lehetnek.

2.2. Rendszerek osztályozása

A rendszer a bemeneteket kimenetekké *transzformálja*, azaz adott gerjesztésekhez adott válaszokat rendel. A rendszereket bemeneteik és kimeneteik száma alapján két fő csoportba sorolhatjuk (l. 2.1. ábra):

1.) SISO-rendszerek. A SISO rövidítés az angol „single input single output” elnevezésből adódik, és *egy bemenetű és egy kimenetű rendszert* jelent. Ezen rendszerek egyetlen gerjesztéshez egyetlen választ rendelnek, amit az

$$\boxed{y(t) = \mathcal{W}\{s(t)\}, \quad \text{vagy} \quad y[k] = \mathcal{W}\{s[k]\}} \quad (2.1)$$

gerjesztés-válasz kapcsolattal írhatunk le matematikailag. A továbbiakban $s(t)$ és $y(t)$ jelöli a folytonos idejű rendszer gerjesztését és válaszát, $s[k]$ és $y[k]$ pedig a diszkrét idejű rendszer gerjesztését és válaszát. A $\mathcal{W}$ (írott W) az összerendelés operátora, amely reprezentálja magát a rendszert, azaz ha ismerjük a rendszer gerjesztését, akkor annak válasza meghatározható. Többnyire SISO-rendszerekkel foglalkozunk.

2.) MIMO-rendszerek. A MIMO rövidítés az angol „multiple input multiple output” elnevezésből adódik, és *sok bemenetű és sok kimenetű rendszert* jelent. Ezen rendszerek értelemszerűen több gerjesztéshez több választ rendelnek, amit az

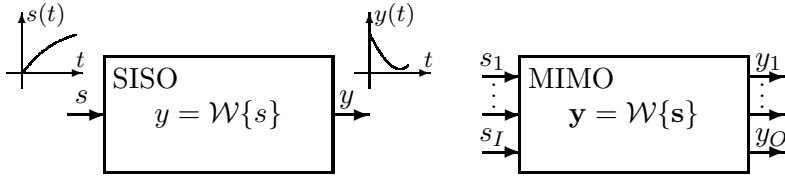
$$\boxed{\mathbf{y}(t) = \mathcal{W}\{\mathbf{s}(t)\}, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{y}[k] = \mathcal{W}\{\mathbf{s}[k]\}} \quad (2.2)$$

gerjesztés-válasz kapcsolattal írhatunk le matematikailag. Ebben az esetben az I számú gerjesztés és az O számú válasz között a gerjesztés-válasz kapcsolatot O számú operátor írja le mind folytonos, mind diszkrét idejű rendszer esetén:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \mathcal{W}_1\{s_1, s_2, \dots, s_I\}, \\ y_2 &= \mathcal{W}_2\{s_1, s_2, \dots, s_I\}, \\ &\vdots \\ y_O &= \mathcal{W}_O\{s_1, s_2, \dots, s_I\}, \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{y} = \mathcal{W}\{\mathbf{s}\},$$

amely gerjesztéseket és válaszokat egy-egy oszlopvektorban lehet megadni:

$$\mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_I]^T, \quad \mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_O]^T.$$



2.1. ábra. SISO- és MIMO-rendszerek grafikus megadása (SISO-rendszernél példát láthatunk egy gerjesztésre adott válaszra folytonos idejű rendszer esetén)

Léteznek még MISO- (sok bemenetű és egy kimenetű), és SIMO- (egy bemenetű és sok kimenetű) rendszerek is.

Fontos megjegyezni, hogy a gerjesztés-válasz kapcsolat a fenti alakban általában nem ismert. Léteznek azonban ún. *rendszermodellek*, amelyek rendelkeznek bizonyos számú ismeretlen paraméterrel, s a cél az, hogy az objektumon végzett mérések eredményeit felhasználva meghatározzuk a rendszermodell paramétereit úgy, hogy az minél jobban leírja a vizsgált objektum viselkedését. Ez a feladat a *rendszeridentifikáció*, amely még manapság is fontos kutatási terület. Ennek ismertetése meghaladja ezen könyv és a tárgy kereteit, így ezzel nem foglalkozunk, hanem feltesszük, hogy az objektum gerjesztés-válasz kapcsolata, azaz a rendszermodell adva van.

Osztályozhatjuk a rendszereket a bemenet(ek) és kimenet(ek) közötti leképezést megvalósító $\mathcal{W}$ operátor determinisztikus és sztochasztikus jellege alapján. Csak a determinisztikus gerjesztés-válasz kapcsolatú és determinisztikus bemenetű és determinisztikus kimenetű rendszerekkel foglalkozunk.

Attól függően, hogy a gerjesztés és a válasz folytonos idejű vagy diszkrét idejű, egy rendszer lehet

- 1.) *folytonos idejű gerjesztésű és folytonos idejű válaszú,*
- 2.) *folytonos idejű gerjesztésű és diszkrét idejű válaszú,* vagy analóg-digitális (A/D) átalakítók,
- 3.) *diszkrét idejű gerjesztésű és folytonos idejű válaszú,* vagy digitális-analóg (D/A) átalakítók,
- 4.) *diszkrét idejű gerjesztésű és diszkrét idejű válaszú.*

A könyv főként az első és az utolsó csoportba tartozó rendszerekkel foglalkozik. Az A/D és D/A átalakítók esetében a diszkrét idejű jelek rendszerint diszkrét értékűek is. A 10. és 11. fejezetekben foglalkozunk a másik két csoporttal is.

A rendszereket (amelyeknek gerjesztése és válasza egyaránt folytonos idejű vagy diszkrét idejű) még a következő fontos szempontok szerint osztályozhatjuk:

1.) Lineáris rendszerek. Egy rendszer (folytonos idejű, vagy diszkrét idejű) akkor *lineáris*, ha a gerjesztés-válasz kapcsolatot kifejező $\mathcal{W}$ operátor lineáris, azaz ha a rendszerre érvényes a *szuperpozíció elve*, ami a következőt jelenti.

Tételezzük fel, hogy a $\mathcal{W}$ operátor az s_1 gerjesztéshez az y_1 választ, az s_2 gerjesztéshez pedig az y_2 választ rendeli. Legyen ezután a rendszer gerjesztése $s = C_1 s_1 + C_2 s_2$, ahol C_1 és C_2 tetszőleges konstans értékek, akkor a lineáris rendszer válasza $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Ha ez nem áll fenn, akkor a rendszer *nem-lineáris*. A linearitás feltételét formálisan is megfogalmazhatjuk, ha felhasználjuk az $y = \mathcal{W}\{s\}$ jelölést:

$$\boxed{\mathcal{W}\{C_1 s_1 + C_2 s_2\} = C_1 \mathcal{W}\{s_1\} + C_2 \mathcal{W}\{s_2\} = C_1 y_1 + C_2 y_2.} \quad (2.3)$$

A linearitás fontos következménye, hogy ha a rendszer gerjesztése $s = 0$, akkor válasza is $y = 0$.

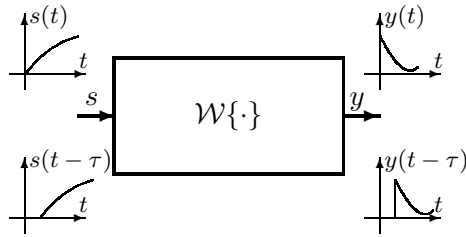
A lineáris ellenállás karakterisztikája Ohm törvénye értelmében a következő: $u(t) = Ri(t)$. A kondenzátort és a te-

keresztet karakterizáló $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ és $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ egyenletek szintén lineáris eszközöket írnak le (R , L és C konstans értékek). A félvezető eszközök (dióda, tranzisztor) tipikus nemlineáris áramköri elemek.

A könyvben főként lineáris rendszerekkel foglalkozunk, de a 12. fejezetben kitérünk a nemlineáris rendszerek vizsgálatára is.

2.) Invariáns rendszerek. Egy rendszer akkor *invariáns*, ha a gerjesztés időbeli eltolása azt eredményezi, hogy a válaszban csak egy ugyanekkora időbeli eltolódás következik be (2.2. ábra):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}\{s(t - \tau)\} &= \mathcal{W}\{s(t)\}|_{t \rightarrow t - \tau}, \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{W}\{s[k - i]\} &= \mathcal{W}\{s[k]\}|_{k \rightarrow k - i}, \quad \forall k, i \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (2.4)$$



2.2. ábra. A folytonos idejű rendszer invarianciája

Tegyük fel, hogy egy folytonos idejű SISO-rendszer gerjesztése $s(t)$, s erre a rendszer $y(t)$ válasszal reagál. Toljuk el ezután a gerjesztést az időben, miközben a jel alakja nem változik meg, azaz legyen a gerjesztés $s(t - \tau)$. Ha ehhez a gerjesztéshez $y(t - \tau)$ válasz tartozik, akkor a rendszer invariáns. Diszkrét idejű rendszerek esetén ez a következőképp részletezhető. Tegyük fel, hogy egy diszkrét idejű rendszer gerjesztése $s[k]$, s erre a rendszer $y[k]$ válasszal reagál. Toljuk el ezután a gerjesztést az időben, miközben a jel alakja nem változik meg, azaz legyen a gerjesztés $s[k - i]$. Ha ehhez a gerjesztéshez $y[k - i]$ válasz tartozik, akkor a rendszer invariáns. Ezen feltételnek minden $s(t)$ - $y(t)$, illetve $s[k]$ - $y[k]$ párra teljesülni kell. Ellenkező esetben a rendszer *variáns*.

Variáns rendszer pl. egy egyszerű ellenállás is, ha figyelembe vesszük, hogy a rajta átfolyó áram által létrehozott teljesítmény melegíti az ellenálláshuzalt. A melegedés hatására megnő a huzal rezisztenciája. Egyszerűbb esetben ettől a hatástól eltekintünk, azaz invariáns rendszerként modellezzük az ellenállást, konstans rezisztenciával.

3.) Kauzális rendszerek. Egy rendszer akkor *kauzális*, ha válaszának adott időpontbeli értéke nem függ a gerjesztés jövőbeli értékétől, vagy precízebben megfogalmazva, egy folytonos idejű rendszer akkor kauzális, ha az $y(t)$ válasz bármely t_1 időpontban az $s(t)$ gerjesztés csak olyan értékeitől függ, melyekre $t \leq t_1$. Egy diszkrét idejű rendszer (analóg módon) akkor kauzális, ha az $y[k]$ válasz bármely k_1 ütemben az $s[k]$ gerjesztés csak olyan értékeitől függ, melyekre $k \leq k_1$. Egyébként a rendszer *akauzális*. *Egy lineáris rendszer akkor és csak akkor kauzális, ha bármely belépő gerjesztéshez belépő válasz tartozik.*

Minden fizikai rendszer kauzális, hiszen a tapasztalat szerint nincs olyan rendszer, amelynek jelen időpillanatbeli állapota függene a jövőtől. Ezek az ún. predikcióra (jóslásra) képes rendszerek.

4.) Stabil rendszerek. Egy rendszer akkor *gerjesztés-válasz* stabilis, ha *bármely* korlátos gerjesztésre korlátos válasszal reagál. Ezt a stabilitást BIBO-stabilitásnak is szokás nevezni a „bounded input implies bounded output” angol elnevezés rövidítéséből. A definícióban kiemeljük a *bármely* szó jelentőségét. Elképzelhető, hogy a rendszer több korlátos gerjesztésre korlátos választ ad, de ha létezik akár egyetlen olyan korlátos gerjesztés, amelyre a rendszer nem korlátos válasszal reagál, akkor a rendszer nem gerjesztés-válasz stabilis, más szóval a rendszer *labilis*.

3. fejezet

Hálózatok

3.1. A hálózat fogalma

A *hálózat* (gondoljunk pl. egy villamos hálózatra) *komponensek összekapcsolásából áll*. Minden komponensnek (hálózati elemnek) egy vagy több bemenete és egy vagy több kimenete lehet (pólusok). A bemenet(ek) és a kimenet(ek) közti kapcsolatot a komponens *karakterisztikája* adja meg, ami egy függvénykapcsolat a komponens bemeneti változója (változói) és kimeneti változója (változói) között, pl. megadja a kimeneti változót a bemeneti változó függvényében. A hálózat bemenetére a gerjesztést kapcsoljuk, kimenetén pedig a választ várjuk.

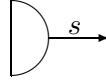
A hálózatok ugyanúgy osztályozhatók, mint a rendszerek. Beszélhetünk tehát lineáris és nemlineáris, invariáns és variáns, kauzális és akauzális, stabil és nem stabil hálózatokról. A hálózat is rendelkezhet egy, vagy több bemenettel és egy, vagy több kimenettel, gerjesztése és válasza lehet folytonos idejű vagy diszkrét idejű. Az elnevezések definíciója természetesen megegyezik a rendszerek esetében tárgyaltakkal.

A hálózat akkor reprezentál, másszóval realizál egy rendszert, ha gerjesztés-válasz kapcsolataik megegyeznek.

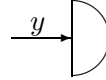
3.2. Jelfolyam típusú hálózatok elemei

Az általunk vizsgált hálózatok ún. *jelfolyamhálózatok*, melyekben a következő jellegzetes (elemi) komponensek fordulhatnak elő:

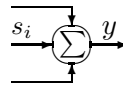
1.) Forrás. A forrás a hálózat *bemenetét*, *gerjesztését* reprezentálja, egyetlen kimeneti változója az $s = s(t)$ folytonos idejű jel, vagy az $s = s[k]$ diszkrét idejű jel, bemenete nincs.



2.) Nyelő. A nyelő a hálózat *kimenetét*, *válaszát* reprezentálja, bemeneti változója a keregett $y = y(t)$ folytonos idejű jel, illetve $y = y[k]$ diszkrét idejű jel, kimenete nincs.



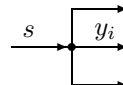
3.) Összegzőcsomópont. Az összegző csomópont kimenetén a bemenetére érkező jelek összege jelenik meg, azaz



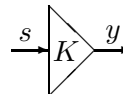
$$y(t) = \sum_i s_i(t), \quad \text{vagy} \quad y[k] = \sum_i s_i[k]. \quad (3.1)$$

Tetszőleges számú bemenete lehet és egyetlen kimenete van. Az összegzőcsomópontoknál tehát *összekapcsolási kényszer* áll fenn, melynek teljesülni kell.

4.) Elágazócsomópont. Egyetlen bemeneti pólusa és tetszőleges számú kimeneti pólusa van. A bemenetére érkező $s = s(t)$, vagy $s = s[k]$ jel minden kimenetén *változatlanul* halad tovább, azaz $y_i = y_i(t) = s(t)$, vagy $y_i = y_i[k] = s[k]$. Az elágazócsomópontoknál szintén *összekapcsolási kényszer* áll fenn.

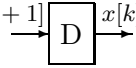


5.) Erősítő. Az erősítő olyan lineáris komponens, amelynek karakterisztikája $y(t) = Ks(t)$, vagy $y[k] = Ks[k]$, ahol K egy időtől független konstans (*erősítés*), tehát az erősítő invariáns elem.

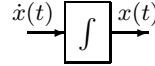


Ha $|K| < 1$, akkor *csillapításról* beszélünk. Ha K az idő ismert függvénye ($K(t)$, vagy $K[k]$), akkor variáns erősítőről van szó.

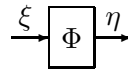
6.) Késleltető. A késleltető olyan *diszkrét idejű* hálózati elem, amely a bemenetére érkező $x[k+1]$ diszkrét idejű jelet egy ütemmel késlelteti, de a kimeneti jel és a bemeneti jel értéke megegyezik. Ez memóriával bír, un. *dinamikus elem*. A D betű az angol *delay* (késleltetés) szóra utal.



7.) Integrátor. Az integrátor olyan *folytonos idejű* hálózati elem, amelynek kimenetén a bemenetére érkező folytonos idejű jel integrálja jelenik meg. A későbbiekben azonban azt a jelölést fogjuk használni, hogy az integrátor bemeneti jele az $\dot{x}(t)$ derivált jel, kimenete pedig az $x(t)$ jel. A jel fölötti pont az idő szerinti deriváltra utal. Az integrátor a folytonos idejű hálózatok *dinamikus eleme*.

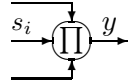


8.) Nemlineáris erősítő. A nemlineáris erősítő olyan komponens, melynek karakterisztikája nemlineáris, bemenet és kimenete között az $\eta = \Phi\{\xi\}$ kapcsolat áll fenn, ahol ξ (a görög kszí betű) a nemlineáris erősítő bemeneti jele, η (a görög eta betű) pedig a kimeneti jele, $\Phi\{\cdot\}$ (a görög nagy fi betű) pedig egy nemlineáris függvénykapcsolat.



9.) Szorzócsomópont. A szorzócsomópont (ami egy nemlineáris komponens) kimenetén a bemenetére érkező jelek szorzata jelenik meg:

$$y(t) = \prod_i s_i(t), \quad \text{vagy} \quad y[k] = \prod_i s_i[k]. \quad (3.2)$$



Megemlítjük, hogy egyéb típusú hálózatok is léteznek, a villamosmérnöki gyakorlatban pl. a *Kirchhoff-típusú hálózat* az egyik legfontosabb.

A *hálózatanalízis* feladata az ismert hálózati topológiával, és ismert karakterisztikájú komponensekkel megadott hálózat által reprezentált rendszer valamely gerjesztés-válasz kapcsolatának meghatározása. Erre példák kapcsán térünk ki.

2. rész Analízis az időtartományban

Ebben a részben *lineáris, invariáns és kauzális* rendszerek időtartománybeli analízisével foglalkozunk. Az *időtartományban végzett számítások során a gerjesztés és a válasz időfüggvényét használjuk*. A cél adott gerjesztéshez tartozó válasz meghatározása a rendszer valamely leírásának ismeretében. A rendszert megadhatjuk *impulzusválasszával, rendszeregyenletével, állapotváltozós leírásával, vagy hálózati reprezentációjával*. Folytonos idejű rendszerek esetében ezen négy módszer közül csak hárommal foglalkozunk (az impulzusválasszal, az állapotváltozós leírással, valamint a jelfolyam típusú hálózatokkal), diszkrét idejű rendszerek esetében azonban mind a négy lehetőséget tárgyaljuk, és megadjuk a válasz számításának menetét. A folytonos idejű rendszeregyenlettel csak érintőleg foglalkozunk. Megadjuk a rendszeregyenlet és az állapotváltozós leírás kapcsolatát is. Foglalkozunk továbbá a rendszerek *stabilitásával* (gerjesztés-válasz stabilitás és aszimptotikus stabilitás).

Először a folytonos idejű (a fejezetcímben FI) rendszerek analízisével, majd hasonló gondolatmenetet követve a diszkrét idejű (a fejezetcímben DI) rendszerek analízisével foglalkozunk.

A módszerek tárgyalása során igyekszünk szem előtt tartani azt a tényt, hogy a könyv elsősorban egyetemi alapképzésben részt vevő hallgatók számára készült. Ezen oknál fogva csak a papíron, kézzel is megoldható problémákra és feladatokra koncentrálnak és az alapvető tudnivalókat tárgyaljuk a könyv keretei által megszabott határokon belül. A módszerek azonban alapot és szemléletet adnak arra vonatkozóan, hogyan lehet bonyolultabb feladatokat számítógépes programok alkalmazásával megoldani.

4. fejezet

FI rendszerek analízise az időtartományban

4.1. Az ugrásválasz és alkalmazása

4.1.1. Az ugrásválasz definíciója

Ha ismerjük egy lineáris rendszer *adott gerjesztéshez* (az *un. vizsgálójelhez*) *tartozó válaszát*, akkor ezen *gerjesztés-válasz kapcsolat* ismeretében meg tudjuk határozni a rendszer tetszőleges gerjesztéshez tartozó válaszát is. Ilyen *vizsgálójel* az *egységugrásjel* és a *Dirac-impulzus*. Ebben az esetben ugyanis ez a gerjesztés-válasz kapcsolat jellemzi a lineáris rendszert (l. $\mathcal{W}\{\cdot\}$ operátor a (2.1) definícióban). A következőkben ezen két jel alkalmazásával foglalkozunk.

Ha a gerjesztés időfüggvényét elemi függvényekre bontjuk, akkor az egyes részfüggvényekre, mint gerjesztésekre a részválaszokat külön-külön meg lehet határozni. Végül a (2.3) összefüggésnek megfelelően a részválaszok összegzése adja a teljes válaszjelet, hiszen a rendszer lineáris.

Az utóbbi szempontból a legegyszerűbb vizsgálójel az $\varepsilon(t)$

egységugrás. Ha a rendszer bemenetére ezt a jelet adjuk, akkor a rendszer válasza az ún. *ugrásválasz*, vagy más néven *átmeneti függvény* lesz, melyet $v(t)$ -vel szokás jelölni.

Az *ugrásválasz* tehát az *egységugrásjelre adott válasz*:

$$\boxed{y(t) = v(t), \quad \text{ha} \quad s(t) = \varepsilon(t), \quad \text{azaz} \quad v(t) = \mathcal{W}\{\varepsilon(t)\}.} \quad (4.1)$$

Ha a rendszer *kauzális*, akkor az *ugrásválasz belépőjel*. Ha a rendszer időben *invariáns*, akkor az eltoló $\varepsilon(t - \tau)$ jelre a rendszer $v(t - \tau)$ válasszal felel, hiszen ha a bemenetre érkező jel időben később jelentkezik, akkor a válaszban is ugyanekkora késleltetés lesz megfigyelhető.

A rendszer *invarianciájának* és *linearitásának* illusztrálását szolgálja a következő három egyszerű példa (l. 4.1. ábra).

1.) Legyen egy lineáris, invariáns és kauzális rendszer *ugrásválasza*, azaz az $s(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztésre adott válasza a következő:

$$v(t) = \varepsilon(t) e^{-2t}.$$

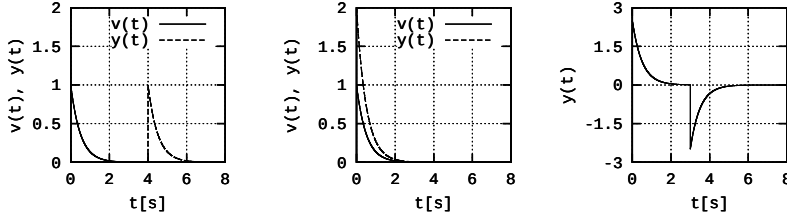
Ha *ugyanezen* rendszer gerjesztése $s(t) = \varepsilon(t - 4)$, ami azt jelenti, hogy az ugrás a $t = 4$ s időpillanatban jelenik meg, akkor a rendszer kimenetén az *invariancia* következtében az

$$y(t) = v(t - 4) = \varepsilon(t - 4) e^{-2(t-4)}$$

válaszjel jelenik meg a $t = 4$ s időpillanatban, tehát a válaszjel is ugyanannyit késik, mint a gerjesztés (4.1. ábra 1. ábrája). Vegyük észre, hogy minden t helyébe $(t - 4)$ -et írtunk.¹

2.) Az *ugrásválasz* ismeretében meghatározhatjuk pl. azt is, hogy milyen feleletet ad a rendszer az $s(t) = 2\varepsilon(t)$ gerjesztésre (az $\varepsilon(t)$ jel konstansszorosára). A gerjesztés ebben az esetben az egységugrásjel 2-szerese, s mivel a rendszer az $\varepsilon(t)$ jelre $v(t)$

¹Az e^{-2t} jel a $t = 4$ s helyen $3,355 \cdot 10^{-4}$ értéket ad, ugyanakkor az $e^{-2(t-4)}$ jel ugyanezen időpillanatban 1-et ad, s ez a helyes az időbeli invariancia miatt.



4.1. ábra. Az invariancia és a linearitás illusztrálása

jellel válaszol, a gerjesztésben lévő konstansszorzó megjelenik a válaszban is, tehát a kimeneten az $y(t) = 2v(t)$ jel lesz (4.1. ábra 2. ábrája). Ez a rendszer *linearitásának* következménye, vagyis

$$y(t) = 2\varepsilon(t)e^{-2t}.$$

3.) Legyen ezután a rendszer gerjesztése

$$s(t) = 2,5[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 3)],$$

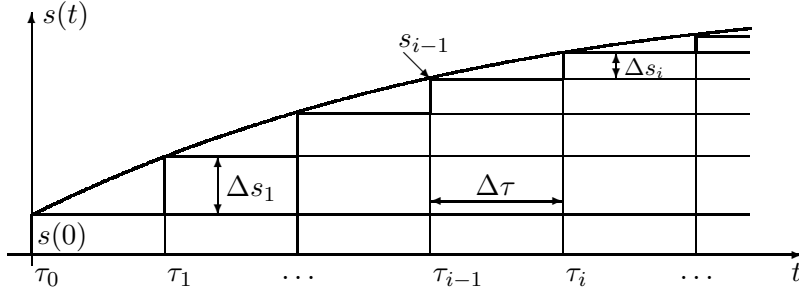
s határozzuk meg a rendszer válaszát. Az $s(t)$ jel most két jel különbsége, s mindkét jel tartalmaz $\varepsilon(t)$ típusú jelet: az első tag ennek 2,5-szerese, a második tag szintén a 2,5-szerese, de az el is van tolva a $t = 3$ s helyre. A rendszer válaszához fel kell használni a fenti két eredményt, s így a válaszjel $y(t) = 2,5[v(t) - v(t - 3)]$ lesz. Behelyettesítés után kapjuk, hogy (l. 4.1. ábra 3. ábrája)

$$y(t) = 2,5 \left[\varepsilon(t)e^{-2t} - \varepsilon(t - 3)e^{-2(t-3)} \right].$$

Az ugrásválasz egy ún. *rendszerjellemező függvény*, mivel jellemzi a rendszer működését, és segítségével tetszőleges gerjesztésre meghatározható a válaszjel időfüggvénye. A következőkben ezt vizsgáljuk.

4.1.2. A válaszjel számítása

A következőkben feltételezzük, hogy ismert a lineáris rendszer $v(t)$ ugrásválasza, s célunk egy tetszőleges $s(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ válasz meghatározása. A későbbiekben megvizsgáljuk azt is, hogy lehet a rendszer valamely leírása mellett az ugrásválaszt meghatározni.



4.2. ábra. A gerjesztés jelét egymás után bekapcsolt jelek összegként közelítjük

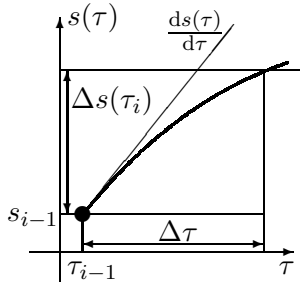
Kövessük végig a következő gondolatmenetet a 4.2. ábra alapján, és induljunk ki a *belépő* $s(t)$ gerjesztés időfüggvényéből. A t időtengely mentén a $[0, \dots, t]$ intervallumban (a választ a t időpillanatban keressük) vegyünk fel $\Delta\tau$ időközönként $\tau_i = i\Delta\tau$ időpontokat ($i = 0, \dots, N$), és $\Delta\tau = \frac{t}{N}$. Ha $s(0)$ a belépőgerjesztés $t = 0$ -ban felvett értéke, akkor $\varepsilon(t)s(0)$ egy olyan belépő-időfüggvény, amelynek magassága $s(0)$. Ha ezen időfüggvényhez hozzáadunk egy $\varepsilon(t - \tau_1)\Delta s_1$ időfüggvényt, akkor a $t = \tau_1$ időpillanattól kezdve az eredő függvény értéke $s(0) + \Delta s_1$. Δs_1 értékét válasszuk meg úgy, hogy $s(0) + \Delta s_1$ pontosan $s(\tau_1)$ értékét adja, azaz $\Delta s_1 = s(\tau_1) - s(0)$. Ha az így kialakuló időfüggvényhez hozzáadunk egy $\varepsilon(t - \tau_2)\Delta s_2$ időfüggvényt, akkor a $t = \tau_2$ időpillanattól kezdve az eredő függvény értéke $s(0) + \Delta s_1 + \Delta s_2$, ahol Δs_2 értékét válasszuk meg úgy, hogy $s(0) + \Delta s_1 + \Delta s_2$ éppen $s(\tau_2)$ értékét adja, azaz $\Delta s_2 = s(\tau_2) - s(0) - \Delta s_1$ és így tovább.

Ha ezt az eljárást minden egyes τ_i értékre elvégezzük, akkor az $s(t)$ gerjesztés időfüggvénye közelíthető egy *lépcsős* függvénnyel, amelyben $\varepsilon(t)$ konstansszorosai és eltoltsai szerepelnek: tetszőleges $s(t)$ gerjesztést $\Delta\tau$ időközönként egymás után bekapcsolt és adott $\Delta s_i = \Delta s(\tau_i)$ értékű ugrások összegeként állítjuk elő. Minél kisebb $\Delta\tau$ értéke, annál jobban meg tudjuk közelíteni az eredeti jelet. Mindez leírható a következőképp ($\Delta s_0 = s(0)$):

$$s(t) \simeq \sum_{i=0}^N \Delta s(\tau_i) \varepsilon(t - \tau_i) = \Delta s_0 \varepsilon(t) + \Delta s_1 \varepsilon(t - \tau_1) + \dots$$

Azt már tudjuk, hogy az $\varepsilon(t)$ jelre a rendszer válasza $v(t)$, s azt is, hogy a bemeneten történő időbeli eltolás a kimeneten ugyanakkora eltolást jelent az időben. A rendszer válasza egy ilyen lépcsős jelekből felépített jelalakra tehát a következő lesz:

$$y(t) = \sum_{i=0}^N \Delta s(\tau_i) v(t - \tau_i) = s(0)v(t) + \sum_{i=1}^N \Delta s(\tau_i) v(t - \tau_i). \quad (4.2)$$



4.3. ábra. *Illusztráció $\Delta s(\tau_i)$ kifejezéséhez (a 4.2. ábra egy kinagyított része)*

Differenciálszámításból ismeretes, hogy az $s(\tau)$ jel minden egyes pontjához húzott érintő kifejezhető a $\frac{ds(\tau)}{d\tau}$ differenciálhányados segítségével, s azt is tudjuk, hogy ha $\Delta\tau \rightarrow 0$, akkor $\frac{\Delta s(\tau)}{\Delta\tau} \simeq \frac{ds(\tau)}{d\tau}$. Ezen ismeretekre azért van szükség, hogy $\Delta s(\tau_i)$ értékét ebből az $(i-1)$ -edik pontra támaszkodva kifejezzük (4.3. ábra):

$$\Delta s(\tau_i) \simeq \left. \frac{ds(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau_{i-1}} \cdot \Delta\tau.$$

A (4.2) átalakítást azért végeztük el, mert $i = 0$ esetén a $\left. \frac{ds(\tau)}{d\tau} \right|_{-\Delta\tau} = 0$, hiszen a gerjesztés belépő. Ezt

felhasználva kapjuk, hogy

$$y(t) \simeq s(0)v(t) + \sum_{i=1}^N \frac{ds(\tau)}{d\tau} \bigg|_{\tau_{i-1}} \cdot \Delta\tau v(t - \tau_i).$$

Minél sűrűbbre vesszük a felosztást a $[0, \dots, t]$ intervallumban, azaz $\Delta\tau \rightarrow 0$ ($(\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0$), és így $N \rightarrow \infty$, annál pontosabb közelítést kapunk. Az összeg a következő integrálhoz konvergál:

$$\begin{aligned} y(t) &= s(0)v(t) + \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{ds(\tau)}{d\tau} \bigg|_{\tau_{i-1}} v(t - \tau_i) \Delta\tau = \\ &= s(0)v(t) + \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} v(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Ez a kifejezés alkalmas a válasz meghatározására, tartalmazza azonban az $s(t)$ gerjesztés idő szerinti deriváltját. Ezt átalakíthatjuk a parciális integrálás szabálya alapján, ami azt mondja ki, hogy

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$$

Legyen itt $u = s(\tau)$ és $v = v(t - \tau)$, akkor a fenti integrál a következőképp írható át

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau} v(t - \tau) d\tau &= [s(\tau)v(t - \tau)]_0^t - \int_0^t s(\tau) \frac{dv(t - \tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= s(t)v(0) - s(0)v(t) - \int_0^t s(\tau) \frac{dv(t - \tau)}{d\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Ez a kifejezés tartalmazza a $\frac{dv(t-\tau)}{d\tau}$ deriváltat, azonban a t idő szerinti deriváltat szeretnénk az összefüggésben látni, mivel az ugrásválasz a t változó függvénye. Használjuk fel a láncszabályt és hogy $d(t - \tau) = dt$:

$$\frac{dv(t - \tau)}{d\tau} = \frac{dv(t - \tau)}{d(t - \tau)} \frac{d}{d\tau}(t - \tau) = -\frac{dv(t - \tau)}{dt},$$

majd helyettesítsük vissza ezen eredményeket az $y(t)$ (4.3) kifejezésébe, s azt kapjuk, hogy

$$y(t) = s(t)v(0) + \int_0^t s(\tau) \frac{dv(t-\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (4.4)$$

Ez az összefüggés a *Duhamel-tétel*.

Ezen összefüggés levezetése során abból indultunk ki, hogy a gerjesztés belépő jellegű és a rendszer kauzális. Ezen gyakorlati szempontból is fontos eredmény tehát a folytonos idejű, lineáris, invariáns és kauzális rendszerek esetén igaz. Teljesen általános esetben mindez a következőképp alakul ha $v(-\infty) = 0$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \frac{dv(t-\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (4.5)$$

4.2. Az impulzusválasz és alkalmazása

4.2.1. Az impulzusválasz definíciója

Az $\varepsilon(t)$ mellett a másik fontos vizsgálójel a $\delta(t)$ Dirac-impulzus. Ha a rendszer bemenetére ezt a jelet adjuk, akkor a rendszer válasza az un. *impulzusválasz*, vagy másnéven *súlyfüggvény* lesz, melyet $w(t)$ -vel szokás jelölni.²

Az *impulzusválasz* tehát a *Dirac-delta* jelre adott válasz:

$$y(t) = w(t), \quad \text{ha} \quad s(t) = \delta(t), \quad \text{azaz} \quad w(t) = \mathcal{W}\{\delta(t)\}. \quad (4.6)$$

Az impulzusválasz akár csak az ugrásválasz *rendszerjellemző függvény*. Ha a rendszer *kauzális*, akkor az impulzusválasz *belépőjel*. Ha a rendszer időben *invariáns*, akkor az eltolt $\delta(t - \tau)$ jelre a rendszer $w(t - \tau)$ válasszal felel.

Az elmondottakat a következő példákkal illusztráljuk.

²Egyes irodalmakban $h(t)$ -vel is jelölik.

1.) Legyen egy lineáris, invariáns és kauzális rendszer impulzusválasza, azaz az $s(t) = \delta(t)$ gerjesztésre adott válasza például

$$w(t) = \delta(t) - 2\varepsilon(t)e^{-2t}.$$

Ha *ugyanezen* rendszer gerjesztése a késleltetett $s(t) = \delta(t - 5)$ jel, akkor a rendszer kimenetén a válaszjel szintén késni fog, mivel a rendszer *invariáns*:

$$y(t) = w(t - 5) = \delta(t - 5) - 2\varepsilon(t - 5)e^{-2(t-5)}.$$

2.) Az impulzusválasz ismeretében meghatározhatjuk pl. az $s(t) = 1,5\delta(t)$ gerjesztésre adott választ. A gerjesztés ebben az esetben a Dirac-impulzus 1,5-szerese, s így

$$y(t) = 1,5w(t) = 1,5\delta(t) - 3\varepsilon(t)e^{-2t}.$$

Ez a rendszer *linearitásának* következménye.

3.) Legyen a rendszer gerjesztése most

$$s(t) = 2\delta(t) + \delta(t - 3) - 3\delta(t - 5),$$

s határozzuk meg a rendszer válaszát. Az $s(t)$ jel most három jelből áll, s mindegyik tartalmaz $\delta(t)$ típusú jelet: annak konstansszorosát és eltoltját. A rendszer válaszának meghatározásához fel kell használni a fenti két eredményt, s így a válaszjel a következő lesz:

$$\begin{aligned} y(t) &= 2w(t) + w(t - 3) - 3w(t - 5) = \\ &= 2\delta(t) - 4\varepsilon(t)e^{-2t} + \delta(t - 3) - 2\varepsilon(t - 3)e^{-2(t-3)} - \\ &\quad - 3\delta(t - 5) + 6\varepsilon(t - 5)e^{-2(t-5)}. \end{aligned}$$

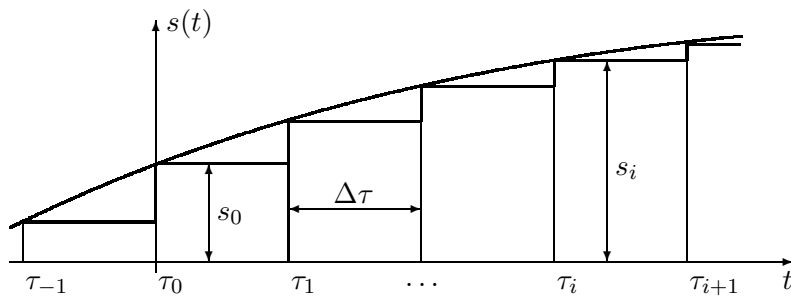
Ezen példákban a gerjesztés csak a $\delta(t)$ jelet, annak konstansszorosát és időbeli eltoltját tartalmazta, s a válasz meghatározása nagyon egyszerű volt. Vizsgáljuk meg most azt az esetet, amikor a gerjesztés egy általános időfüggvény.

4.2.2. A válaszjel számítása

A következőkben feltételezzük, hogy ismert a rendszer $w(t)$ impulzusválasza, s célunk egy tetszőleges $s(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ válasz meghatározása. A későbbiekben megvizsgáljuk azt is, hogy lehet a rendszer valamely leírása mellett az impulzusválaszt meghatározni.

Először az általános esetet vizsgáljuk, majd abból kiindulva a kauzális rendszer válaszjelét is meghatározzuk, végül a gerjesztés belépő hatását is figyelembe vesszük.

Amikor az ugrásválaszt használtuk a válasz előállításához, akkor a gerjesztést adott időpillanatokban bekapcsolt adott értékű ugrásjelek összegeként állítottuk elő. Erre azért volt szükség, hogy használhassuk az $\varepsilon(t)$ jelre adott ugrásválaszt.



4.4. ábra. A gerjesztés jelét impulzusok soroataként közelítjük

Ha a válasz számítására az impulzusválaszt használjuk, akkor hasonlóképpen kell eljárni, de a *nem belépő* gerjesztést $\Delta\tau$ szélességű impulzusokkal közelítjük (l. 4.4. ábra). A t időtengely mentén vegyünk fel $\Delta\tau$ időközönként $\tau_i = i\Delta\tau$ időpontokat és a $\tau_i \leq \tau < \tau_{i+1} = \tau_i + \Delta\tau$ időintervallumban közelítsük a gerjesztőjelet s_i értékével, $s_i = s(\tau_i)$ ($i = -\infty, \dots, \infty$).

Ha ezt minden intervallumra megtesszük, akkor ugyanolyan lépcsős függvényt kapunk, mint amelyet kaptunk az eltolt egységugrások segítségével, azonban most szakaszonként egy-egy

impulzussal közelítjük a függvényt. A gerjesztés tehát felírható a következő alakban:

$$s(t) \simeq \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(\tau_i) [\varepsilon(t - \tau_i) - \varepsilon(t - (\tau_i + \Delta\tau))].$$

Szorozzuk be ezen összeget $\Delta\tau$ -val és osszuk is el vele:

$$s(t) \simeq \sum_{i=-\infty}^{\infty} s(\tau_i) \frac{\varepsilon(t - \tau_i) - \varepsilon(t - (\tau_i + \Delta\tau))}{\Delta\tau} \Delta\tau.$$

A szummában szereplő tört az (1.10) összefüggésnek megfelelően pontosan a $\delta(t - \tau_i, \Delta\tau)$ függvényt tartalmazza. Minél sűrűbbre vesszük ezt a felosztást – azaz ha $\Delta\tau \rightarrow 0$ – annál pontosabb közelítést kapunk, és ekkor a $\delta(t - \tau_i, \Delta\tau)$ impulzusok a $\delta(t - \tau_i)$ Dirac-impulzusokba mennek át, az összegzés helyett pedig integrált írhatunk. A gerjesztés időfüggvénye tehát felírható az

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau} \quad (4.7)$$

integrállal. Ez az (1.14) összefüggésnek megfelelően is felírható, ugyanis:

$$s(t) = s(t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau = s(t).$$

A (4.7) integrál ismeretében kövessük végig a következőket. Tudjuk, hogy a $\delta(t)$ jelre adott válasz a $w(t)$ impulzusválasz, és a rendszer invarianciájának következtében a $\delta(t - \tau)$ gerjesztésre a válaszjel $w(t - \tau)$. A linearitás következménye, hogy az $s(\tau)\delta(t - \tau)$ gerjesztésre a rendszer $s(\tau)w(t - \tau)$ válasszal felel. A (4.7) integrál az $s(\tau)\delta(t - \tau)$ gerjesztés integrálja, ami végtelen sok eltolts és súlyozott Dirac-impulzus összegét jelenti, s ilyenre a rendszer az egyes tagokra adott részválaszok összegével felel. Ez szintén a

linearitás következménye, így tehát a rendszer válaszjele a következő:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(t - \tau)d\tau.} \quad (4.8)$$

Az elmondottakat a következő táblázatban foglaljuk össze:

$s(t)$	$\longrightarrow$	$y(t)$	megjegyzés
$\delta(t)$	$\longrightarrow$	$w(t)$	definíció
$\delta(t - \tau)$	$\longrightarrow$	$w(t - \tau)$	invariancia
$s(\tau)\delta(t - \tau)$	$\longrightarrow$	$s(\tau)w(t - \tau)$	linearitás
$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$	$\longrightarrow$	$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(t - \tau)d\tau$	linearitás

Ha a rendszer *kauzális*, akkor a $w(t)$ impulzusválasz belépőjel. Az integranduszban szereplő $w(t - \tau)$ függvény futó változója τ . Ez átírható a $w(-[\tau - t])$ alakra, ami annyit jelent, hogy a $w(\tau)$ függvényt tükrözni kell a függőleges tengelyre, majd azt el kell tolni t -vel pozitív irányba. Ha $w(t)$ belépő, akkor a $w(-[\tau - t])$ a $\tau > t$ időpillanatokban nulla értéket ad, s így az $s(\tau)w(t - \tau)$ integrandusz értéke is nulla. Elegendő tehát t -ig végezni az integrálást:

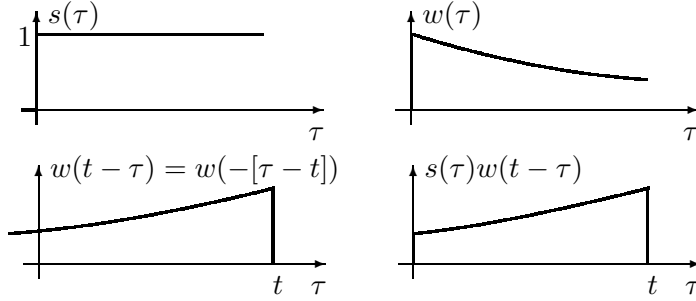
$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau)w(t - \tau)d\tau.} \quad (4.9)$$

Ha ezen túlmenően a *gerjesztés belépő*, akkor az integrandusz értéke a $t < 0$ időpillanatokban nulla, s így elegendő 0-tól végezni az integrálást:

$$\boxed{y(t) = \int_0^t s(\tau)w(t - \tau)d\tau.} \quad (4.10)$$

Ha a rendszer kauzális és a gerjesztés belépő, akkor a válaszjel is belépő. Az összefüggésekből érzékelhető az impulzusválasz másik elnevezése, a súlyfüggvény: $w(t - \tau)$ megadja $s(\tau)$ súlyát $y(t)$ kifejezésében.

Utóbbi integrál értelmezését segíti a 4.5. ábra. Az egyszerűség kedvéért $s(t) = \varepsilon(t)$. Képezzük ezután a $w(t - \tau) = w(-\tau + t) = w(-[\tau - t])$ függvényt. Végül határozzuk meg az $s(\tau)w(t - \tau)$ szorzatot, s láthatjuk az integrálási határok választásának okát szemléletesen is.



4.5. ábra. A konvolúció szemléltetése belépő gerjesztés és belépő impulzusválasz esetén

4.3. A súlyfüggvénytétel összefoglalása

A lineáris, invariáns és kauzális rendszerek tetszőleges belépő-gerjesztésre adott válasza meghatározható tehát a (4.4) vagy a (4.10) integrálok valamelyikével. Általános esetben azonban a (4.5) vagy a (4.8) integrálok valamelyikét kell alkalmaznunk. Ezen összefüggéseket *súlyfüggvénytétel*nek nevezzük, az improprius integrált pedig *konvolúciós* integrálnak. A $*$ szimbólum bevezetésével a következő egyszerű írásmódot alkalmazzuk:

$$\boxed{y(t) = s(t) * w(t),} \quad (4.11)$$

A konvolúció akkor értelmezhető, ha $s(t)$ és $w(t)$ legalább egyike korlátos, másika pedig abszolút integrálható.

A konvolúció a következő tulajdonságokkal bír:

- *Kommutatív*, azaz $s(t) * w(t) = w(t) * s(t)$, azaz

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(t - \tau) d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)s(t - \tau) d\tau.} \quad (4.12)$$

- *Asszociatív*, azaz $f(t) * [g(t) * h(t)] = [f(t) * g(t)] * h(t)$.
- *Disztributív*, azaz $[f(t) + g(t)] * h(t) = f(t) * h(t) + g(t) * h(t)$.

Ha az integrálási határok 0 és t , akkor *egyoldali konvolúcióról*, ha $-\infty$ és ∞ , akkor *kétoldali konvolúcióról* beszélünk.

A kommutatív tulajdonság belátható, ha bevezetjük a $\xi = t - \tau$ változót, ahonnan $\tau = t - \xi$ és $d\tau = -d\xi$, hiszen t konstansnak tekintendő. Így az integrálási határok a $-\infty$ és a ∞ értékekről a $\xi = t - \tau$ összefüggés miatt ∞ és $-\infty$ értékekre változnak:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(t - \tau) d\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} s(t - \xi)w(\xi) d\xi = \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \xi)w(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)s(t - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

A $(*)$ lépésben felhasználtuk, hogy $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$.

Az alsó integrálási határ akkor lehet 0, ha $s(t) * w(t)$ kifejezésében $s(t)$ belépő, a felső integrálási határ akkor lehet t , ha $w(t)$ belépő, azaz ha a rendszer kauzális. A kommutativitás miatt az alsó integrálási határ akkor lehet 0, ha $w(t) * s(t)$ kifejezésében $w(t)$ belépő, azaz ha a rendszer kauzális, a felső integrálási határ akkor lehet t , ha $s(t)$ belépő.³

³Egyszerű megjegyezni úgy, hogy a fenti integrálok integranduszában szereplő első tag (a τ argumentummal) az alsó integrálási határt, a második tag (a $(t - \tau)$ argumentummal) pedig a felső integrálási határt módosíthatja az általános $-\infty$ és ∞ értékekhez képest.

Kauzális rendszer esetén a konvolúció a következő alakot ölti:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t s(\tau)w(t-\tau) d\tau \equiv \int_0^{\infty} w(\tau)s(t-\tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Ha ezen felül a gerjesztés is *belépő*, akkor

$$y(t) = \int_0^t s(\tau)w(t-\tau) d\tau \equiv \int_0^t w(\tau)s(t-\tau) d\tau. \quad (4.14)$$

Ha a rendszer kauzális és a gerjesztés belépő, akkor a válaszjel is belépő.

Az ugrásválasz és az impulzusválasz kapcsolata a konvolúció definíciója alapján (a (4.12) 2. alakjából kiindulva) meghatározható:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)\varepsilon(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t w(\tau) d\tau, \quad (4.15)$$

amiből következik, hogy az impulzusválasz az ugrásválasz általánosított deriváltja:

$$w(t) = v'(t). \quad (4.16)$$

Egy apró megjegyzést kell tennünk az előzőekhez. Tudjuk, hogy belépőjel esetén az alsó integrálási határt nullának lehet választani. Ha azonban a gerjesztés Dirac-impulzust is tartalmaz, azt is figyelembe kell venni az integrálás során. Ezt úgy szokás jelölni, hogy az alsó integrálási határt -0 -nak írjuk. Ezt példa kapcsán mutatjuk be.

Az elmondottakat a következő példákkal illusztráljuk.

A példákban (és a későbbiekben is) az impulzusválaszt alkalmazzuk az ugrásválasz helyett a válasz meghatározása során, hiszen ha az ugrásválasz ismert, akkor az impulzusválasz meghatározható annak általánosított deriváltjaként (l. (4.16) összefüggés).

1. Példa. Legyen egy rendszer impulzusválasza és gerjesztése az alábbi. Határozzuk meg a válaszjelet konvolúcióval.

$$w(t) = \varepsilon(t)8e^{-2t}, \quad s(t) = \varepsilon(t).$$

Megoldás. Induljunk ki a konvolúció (4.8) általános definíciójából:

$$\begin{aligned} y(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)w(t-\tau)d\tau \stackrel{(1)}{=} \int_0^t 8e^{-2(t-\tau)}d\tau \stackrel{(2)}{=} \int_0^t 8e^{-2t}e^{2\tau}d\tau = \\ &\stackrel{(3)}{=} 8e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau}d\tau \stackrel{(4)}{=} 8e^{-2t} \left[\frac{e^{2\tau}}{2} \right]_0^t \stackrel{(5)}{=} 8e^{-2t} \left(\frac{e^{2t}-1}{2} \right) = \\ &\stackrel{(6)}{=} 4 - 4e^{-2t}. \end{aligned}$$

Az (1) lépésben helyettesítsük be a megadott időfüggvényeket és vegyük figyelembe, hogy a gerjesztés belépő, azaz az alsó integrálási határ 0 lehet. Az impulzusválasz is belépő (a rendszer kauzális), így a felső integrálási határ t lehet. Itt az $\varepsilon(t)$ egységugrásjelet elhagyjuk, mert értéke 1 az adott intervallumban. A (2) lépésben bontsuk fel az exponenciális kifejezésben szereplő zárójelet. Az integrálást a τ változó szerint kell elvégezni, hiszen ez a konvolúciós integrál változója. Ebből a szempontból t paraméter, és a $8e^{-2t}$ tényező konstansnak tekinthető és kivihető az integráljel elé. Ezt tesszük a (3) lépésben. A (4) lépésben meghatározzuk az integrandusz primitív függvényét, ami $\frac{e^{2\tau}}{2}$, majd az (5) lépésben behelyettesítjük az integrálási határokat. Végül a (6) lépésben beszorzunk.

Figyelembe kell venni még, hogy a válaszjel is belépő, hiszen a rendszer kauzális és a gerjesztés is belépő, a kapott eredményt tehát a következő:

$$y(t) = 4\varepsilon(t) (1 - e^{-2t}).$$

Ez a jel pontosan a rendszer ugrásválasza ($v(t) = y(t)$), hiszen a gerjesztés az egységugrásjel. A válaszjel deriváltja adja az impulzusválaszt (ellenőrzés). A deriválást az $(uv)' = u'v + uv'$ szabály

(szorzat deriváltja) alapján kell elvégezni, azaz

$$w(t) = v'(t) = 4\varepsilon'(t)(1 - e^{-2t}) + 4\varepsilon(t)(2e^{-2t}).$$

Az egységugrásjel általánosított deriváltja a Dirac-impulzus, amely a $t = 0$ időpillanaton kívül minden értékre nulla. Ezért helyettesítsünk be az $\varepsilon'(t) = \delta(t)$ jel mellett álló függvény argumentumába $t = 0$ -t, s így megkapjuk az impulzusválasz időfüggvényét:

$$w(t) = \varepsilon(t)8e^{-2t},$$

ami természetesen megegyezik a feladatban megadott impulzusválasszal.

A rendszer ugrásválaszát és impulzusválaszát a 4.6. ábrán felvázoltuk (54. oldal). Az ábrán jól látható, hogy az impulzusválasz az ugrásválasz idő szerinti első deriváltja.

2. Példa. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő rendszer válaszjelét, ha $s(t) = \varepsilon(t)e^{-3t}$.

Megoldás. A gerjesztés tartalmaz $\varepsilon(t)$ szorzót, azaz a gerjesztés belépő, az impulzusválasz szintén belépő, így a konvolúcióban szereplő integrálási határok módosulnak:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-3\tau} 8e^{-2(t-\tau)} d\tau \stackrel{(1)}{=} 8e^{-2t} \int_0^t e^{-3\tau} e^{2\tau} d\tau = \\ &\stackrel{(2)}{=} 8e^{-2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau \stackrel{(3)}{=} 8e^{-2t} \left[\frac{e^{-\tau}}{-1} \right]_0^t \stackrel{(4)}{=} 8e^{-2t} \left[\frac{e^{-t} - 1}{-1} \right] = \\ &\stackrel{(5)}{=} -8e^{-3t} + 8e^{-2t}. \end{aligned}$$

Az (1) lépésben bontsuk fel a zárójelet és vigyük ki az integrálás elé a 8 konstans értéket, valamint az e^{-2t} tényezőt, hiszen az a t paramétertől függ, értéke az integrálás szempontjából konstansnak tekinthető. A (2) lépésben egyszerűsítsük a következő kifejezést: $e^{-3\tau} e^{2\tau} = e^{(-3\tau+2\tau)} = e^{-\tau}$. A (3) lépésben meghatározzuk

az integrandusz primitív függvényét, majd a (4) lépésben behelyettesítjük az integrálási határokat és végül az (5) lépésben egyszerűsítjük a kifejezést. Figyelembe kell venni még a válaszjel belépő jellegét:

$$y(t) = -8\varepsilon(t) (e^{-3t} - e^{-2t}).$$

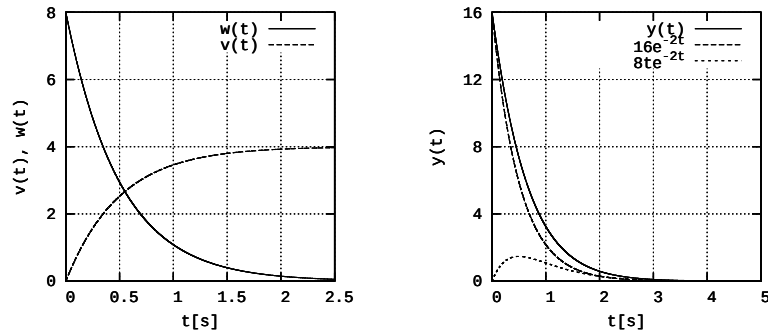
3. Példa. Ahhoz, hogy lássuk a -0 alsó integrálási határ jelentőségét, határozzuk meg ugyanezen rendszer kimeneti jelét, ha gerjesztése tartalmaz Dirac-impulzust is, például:

$$s(t) = 2\delta(t) + \varepsilon(t)e^{-2t}.$$

Megoldás. Induljunk ki a definícióból:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-0}^t [2\delta(\tau) + e^{-2\tau}] 8e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{-0}^t 16\delta(\tau)e^{-2(t-\tau)} d\tau + \int_0^t e^{-2\tau} 8e^{-2(t-\tau)} d\tau = \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{-0}^t 16\delta(\tau)e^{-2t}e^{2\tau} d\tau + \int_0^t 8e^{-2\tau}e^{-2t}e^{2\tau} d\tau = \\ &\stackrel{(3)}{=} 16e^{-2t} \int_{-0}^t \delta(\tau)e^{2\tau} d\tau + 8e^{-2t} \int_0^t d\tau \stackrel{(4)}{=} 16e^{-2t} + 8e^{-2t}t \end{aligned}$$

Az (1) lépésben bontsuk két részre az integrált. Ezt megtehetjük, hiszen az $s(\tau)$ kifejezés két tag összegéből áll, és az összeg integrálja az egyes tagok integráljának összege (a konvolúció disztributív). Az első tag tartalmaz Dirac-impulzust, ezért az alsó határt -0 -nak választjuk, a második tag alsó integrálási határa lehet 0, mert az nem tartalmaz Dirac-impulzust. Ezután a (2) lépésben bontsuk fel az exponenciális kifejezések kitevőjében szereplő zárójeleket. A második tagban az $e^{-2\tau}e^{2\tau}$ kifejezés 1. Vigyük ki az integráljel elé a t -től függő tagokat és a konstansokat. Ez a



4.6. ábra. Az 1. és a 3. példa megoldásának grafikus megadása

(3) lépés. Az első integrál integranduszában szerepel a $\delta(\tau)e^{2\tau}$ kifejezés. Mivel a $\delta(\tau)$ impulzus csak a $\tau = 0$ helyen ad nullától különböző értéket, ezért minden vele szorzott függvény értékét meg kell határozni a $\tau = 0$ helyen. Most ez a $\delta(\tau)e^0 = \delta(\tau)$ -t jelenti. A Dirac-impulzus definíciójából következik, hogy annak integrálja egységnyi, így az első integrál értéke 1 lesz.⁴ A második integrál primitív függvénye τ , s határozott integrálja $[\tau]_0^t = t - 0 = t$ lesz. A (4) lépés után a válaszjel tehát a következő:

$$y(t) = 8\varepsilon(t) (2e^{-2t} + te^{-2t}).$$

A válaszjelet a 4.6. ábrán felvázoltuk. Az ábrán az egyes részfüggvények lefutása is tanulmányozható.

Ezen példának két fontos konklúziója van: ha a gerjesztés is és az impulzusválasz is tartalmazza ugyanazon $e^{\alpha t}$ kifejezést, akkor a válaszjelben $te^{\alpha t}$ is megjelenik, ami az idővel súlyozott exponenciális függvény. A másikra már rávilágítottunk: tudjuk, hogy a $\delta(t)$ jelre adott válasz az impulzusválasz, így ellenőrizhető, hogy a válaszjel első tagja a $2\delta(t)$ gerjesztésre adott válasz, ami az impulzusválasz kétszerese, azaz $16\varepsilon(t)e^{-2t}$.

⁴Ugyanezen eredményre jutunk, ha felhasználjuk az (1.15) összefüggést.

4.4. A gerjesztés-válasz stabilitás

A folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor gerjesztés-válasz stabilis (l. 32. oldal), ha impulzusválasza abszolút integrálható, azaz ha

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)| dt < \infty.} \quad (4.17)$$

Ennek bizonyítása céljából vegyük a konvolúcióval számított válaszjel abszolút értékét és használjuk ki, hogy korlátos gerjesztés esetén $|s(t)| \leq M$:

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau)| |s(t - \tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |w(\tau)| d\tau.$$

Ebből következik, hogy $y(t)$ akkor korlátos, ha az utóbbi integrál véges.

Ha a rendszer kauzális, akkor impulzusválasza belépő, a feltétel tehát a következő alakra módosul:

$$\boxed{\int_0^{\infty} |w(t)| dt < \infty.} \quad (4.18)$$

Ennek egy *szükséges feltétele*, hogy

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0,} \quad (4.19)$$

amikor a rendszer *ugrásválasza* egy véges K konstans értékhez tart:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = K. \quad (4.20)$$

Az előző példákban szereplő impulzusválasz gerjesztés-válasz stabilis rendszert ír le. Ezen impulzusválaszról könnyű eldönteni, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$, hiszen az exponenciális kifejezést tartalmaz negatív kitevővel. A rendszer akkor is gerjesztés-válasz

stabilis, ha az impulzusválasz tartalmaz $t^n e^{\alpha t}$ ($\alpha < 0$) jellegű függvényeket, hiszen az $e^{\alpha t}$ szerinti exponenciális csökkenés gyorsabb, mint a t^n szerinti növekedés. A gerjesztés-válasz stabilitás eldöntésével a későbbiekben még foglalkozunk.

4.5. A rendszeregyenlet

4.5.1. A rendszeregyenlet definíciója

A folytonos idejű, lineáris, invariáns és kauzális SISO-rendszer *rendszeregyenlete* általánosan a következő alakban írható fel:

$$\boxed{y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y(t) = b_0 s^{(n)}(t) + b_1 s^{(n-1)}(t) + \dots + b_{n-1} s^{(1)}(t) + b_n s(t).}$$

(4.21)

A rendszer un. *rendszámát* n jelöli (bármelyik együttható lehet nulla). A rendszeregyenletben idő szerinti deriváltak szerepelnek: az $y(t)$ válaszjel n -edik deriváltját $y^{(n)}(t)$ jelöli. A rendszeregyenlet meghatározása során feltételezzük, hogy a válaszjel n -szer differenciálható, továbbá a gerjesztőjel a szükséges számban differenciálható. Látható az is, hogy a gerjesztést legfeljebb annyiszor kell deriválni, ahányszor a válaszjelet, s így pl. az a rendszer, amelyik deriválja bemeneti jelét ($y(t) = s'(t)$) nem írható le (4.21) alakban.

A (4.21) rendszeregyenlet egy un. *n -edrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet*.

A rendszer invarianciája az egyenletből kitűnik, hiszen az a_i és a b_i együtthatók *állandók*, nem függenek az időtől, a rendszer linearitása pedig abban mutatkozik meg, hogy a gerjesztés is és a válasz is elsőfokú (nincs pl. négyzet, vagy nem szerepel egy függvény argumentumában).

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy mit tartalmaz, mit jelent a rendszeregyenlet. Integráljuk hát a rendszeregyenletet idő

szerint, s a rövidség kedvéért hagyjuk el a (t) jelölést, azaz $y = y(t)$ és $s = s(t)$:

$$\begin{aligned} & y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y + a_n \int y \, d\tau = \\ & = b_0 s^{(n-1)} + b_1 s^{(n-2)} + \dots + b_{n-1} s + b_n \int s \, d\tau. \end{aligned}$$

Az integrálást $-\infty$ -tól t -ig kell elvégezni, de ha a gerjesztés belépő, akkor az integrálás alsó határa nulla lehet. Integráljuk mégegyszer:

$$\begin{aligned} & y^{(n-2)} + a_1 y^{(n-3)} + \dots + a_{n-1} \int y \, d\tau + a_n \iint y \, d\tau \, d\tau = \\ & = b_0 s^{(n-2)} + b_1 s^{(n-3)} + \dots + b_{n-1} \int s \, d\tau + b_n \iint s \, d\tau \, d\tau. \end{aligned}$$

Ismételjük ezt n -szer, hogy a legmagasabbfokú derivált is eltűnjön. Végeredményben egy olyan egyenlethez jutunk, amelyben szerepel $y(t)$ és $s(t)$, továbbá ezek idő szerinti integráljai. Az eredményt úgy lehet értelmezni, hogy kaptunk egy olyan egyenletet, amelyben az $y(t)$ válaszjel függ az $s(t)$ gerjesztéstől, továbbá a válaszjel és a gerjesztés idő szerinti integráljától, azaz a rendszer *előéletétől* (*múltjától*), hiszen az integrálást mindig t -ig kell elvégezni. Az integrál értéke pedig az időfüggvény integrálási határai közötti értékeitől függ, ami az időfüggvény múltja t -hez képest.

Másképp megfogalmazva: *a válaszjel értéke a t időpillanatban a gerjesztés és a válasz $t \in [-\infty, \dots, t]$, vagy a $t \in [0, \dots, t]$ intervallumbeli értékeitől függ.* Ez a rendszer *kauzalitását* jelenti.

A rendszeregyenlet tömörebben alakban is felírható:

$$\boxed{y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i s^{(n-i)}(t).} \quad (4.22)$$

A rendszeregyenlet megoldásával nem foglalkozunk, azt azonban megjegyezzük, hogy *a megoldás egy időfüggvény*, amely mindig felbontható a következő módon:

$$\boxed{y(t) = y_{\text{tr}}(t) + y_{\text{st}}(t)}, \quad (4.23)$$

ahol az $y_{\text{tr}}(t)$ *időfüggvényt* többféleképp is nevezik:

- 1.) *tranziens összetevő* (erre utal a tr index),
- 2.) *szabad válasz*,
- 3.) *a homogén differenciálegyenlet általános megoldása*.

Az $y_{\text{st}}(t)$ *összetevő* neve:

- 1.) *stacionárius összetevő* (erre utal az st index),
- 2.) *gerjesztett válasz*,
- 3.) *az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása*.

Az irodalomban mindhárom elnevezéssel találkozhatunk.

4.5.2. A gerjesztés-válasz stabilitás

Az $y_{\text{tr}}(t)$ időfüggvényt a következő alakban keressük:

$$\boxed{y_{\text{tr}}(t) = Me^{\lambda t}}. \quad (4.24)$$

Helyettesítsük vissza a tranziens összetevőt a (4.22) differenciálegyenletbe úgy, hogy közben a differenciálegyenlet jobb oldalát nullának vesszük (*homogén differenciálegyenlet*):

$$\left(Me^{\lambda t}\right)^{(n)} + \sum_{i=1}^n a_i \left(Me^{\lambda t}\right)^{(n-i)} = 0. \quad (4.25)$$

Az $y_{\text{tr}}(t) = Me^{\lambda t}$ függvény idő szerinti deriváltjaira van tehát szükségünk. A láncszabályt alkalmazva (nem feledkezve meg a λt belső függvény deriváltjáról, ami λ) ezek a következők:

$$y'_{\text{tr}}(t) = \lambda Me^{\lambda t}, \quad y''_{\text{tr}}(t) = \lambda^2 Me^{\lambda t}, \quad \dots \quad y^{(n)}_{\text{tr}}(t) = \lambda^n Me^{\lambda t}.$$

Helyettesítsük be ezen a deriváltakat a (4.25) homogén egyenletbe:

$$\left(M\lambda^n e^{\lambda t}\right) + \sum_{i=1}^n a_i \left(M\lambda^{n-i} e^{\lambda t}\right) = 0.$$

Fejtsük ki az összegzést kicsit részletesebben:

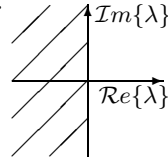
$$\left(M\lambda^n e^{\lambda t}\right) + a_1 \left(M\lambda^{n-1} e^{\lambda t}\right) + \dots + a_n \left(Me^{\lambda t}\right) = 0.$$

Az $Me^{\lambda t}$ minden tagban szerepel, így azzal egyszerűsíteni lehet. Így eljutottunk a rendszeregyszerűsített un. *karakterisztikus egyenletéhez*:

$$\boxed{\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.} \quad (4.26)$$

A karakterisztikus egyenlet tehát egy n -edfokú un. *karakterisztikus polinomot* tartalmaz (és n a rendszám), melynek megoldása n számú un. *sajátértéket* szolgáltat. Ha minden sajátérték valós része negatív, akkor a (4.24) által definiált n számú tag lineáris kombinációjából álló tranziens összetevő nullához tart és a rendszer válasza az $y_{st}(t)$ időfüggvényhez közelít. Ha a gerjesztés korlátos, akkor a stacionárius válasz is korlátos lesz.

Egy rendszeregyszerűsített adott rendszer akkor és csak akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha minden sajátértékének valós része negatív:



$$\boxed{\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, \dots, n,} \quad (4.27)$$

azaz, ha minden sajátértéke a komplex számsík bal oldalán helyezkedik el.

Egy kritérium annak eldöntésére, hogy a rendszeregyszerűsített adott rendszer gerjesztés-válasz stabilis, vagy sem, az, hogy a karakterisztikus polinom *Hurwitz-polinom*, vagy sem. Egy polinom

$n = 1$ és $n = 2$ esetén biztosan Hurwitz-polinom, ha minden együtthatója pozitív, azaz ha

$$a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.28)$$

de pl. $n = 3$ esetén az $a_1 a_2 - a_3 > 0$ feltételnek is teljesülni kell.⁵ Ebben az esetben nem kell meghatároznunk a sajátértékeket. A kritériumot akkor is alkalmazhatjuk, ha valamely paraméter stabilitásra gyakorolt hatását kívánjuk vizsgálni.

4.6. Az állapotváltozós leírás

4.6.1. Az állapotváltozós leírás definíciója

Egy folytonos idejű rendszer $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) állapotváltozói a változók olyan minimális halmaza, amelyek a következő két tulajdonsággal bírnak:

1. *A rendszert leíró állapotváltozós leírás ismeretében az állapotváltozók és a gerjesztés(ek) t_1 időpontbeli értékéből meghatározható az állapotváltozók értéke tetszőleges $t_2 > t_1$ időpontokban, és*
2. *ugyanezen adatokból meghatározható a rendszer válaszának (válaszainak) értéke a t_1 időpillanatban.*

A folytonos idejű rendszerek állapotváltozós leírása kifejezi az állapotváltozók idő szerinti első deriváltját és a válaszokat bármely t időpillanatban az állapotváltozóknak és a gerjesztéseknek ugyan ezen t időpontbeli értékeivel.

Ha a rendszer *lineáris*, akkor az állapotváltozós leírás egy lineáris differenciálegyenlet-rendszer, a válaszokat pedig lineáris

⁵Tetszőleges n esetére a Routh-kritérium és a Hurwitz-kritérium alkalmazható. Ezekkel azonban nem foglalkozunk.

egyenletek fejezik ki. Ha a rendszer *invariáns*, akkor az állapotváltozós leírásban szereplő együtthatók konstansok, nem változnak az időben, a *kauzalitás* pedig a definíció miatt teljesül. Kapunk tehát egy *elsőrendű, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlet-rendszert*:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^N A_{ij}x_j(t) + \sum_{j=1}^{N_s} B_{ij}s_j(t), \\ y_k(t) &= \sum_{j=1}^N C_{kj}x_j(t) + \sum_{j=1}^{N_s} D_{kj}s_j(t), \end{aligned} \quad (4.29)$$

ahol N jelöli az állapotváltozók számát ($i = 1, \dots, N$), N_s a gerjesztések (azaz a bemenetek) számát és $k = 1, \dots, N_y$ a válaszok (azaz a kimenetek) száma. Az idő szerinti első deriváltat az $x_i(t)$ fölé tett pont jelzi. Az első sor a differenciálegyenlet-rendszer (hívják *állapotegyenletnek* is), amely *elsőrendű*, mivel csak az idő szerinti első deriváltat tartalmazza, *állandó együtthatós*, mert A_{ij} , B_{ij} , C_{kj} és D_{kj} együtthatók állandók a rendszer invariáncája következtében és *lineáris*, mivel az állapotváltozók és a gerjesztések elsőfokú, azaz lineáris módon szerepelnek (nincs pl. egyik sem négyzetben). Felírhatjuk mindezt kompaktabb alakban:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{s}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{s}, \end{cases} \quad (4.30)$$

ahol $\mathbf{x}$ az *állapotvektor*, $\mathbf{s}$ és $\mathbf{y}$ a gerjesztéseket és válaszokat tartalmazó oszlopvektor, $\mathbf{A}$ a *rendszermátrix*, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ mátrixok pedig a (4.29) egyenletben szereplő megfelelő együtthatókat tartalmazzák. A rendszermátrix mindig $N \times N$ méretű, azaz *négyzetes*, más szóval *N -edrendű kvadratus* mátrix. A (4.29) és (4.30) alakokat az állapotváltozós leírás *normálalakjának* nevezzük.

SISO-rendszerek esetében egy bemenet és egy kimenet van, ekkor $\mathbf{s}$ egy skalárrá, $\mathbf{B}$ egy oszlopvektorra, $\mathbf{C}$ egy sorvektorra

(ezért jelöljük $\mathbf{c}^T$ -vel, oszlopvektor transzponáltjaként), $\mathbf{D}$ pedig skalárrá redukálódik:

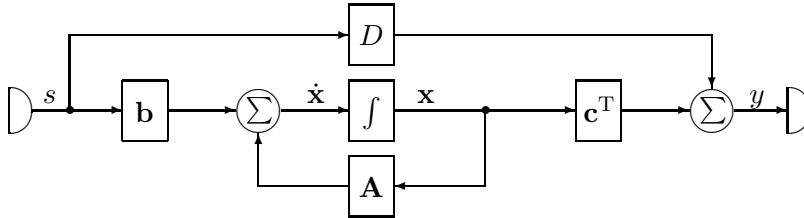
$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}s, \\ y &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + Ds,\end{aligned}} \quad (4.31)$$

részletesen kiírva:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} s, \quad (4.32)$$

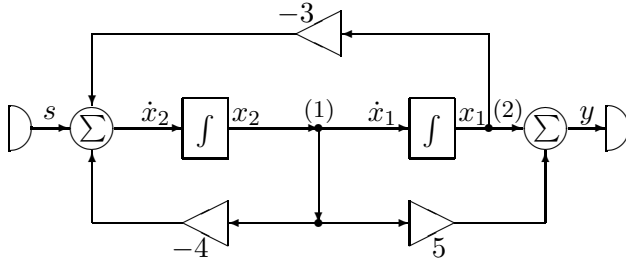
$$y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} + D s.$$

A SISO-rendszer *hatásvázlata* (amely grafikusan reprezentálja az állapotváltozós leírást) a következő:



4.6.2. Az állapotváltozós leírás előállítása a hálózati reprezentáció alapján

Egy rendszer állapotváltozós leírása meghatározható pl. a hálózati reprezentációja alapján. Az eljárás menetét a következő példán keresztül mutatjuk be:



Első lépésben jelöljük be az állapotváltozókat. Az állapotváltozókat a hálózat dinamikus elemeihez kell kapcsolni, azaz a két integrátorhoz. Az integrátorok bemenete az állapotváltozó deriváltja, $\dot{x}_i = \dot{x}_i(t)$, kimenete pedig az állapotváltozó időfüggvénye, $x_i = x_i(t)$. Az (1) jelű csomópont egy elágazócsomópont, amelynek kimeneti jele megegyezik a bemenetére érkező jellel. Itt tehát $\dot{x}_1 = x_2$. Ez az egyenlet kielégíti az állapotváltozós leírásban foglaltakat. Az x_2 jel halad az (1)-ből lefelé vezető ágon a két erősítő irányába is. A (2) jelű csomópont szintén elágazócsomópont, ahol a beérkező x_1 jel halad tovább jobbra az összegzőcsomópontba, valamint a visszacsatoló erősítő irányába. Ezek alapján már fel tudjuk írni a bal oldali összegzőcsomópont három bemeneti jelét. Ennek kimenete az $\dot{x}_2$, azaz $\dot{x}_2 = -3x_1 - 4x_2 + s$. Ez az egyenlet szintén az állapotegyenletnek megfelelő alakú. Szükség van még a válaszjel kifejezésére, ami a jobb oldali összegzőcsomópont kimeneti jele, azaz $y = x_1 + 5x_2$. A hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírása tehát a következő:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 4x_2 + s, \\ y &= x_1 + 5x_2.\end{aligned}$$

Abban az esetben, ha az állapotváltozós leírás nem fejezhető ki a kívánt alakban, akkor a hálózat *nem reguláris*. A nem reguláris hálózat nem tekinthető egy valós fizikai rendszer reprezentációjának. Előfordulhat olyan hálózat, amely felépítéséből adódóan nem reguláris, ekkor azt mondjuk, hogy a hálózat

struktúrálisan nem reguláris. Ha a hálózat csak a paraméterek bizonyos értékei mellett nem reguláris, akkor az a hálózat *parametrikusan nem reguláris*.

Megjegyezzük, hogy több hálózat is vezethet ugyanarra az állapotváltozós leírásra. Ezek a hálózatok ekvivalensek.

4.6.3. Az állapotváltozós leírás megoldása

A megoldás formulája

Az állapotváltozós leírás megoldása előtt egy a továbbiakban nagyon hasznos fogalmat szeretnénk bevezetni. Egy *kvadrátikus* mátrix skalár együtthatós polinomja a következőképp definiálható. Ha tekintjük a

$$p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_Nx^N$$

N -edfokú polinomot, akkor az x változó helyébe az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrixot helyettesítve, a

$$p(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{E} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + c_3\mathbf{A}^3 + \dots + c_N\mathbf{A}^N$$

mátrixpolinomot értelmezhetjük. Fontos megjegyezni, hogy definíció szerint $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$, ahol $\mathbf{E}$ az N -edrendű kvadratikus *egységmátrix*.

Tudjuk, hogy az $\dot{x}(t) = \lambda x(t)$ alakú homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása az $x(t) = Me^{\lambda t}$ függvény, az $e^{\lambda t}$ függvény *hatványsora* pedig a következő:

$$e^{\lambda t} = 1 + \frac{t}{1!}\lambda + \frac{t^2}{2!}\lambda^2 + \frac{t^3}{3!}\lambda^3 + \dots + \frac{t^N}{N!}\lambda^N + \dots$$

Az előzőekhez hasonlóan írjuk a λ változó helyébe az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrixot:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \frac{t}{1!}\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \dots + \frac{t^N}{N!}\mathbf{A}^N + \dots$$

Ezáltal eljutottunk egy nagyon fontos ún. *mátrixfüggvény*hez, az $\mathbf{A}$ kvadratikus mátrix exponenciális függvényéhez, amely maga is egy N -edrendű kvadratikus mátrix. Erre a mátrixfüggvényre a továbbiakban szükségünk lesz, és számításával is foglalkozni fogunk.

Mielőtt levezetnénk az állapotváltozós leírás megoldását adó összefüggést vizsgáljunk meg egy egyszerű példát.

Példa. Legyen a megoldandó *inhomogén differenciálegyenlet* adott inhomogén kiindulási feltétel és gerjesztés mellett a következő:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + s(t), \quad s(t) = 4, \text{ ha } t \geq 0, \quad x(-0) = 5.$$

Ennek megoldását kétféleképp végezzük el. Először az 1. fejezetben ismertetett módszert (l. 7. oldal) egészítjük ki, majd egy kicsit másképp.

1. megoldás. A megoldást összetevőkre bontással végezzük el, azaz keressük az

$$x(t) = x_{\text{tr}}(t) + x_{\text{st}}(t)$$

alakú megoldás két összetevőjét. Az $x_{\text{tr}}(t)$ tranziens összetevő általános alakját a *homogén differenciálegyenlet* (amikor is $s(t) = 0$) megoldásaként kapjuk, amit azonban már ismerünk: $x_{\text{tr}}(t) = Me^{-2t}$, ahol M értéke egyelőre érdektelen, s csak a megoldás *végén* határozzuk meg a kiindulási feltételnek megfelelően.

A stacionárius összetevőnek megfelelő ún. *próbafüggvény* egy $x_{\text{st}}(t) = A$ konstans, ha a gerjesztés konstans. Az *inhomogén differenciálegyenlet* megoldása tehát a következőképpen alakul:

$$\dot{x}_{\text{st}}(t) = -2x_{\text{st}}(t) + s(t) \quad \Rightarrow \quad 0 = -2A + 4,$$

ahonnan $A = 2$, s így a teljes válasz a következő:

$$x(t) = Me^{-2t} + 2.$$

Az M konstans a $t = 0$ feltételből határozható meg: $5 = M + 2$, azaz $M = 3$. Az $x(t)$ időfüggvénye tehát a következő lesz:

$$x(t) = 3e^{-2t} + 2, \quad \text{ha } t \geq 0.$$

Fontos megjegyezni, hogy az $x(t)$ állapotváltozó értéke folytonos, ha a gerjesztésben ugrás következik be, hiszen azok deriváltja szerepel az állapotváltozós leírásban. Az *állapotvektor kezdeti értéke megegyezik a kiindulási értékével*, azaz

$$\boxed{\mathbf{x}(+0) = \mathbf{x}(-0)}. \quad (4.33)$$

Belépő gerjesztés esetén minden kiindulási érték nulla, azaz a kezdeti értékek is mind nullák: $\mathbf{x}(+0) = \mathbf{0}$.

2. megoldás. Most kicsit másképp oldjuk meg a differenciálegyenletet, amely illusztrációként szolgál az állapotváltozós leírás megoldásának formulájához. A megoldást szintén az $x(t) = x_{\text{tr}}(t) + x_{\text{st}}(t)$ alakban keressük.

A tranziens összetevő $x_{\text{tr}}(t) = Me^{-2t}$ alakjában *most* vegyük figyelembe a kezdeti értéket, azaz $M = 5$, hiszen $x_{\text{tr}}(0) = Me^0 = 5$. Így a tranziens összetevő alakja a következő:

$$x_{\text{tr}}(t) = 5e^{-2t}, \quad \text{ha } t \geq 0.$$

Keressük ezután azt a már meghatározott és a kezdeti értéket is kielégítő homogén megoldáshoz tartozó partikuláris megoldást, amely *homogén kezdeti feltételt* elégít ki. Ehhez határozzuk meg az impulzusválaszt, majd alkalmazzuk a konvolúciót. A $w_x(t)$ impulzusválasz a következő differenciálegyenletből határozható meg:

$$\dot{w}_x(t) = -2w_x(t) + \delta(t).$$

Ebben az egyenletben szerepel a $\delta(t)$ gerjesztés. Mivel ez nem véges a $t = 0$ helyen, ezért integráljuk ezt az egyenletet idő szerint. Ekkor az ugrásválaszra vonatkozó differenciálegyenlethez jutunk:

$$\dot{v}_x(t) = -2v_x(t) + \varepsilon(t).$$

Ezt már meg tudjuk oldani összetevőkre bontással $v_x(t) = v_{x,tr}(t) + v_{x,st}(t)$ szerint, majd ennek végeredményét, azaz az ugrásválaszt deriválva megkapjuk az impulzusválaszt.

Az ugrásválasz tranziens összetevője az eddigiekhez hasonlóan $v_{x,tr}(t) = Ne^{-2t}$ lesz, ahol N értéke egyelőre ismeretlen.⁶ A stacionárius válasz egy A konstans próbafüggvénnyel írható le, mivel a gerjesztés a konstans értékű egységugrásjel, értéke pedig meghatározható a $0 = -2A + 1$ egyenletből: $A = \frac{1}{2}$. Az ugrásválasz így $v_x(t) = Ne^{-2t} + \frac{1}{2}$ alakú lesz, amelyben N értéke $-\frac{1}{2}$ -nek adódik, hiszen $v_x(+0) = v_x(-0) = 0$. Az ugrásválasz tehát a következő:

$$v_x(t) = 0,5\varepsilon(t)(1 - e^{-2t}).$$

Ennek általánosított deriváltja adja az impulzusválaszt:

$$w_x(t) = \varepsilon(t)e^{-2t}.$$

A konvolúció definíciója alapján meghatározhatjuk a gerjesztett összetevő alakját $t > 0$ -ra:

$$x_{st}(t) = \int_0^t w_x(t - \tau)s(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-2(t-\tau)}4 d\tau = 2 - 2e^{-2t}.$$

A tranziens összetevő és a stacionárius összetevő összege adja az $x(t)$ jel időfüggvényét:

$$x(t) = 5e^{-2t} + 2 - 2e^{-2t} = 3e^{-2t} + 2, \quad \text{ha } t \geq 0.$$

Miért lehet szükség a 2. megoldásra? A 2. megoldási módszer során nem kell külön foglalkoznunk a stacionárius válasz számítása során a próbafüggvénnyel. Következésképp ez egy általánosabb megoldási módszer és numerikus szimulációk során alkalmasabb lehet a válasz számítására.

⁶Azért használtunk itt N jelölést, mert ez a konstans nem egyezik meg az $x_{tr}(t)$ jelben szereplő konstanssal.

Az állapotváltozós leírás megoldását zárt alakban a 2. megoldáshoz hasonlóan tudjuk előállítani. A levezetést SISO-rendszerekre végezzük el, s a végeredményt általánosítjuk MIMO-rendszerekre is.⁷

Térjünk hát vissza a megoldandó differenciálegyenlet-rendszerhez:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}s(t).$$

A megoldást a jól ismert alakban keressük: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{tr}}(t) + \mathbf{x}_{\text{st}}(t)$, ahol $\mathbf{x}_{\text{tr}}(t)$ a tranziens összetevő, amely kielégíti a kezdeti feltételeket. Alakja tehát a következő:

$$\mathbf{x}_{\text{tr}}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0), \quad (4.34)$$

ahol az $\mathbf{x}(-0)$ a kiindulási értékek vektorát jelenti. Mivel $\mathbf{x}_{\text{tr}}(t)$ egy oszlopvektor, ezért az $\mathbf{x}(-0)$ vektorral jobbról kell szorozni a mátrixfüggvényt.

A következő lépés az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor impulzusválaszának meghatározása a konvolúció alkalmazása érdekében. Az impulzusválasz ki kell elégítse a differenciálegyenlet-rendszert, azaz

$$\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}\delta(t).$$

Ezen a differenciálegyenlet-rendszer megoldása az ugrásválasz segítségével határozható meg egyszerűen. Az ugrásválasz is ki kell elégítse a megoldandó differenciálegyenlet-rendszert, azaz

$$\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{v}_{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}\varepsilon(t).$$

Az ugrásválasz meghatározását az összetevőkre bontás módszerével végezzük el a jól ismert alakban: $\mathbf{v}_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}_{\mathbf{x},\text{tr}}(t) + \mathbf{v}_{\mathbf{x},\text{st}}(t)$. A tranziens összetevő meghatározása az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixfüggvény segítségével történik, ugyanakkor tartalmazza az ismeretlen konstansok

⁷Megjegyezzük, hogy az 1. megoldási módszer is alkalmazható az állapotváltozós leírás megoldására, de az általánosabb utat követjük.

$\mathbf{n}$ oszlopvektorát, mellyel jobbról szorzunk:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x},\text{tr}}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{n}.$$

A stacionárius összetevő egy konstansokat tartalmazó $\mathbf{k}$ vektorral jellemezhető, hiszen a gerjesztés a konstans értékű $\varepsilon(t)$ jel: $\mathbf{v}_{\mathbf{x},\text{st}}(t) = \mathbf{k}$. A partikuláris megoldás alakja tehát a következőképp írható fel:

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{k} + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Az ugrásválasz a tranziens összetevő és a stacionárius összetevő összege:

$$\mathbf{v}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{n} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Az ismeretlen konstansokat tartalmazó $\mathbf{n}$ vektor meghatározható a $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$ feltételből, azaz

$$\mathbf{0} = \mathbf{n} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{n} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

s így az ugrásválasz már felírható:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon(t) (e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}).$$

Az impulzusválasz ennek idő szerinti általánosított deriváltjaként adható meg:

$$\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}'_{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon(t) (e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = \varepsilon(t) e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}.$$

Az $e^{\mathbf{A}t}$ deriváltja $\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$, ami azonban egyenlő az $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A}$ kifejezéssel, és ezt használtuk ki.⁸

⁸Ez annyit tesz, hogy a mátrixfüggvény és a mátrix szorzata *kommutatív* művelet, azaz felcserélhető. Ez legegyszerűbben a már említett hatványsoros előállításból látszik, ugyanis az, hogy egy mátrixot önmagával szorzunk balról, vagy jobbról, az ugyanazt jelenti:

$$\mathbf{A} (c_0 \mathbf{E} + c_1 \mathbf{A} + \dots + c_N \mathbf{A}^N) = (c_0 \mathbf{E} + c_1 \mathbf{A} + \dots + c_N \mathbf{A}^N) \mathbf{A}.$$

Az impulzusválasz segítségével az állapotvektor stacionárius összetevője már megadható zárt alakban, azaz:

$$\mathbf{x}_{\text{st}}(t) = \int_{-0}^t \mathbf{w}_{\mathbf{x}}(t - \tau) s(\tau) d\tau = \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}s(\tau) d\tau.$$

Az állapotvektor időfüggvénye tehát a következőképp számítható:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0) + \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}s(\tau) d\tau.} \quad (4.35)$$

Az $y(t)$ válaszjel időfüggvénye megadható az állapotváltozós leírás erre vonatkozó összefüggése alapján úgy, hogy $\mathbf{x}(t)$ helyébe beírjuk a kapott eredményt:

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + Ds(t) = \\ &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0) + \mathbf{c}^T \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}s(\tau) d\tau + Ds(t). \end{aligned}} \quad (4.36)$$

Mindez *MIMO*-rendszerekre a következőképp néz ki:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0) + \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{s}(\tau) d\tau. \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(-0) + \mathbf{C} \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{s}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{s}(t). \end{aligned}} \quad (4.37)$$

Látható, hogy a válaszjel időfüggvényében nem szerepel az állapotvektor időfüggvénye, és a formula a $t \geq 0$ időintervallumban adja meg az állapotvektor és a válaszjel időfüggvényét.

Határozzuk meg ezután a SISO-rendszer impulzusválaszának kifejezését az állapotváltozós leírás ismeretében. Az impulzusválasz a Dirac-impulzusra adott válasz, ami egy belépőjel, azaz a $t = -0$ -ban az állapotvektor biztosan nullvektor, hiszen nincs gerjesztés, s következésképp válasz sincs, azaz $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$.

Vizsgáljuk meg először az állapotvektor Dirac-impulzusra adott válaszát. Helyettesítsük a (4.35) kifejezésbe az $s(t) = \delta(t)$ gerjesztést:

$$\mathbf{w}_x(t) = \int_{-0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} \delta(\tau) d\tau.$$

Tudjuk, hogy $\delta(t)$ a $t = 0$ időpillanaton kívül mindenhol nulla, de ki kell elégítse az $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ egyenletet. Az integrálást τ szerint végezzük, s így annak helyére kell nullát írni. Vigyük ki az integrálás szempontjából konstansnak tekinthető tagokat az integrál elé:

$$\mathbf{w}_x(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} \underbrace{\int_{-0}^t \delta(\tau) d\tau}_{\varepsilon(t)} = \varepsilon(t) e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}.$$

Helyettesítsük be a kapott eredményt az állapotváltozós leírás válaszelet megadó egyenletébe, s így kapjuk a rendszer impulzusválaszát:

$$\boxed{w(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{w}_x(t) + D\delta(t) = \varepsilon(t) \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + D\delta(t).} \quad (4.38)$$

A mátrixfüggvények előállítása

Az állapotváltozós leírás megoldásához szükség van tehát az $e^{\mathbf{A}t}$ *mátrixfüggvény* előállítására. Egy N -edrendű kvadratikus mátrix tetszőleges $f(\mathbf{A})$ mátrixfüggvénye is egy N -edrendű kvadratikus mátrix, ahol $f(\cdot)$ egy függvény, pl. e^x , $\sin(x)$ stb.

Mindenekelőtt át kell ismételniünk pár, lineáris algebrából ismert fogalmat: sajátérték, sajátvektor, determináns, adjungált, karakterisztikus mátrix, karakterisztikus polinom, karakterisztikus egyenlet, minimálpolinom.

Ha az

$$\mathbf{A}\mathbf{m} = \lambda\mathbf{m} \quad (4.39)$$

egyenletnek valamely λ érték mellett van $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$ megoldása, akkor a λ számértéket az $\mathbf{A}$ N -edrendű kvadratikus mátrix *sajátértékének*, az $\mathbf{m}$ vektort pedig a mátrix λ sajátértékhez tartozó *sajátvektorának* nevezzük.

A (4.39) definíciós összefüggésből következik, hogy

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (4.40)$$

Ennek a *homogén* lineáris egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van triviálistól eltérő megoldása, ha az együtthatókból képzett mátrix *determinánsa* nulla, azaz

$$D_N(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0. \quad (4.41)$$

Ezen determináns kifejtésével λ -ra egy N -edfokú polinomot kapunk, melynek gyökei az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei. A $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ mátrix neve *karakterisztikus mátrix*, és a karakterisztikus mátrix determinánsa a *karakterisztikus polinom*. Ha a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával, akkor kapjuk a *karakterisztikus egyenletet*.

Írjuk fel a (4.41) karakterisztikus egyenletet részletesen:

$$D_N(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1N} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} & \dots & -A_{2N} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ -A_{N1} & -A_{N2} & \dots & \lambda - A_{NN} \end{vmatrix} \\ = \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + d_2 \lambda^{N-2} + \dots + d_{N-1} \lambda + d_N = 0. \quad (4.42)$$

Ezen karakterisztikus polinomnak N gyöke (zérusa) van, melyek a sajátértékek. A sajátértékek vagy valósak, vagy vannak köztük olyanok, amelyek konjugált komplex párt alkotnak. A karakterisztikus polinom felírható *gyöktényezős alakban* is:

$$D_N(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_N) = \prod_{i=1}^N (\lambda - \lambda_i). \quad (4.43)$$

A mátrix *minimálpolinom*jára szükségünk lesz a továbbiakban. Ha $D_N(\lambda)$ jelöli a mátrix karakterisztikus polinomját és $\Theta(\lambda)$ a $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ mátrix *adjungáltjának*⁹ legnagyobb közös osztóját, akkor a

$$\Delta(\lambda) = \frac{D_N(\lambda)}{\Theta(\lambda)} \quad (4.44)$$

polinomot a mátrix *redukált karakterisztikus polinomjának*, vagy *minimálpolinomjának* nevezzük. A minimálpolinomnak M számú gyöke van, ami legfeljebb a karakterisztikus polinom gyökeinek N számával egyezik meg, $M \leq N$, attól függően, hogy az adjungált mátrix elemeinek legnagyobb közös osztójával tudunk egyszerűsíteni, vagy sem.

A mátrixfüggvény előállítására két lehetőségünk van, attól függően, hogy a mátrix *minimálpolinomjának* gyökei hány-szorosos multiplicitással rendelkeznek:

- Minden sajátérték egyszeres, azaz egy N -edrendű kvadrátikus mátrix minimálpolinomjának M számú gyökei között nincs két egyforma. Ebben az esetben a *Lagrange-mátrixokat* alkalmazzuk.
- A minimálpolinom legalább egy gyöke legalább kétszeres, azaz a minimálpolinom M számú gyöke között van legalább egy olyan, amelyik legalább kétszeres. Ebben az esetben az *Hermite-mátrixokat* alkalmazzuk.

A minimálpolinom gyökeinek meghatározása után eldönthető, hogy melyik módszert kell használni a mátrixfüggvény felírásához. A módszerek áttekintése előtt ismerkedjünk meg egy újabb stabilitással.

⁹Az adjungált mátrix fogalmával nem foglalkozunk részletesen, csak amennyire szükségünk van. A példák során felírjuk a példában szereplő mátrix adjungáltját, ott tehát visszatérünk a fogalomra.

Az aszimptotikus stabilitás

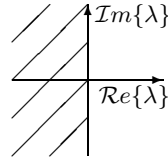
Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor aszimptotikusan stabil, ha a gerjesztetlen rendszer $\mathbf{x}(t)$ állapotvektora $t \rightarrow \infty$ esetén nullához tart tetszőleges $\mathbf{x}(+0)$ kezdeti érték esetén:

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.} \quad (4.45)$$

Ez gyakorlatilag az állapotvektor Dirac-impulzusra adott válaszána meghatározását és a $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{w}_x(t)$ határérték vizsgálatát jelenti, amely $e^{\mathbf{A}t} \rightarrow \mathbf{0}$ esetén cseng le. A következőkben látni fogjuk, hogy ez a mátrixfüggvény akkor tart a nullmátrixhoz, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértékének valós része negatív. Az állapotvektor tehát akkor tart nullához (a rendszer akkor aszimptotikusan stabil), ha a rendszermátrix minden sajátértéke a komplex számsík bal félsíkján helyezkedik el, azaz

$$\boxed{\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, \dots, N.} \quad (4.46)$$

A rendszermátrix karakterisztikus polinomjának meghatározása után, annak együtthatóinak segítségével is meg lehet állapítani, hogy a rendszer aszimptotikusan stabilis vagy sem. A feltételeket l. 59. oldalon.



Ha $\mathbf{w}_x(t)$ nullához tart, akkor (4.38) alapján a rendszer impulzusválasza is nullához tart. Azaz, ha a rendszer aszimptotikusan stabilis, akkor gerjesztés-válasz stabilis is. Ez fordítva nem biztos, hogy igaz, sőt bizonyos feltételek mellett az aszimptotikusan nem stabil rendszer lehet gerjesztés-válasz stabilis.¹⁰

¹⁰Minderre a 8. fejezetben még visszatérünk.

Mátrixfüggvény számítása Lagrange-mátrixokkal

Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomjának gyöktényezős alakja

$$D_N(\lambda) = \prod_{i=1}^M (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}, \quad \text{ahol} \quad \sum_{i=1}^M \alpha_i = N,$$

azaz $M \leq N$ számú sajátértéke van, melyek között lehet többszörös multiplicitású. Az egyes többszörös multiplicitású sajátértékek multiplicitását α_i jelöli, ami annyit jelent, hogy a λ_i sajátértékből α_i számú van. Legyen továbbá a mátrix minimálpolinomjának gyöktényezős alakja

$$\Delta(\lambda) = \frac{D_N(\lambda)}{\Theta(\lambda)} = \prod_{i=1}^M (\lambda - \lambda_i),$$

ahol $\Theta(\lambda)$ az $\text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ adjungáltmátrix elemeinek legnagyobb közös osztója. Az osztás következtében a minimálpolinom fokszáma csökkenhet a karakterisztikus polinom fokszámához képest, azonban az többszörös gyököket nem tartalmazhat (ellenkező esetben az Hermite-mátrixokat kell alkalmazni). Ha az előállítandó $f(\mathbf{A})$ mátrixfüggvény $f(\cdot)$ függvénye hatványsorral definiálható, akkor a mátrixfüggvény előállítható a Lagrange-mátrixok segítségével:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^M f(\lambda_i) \mathbf{L}_i(\mathbf{A}), \quad (4.47)$$

ahol $\mathbf{L}_i(\mathbf{A})$ jelöli a meghatározandó Lagrange-mátrixokat.

Az $\mathbf{A}$ N -edrendű kvadratikus mátrixnak M számú *Lagrange-mátrixa* van, melyeket a következő összefüggés alapján kell számítani:

$$\boxed{\mathbf{L}_i(\mathbf{A}) = \prod_{j=1, j \neq i}^M \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i = 1, 2, \dots, M.} \quad (4.48)$$

Minden egyes Lagrange-mátrix $(M - 1)$ -edfokú mátrixpolinom, hiszen a szorzatban mindig elhagyjuk azt a sajátértéket, amely nullává tenné a nevezőt.

A Lagrange-mátrixok számításának ellenőrzésére szolgálhat, hogy összegük N -edrendű egységmátrix, azaz

$$\boxed{\sum_{i=1}^M \mathbf{L}_i(\mathbf{A}) = \mathbf{E}.} \quad (4.49)$$

A Lagrange-mátrixok meghatározása után az $\mathbf{A}$ mátrix tetszőleges függvénye meghatározható a (4.47) összefüggés alapján. A számunkra szükséges exponenciális mátrixfüggvény a következőképp számítható:

$$\boxed{e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^M e^{\lambda_i t} \mathbf{L}_i(\mathbf{A}).} \quad (4.50)$$

A mátrixfüggvény meghatározása így egy M tagból álló összeg meghatározását jelenti, ahol az $f(\cdot)$ függvény argumentumába a mátrix helyett a mátrix sajátértékei kerülnek, ami pedig egy skalárfüggvény meghatározását jelenti, s a Lagrange-mátrixok ezen skalárfüggvényekkel súlyozott összege adja a mátrixfüggvényt.

A Lagrange-mátrixok előállításának gyakorlására számoljuk végig részletesen a következő példát.

Példa. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixfüggvényét.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Határozzuk meg a mátrix $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ karakterisztikus egyenletét¹¹ :

$$\begin{aligned} D_2(\lambda) &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \right| = \\ &= \lambda(\lambda + 4) + 3 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0. \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3. \end{aligned}$$

A sajátértékek tehát *egyszeresek*, mivel különböznek egymástól. Ebben az esetben a minimálpolinomot nem is kell meghatározni, mert ha meghatározzuk a $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ mátrix adjungáltját, akkor elemeinek legnagyobb közös osztója biztosan 1 lesz. Ezt meghatározzuk:

$$\text{adj} \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{bmatrix} \lambda + 4 & -3 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda + 4 & 1 \\ -3 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezen adjungált mátrix elemeinek legnagyobb közös osztója 1, azaz $\Theta(\lambda) = 1$, s így a minimálpolinom megegyezik a karakterisztikus polinommal, $\Delta(\lambda) = D_2(\lambda)$.¹² Így a Lagrange-mátrixokat alkalmazhatjuk a mátrixfüggvény meghatározására. Az $\mathbf{L}_1(\mathbf{A})$ Lagrange-mátrix a definícióból kiindulva követ-

¹¹Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ másodrendű mátrix determinánsa a következő: $|\mathbf{A}| = ad - bc$, azaz a főátlóban lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő elemek szorzatát.

¹²Az adjungált mátrix meghatározásának szabálya a következő: az adjungált mátrix ij indexű eleme a $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ mátrix i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyása után kapott mátrix determinánsa lesz. Ezt ezután transzponálni kell. Az adjungált meghatározása során nem szabad megfeledkezni a *sakktáblaszabályról*, ami a következőt jelenti az előjelekkel kapcsolatban:

$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \end{bmatrix}$, azaz pl. az 11 indexű elemet 1-gyel, az 12 indexű elemet -1 -gyel be kell szorozni. Ezt a pontot jelöli a $(*)$ a műveletben.

kezőképp határozható meg:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1(\mathbf{A}) &= \prod_{j=1, j \neq 1}^2 \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}}{\lambda_1 - \lambda_j} = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) = \\ &= \frac{1}{-1+3} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -1,5 & -0,5 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Az $\mathbf{L}_2(\mathbf{A})$ Lagrange-mátrix hasonlóképp számítható:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_2(\mathbf{A}) &= \prod_{j=1, j \neq 2}^2 \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}}{\lambda_2 - \lambda_j} = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) = \\ &= \frac{1}{-3+1} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 1,5 & 1,5 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ellenőrzésképp számítsuk ki a két Lagrange-mátrix összegét:

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{A}) + \mathbf{L}_2(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -1,5 & -0,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 1,5 & 1,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ami a másodrendű egységmátrix, ahogy annak lenni kell.

A Lagrange-mátrixok ismeretében az exponenciális mátrixfüggvény már felírható:

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t} &= \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i t} \mathbf{L}_i(\mathbf{A}) = \\ &= e^{-1t} \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -1,5 & -0,5 \end{bmatrix} + e^{-3t} \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ 1,5 & 1,5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1,5e^{-1t} - 0,5e^{-3t} & 0,5e^{-1t} - 0,5e^{-3t} \\ -1,5e^{-1t} + 1,5e^{-3t} & -0,5e^{-1t} + 1,5e^{-3t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ezen eredményre később még visszatérünk.

Mátrixfüggvény számítása Hermite-mátrixokkal

Mielőtt rátérnénk az Hermite-mátrixok bevezetésére, egy egyszerű példával illusztráljuk azt az esetet, amikor a mátrix minimálpolinomja többszörös gyököt is tartalmaz. Vizsgáljuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomját, adjungáltját és minimálpolinomját. A kérdés az, vajon alkalmazhatók-e a Lagrange-mátrixok ezen mátrix mátrixfüggvényének előállítására.

Az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja a következő:

$$D_2(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

Ha a karakterisztikus polinomot egyenlővé tesszük nullával, akkor kapjuk a karakterisztikus egyenletet, és a sajátértékeket: $(\lambda - 1)^2 = 0$. Egyetlen sajátérték van tehát, amely kétszeres: $\lambda_{1,2} = 1$. Mivel a sajátérték kétszeres (általánosan többszörös), ezért meg kell vizsgálnunk a minimálpolinomot is. Ehhez szükség van az $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ mátrix adjungáltjára:

$$\text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}.$$

Az adjungált mátrix elemeinek legnagyobb közös osztója $\Theta(\lambda) = 1$, s így a minimálpolinom megegyezik a karakterisztikus polinommal:

$$\Delta(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{\Theta(\lambda)} = (\lambda - 1)^2.$$

A minimálpolinom gyöke többszörös, tehát a Lagrange-mátrixokat nem alkalmazhatjuk a mátrixfüggvény meghatározására.

Legyen tehát az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomjának gyöktényezős alakja

$$D_N(\lambda) = \prod_{i=1}^M (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}, \quad \text{ahol} \quad \sum_{i=1}^M \alpha_i = N,$$

azaz $M < N$ számú sajátértéke van, melyek között van többszörös (α_i) multiplicitású. Legyen továbbá a mátrix minimálpolinomjának gyöktényezős alakja

$$\Delta(\lambda) = \frac{D_N(\lambda)}{\Theta(\lambda)} = \prod_{i=1}^M (\lambda - \lambda_i)^{\beta_i}, \quad \text{ahol} \quad \sum_{i=1}^M \beta_i = N' \leq N,$$

ahol $\Theta(\lambda)$ az $\text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ adjungáltmátrix elemeinek legnagyobb közös osztója. Az osztás következtében a minimálpolinom fokszáma csökkenhet a karakterisztikus polinom fokszámához képest, azonban az is tartalmazhat többszörös gyököket (jelen esetben tartalmaz is). Ha az előállítandó $f(\mathbf{A})$ mátrixfüggvény $f(\cdot)$ függvénye hatványsorral definiálható, akkor a mátrixfüggvény előállítható az Hermite-mátrixok segítségével:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{\beta_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A}), \quad (4.51)$$

ahol $\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A})$ jelöli az Hermite-mátrixokat. Az első összegzés $i = 1, 2, \dots, M$ a sajátértékek számának megfelelően alakul, a belső összegzést pedig a minimálpolinom i -edik gyökének multiplicitása határozza meg. Részletesen kiírva:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^M \left[f(\lambda_i) \mathbf{H}_{i0}(\mathbf{A}) + f'(\lambda_i) \mathbf{H}_{i1}(\mathbf{A}) + \dots + f^{(\beta_i-1)}(\lambda_i) \mathbf{H}_{i,\beta_i-1}(\mathbf{A}) \right], \quad (4.52)$$

tehát az $f(\cdot)$ függvény deriváltjaira is szükségünk lesz.

Az Hermite-mátrixok meghatározására általánosan nincs szükségünk, csak az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixfüggvényre koncentrálnunk, hiszen az szerepel az állapotváltozós leírás megoldásának végképletében:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{\beta_i-1} t^j e^{\lambda_i t} \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A}). \quad (4.53)$$

Itt arra kell ügyelnünk, hogy az $f(\lambda_i) = e^{\lambda_i t}$ deriválását a λ_i változó szerint kell elvégezni, és t független paraméter, azaz

$$f(\lambda_i) = e^{\lambda_i t}, \quad f'(\lambda_i) = t e^{\lambda_i t}, \quad f''(\lambda_i) = t^2 e^{\lambda_i t}, \quad \dots$$

Ezt jelzi a függvény argumentuma is: $f(\lambda_i)$, vagyis az $f(\cdot)$ függvény a λ_i sajátértéktől függ.

Az Hermite-féle mátrixpolinomok előállítása a következő összefüggésen alapszik¹³:

$$\frac{1}{p!} \mathbf{A}^p = \sum_{i=1}^M \left[\frac{\lambda_i^p}{p!} \mathbf{H}_{i0} + \frac{\lambda_i^{p-1}}{(p-1)!} \mathbf{H}_{i1} + \frac{\lambda_i^{p-2}}{(p-2)!} \mathbf{H}_{i2} + \dots + \frac{\lambda_i^{p-q_i}}{(p-q_i)!} \mathbf{H}_{iq_i} \right] \quad (4.54)$$

ahol $\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A})$, és

$$q_i = \begin{cases} \beta_i - 1, & \beta_i - 1 \leq p; \\ p, & \beta_i - 1 \geq p. \end{cases}$$

Mindez felírható kompaktabb alakban is:

$$\frac{1}{p!} \mathbf{A}^p = \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{q_i} \frac{\lambda_i^{p-j}}{(p-j)!} \mathbf{H}_{ij}. \quad (4.55)$$

Ez az összefüggés megadja az $\mathbf{A}$ mátrix és az összes $\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A})$ Hermite-féle mátrixpolinom közötti kapcsolatot.

¹³Ezen összefüggés levezetésével nem foglalkozunk, mert feleslegesen hosszadalmas lenne, fogadjuk tehát el, hogy így van. Levezetését és bizonyítását lásd Rózsa Pál: *Lineáris algebra és alkalmazásai* című könyvében.

Segítségével meghatározhatók az egyes mátrixpolinomok (itt $p = 0, 1, 2, \dots, N' - 1$). Ezt nem tárgyaljuk általánosan, mert nagyon messze vezetne, megértése példákon keresztül sokkal hatékonyabb és egyszerűbb.

Példa. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix $e^{\mathbf{A}t}$ mátrixfüggvényét:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,25 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Határozzuk meg a mátrix $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ karakterisztikus egyenletét:

$$\begin{aligned} D_2(\lambda) &= |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0,25 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1) + 0,25 = \\ &= \lambda^2 + \lambda + 0,25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -0,5. \end{aligned}$$

Ez a sajátérték kétszeres. Határozzuk meg a minimálpolinomot annak eldöntése céljából, vajon melyik mátrixpolinomot kell alkalmaznunk. Láttuk az előző példákban, hogy ha a karakterisztikus polinom gyökei többszörösek és a minimálpolinom gyökei mind egyszeresek, akkor a Lagrange-féle mátrixpolinomokat kell alkalmazni. Látni fogjuk, hogy itt nem ez lesz a helyzet. Határozzuk meg a $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$ karakterisztikus mátrix adjungáltját:

$$\text{adj}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -0,25 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -0,25 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ezen mátrix elemeinek legnagyobb közös osztója $\Theta(\lambda) = 1$, azaz a mátrix minimálpolinomja megegyezik a mátrix karakterisztikus polinomjával, következésképp a minimálpolinom egyetlen gyöke kétszeres:

$$\Delta(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{\Theta(\lambda)} = (\lambda + 0,5)^2.$$

Mivel a minimálpolinom gyöke többszörös, ezért nem alkalmazhatjuk a Lagrange-féle mátrixpolinomokat a mátrixfüggvény előállítására. Erre szolgálnak az Hermite-féle mátrixpolinomok.

Azonosítsuk a (4.54) összefüggésben szereplő jelöléseket. A karakterisztikus polinom gyökeinek, azaz a sajátértékek száma $N = 2$, azonban ez egy kétszeres gyök, így $\alpha_1 = 2$, azonban csak egy van belőle, ezért $M = 1$, a minimálpolinom gyökeinek száma $N' = 2$, de $\beta_1 = 2$. Írjuk fel a (4.54) összefüggést $p = 0, 1$ esetekre:

$$p = 0 :) \mathbf{E} = \sum_{i=1}^1 \mathbf{H}_{i0} = \mathbf{H}_{10}$$

$$p = 1 :) \mathbf{A} = \sum_{i=1}^1 \{\lambda_1 \mathbf{H}_{i0} + \mathbf{H}_{i1}\} = \lambda_1 \mathbf{H}_{10} + \mathbf{H}_{11}.$$

Innen leolvashatjuk, hogy

$$\mathbf{H}_{10} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_{11} = \mathbf{A} + 0,5 \mathbf{H}_{10} = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

Így nincs más dolgunk, mint felírni a mátrixfüggvényt:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^1 \sum_{j=0}^{2-1} t^j e^{\lambda_i t} \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A}) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{H}_{10} + t e^{\lambda_1 t} \mathbf{H}_{11} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-0,5t} + 0,5te^{-0,5t} & te^{-0,5t} \\ -0,25te^{-0,5t} & e^{-0,5t} - 0,5te^{-0,5t} \end{bmatrix}.$$

A példán keresztül világos, hogy $i = 1$, azaz egyetlen tagból áll a külső összeg, hiszen egyetlen, de kétszeres sajátérték van, a belső összegzés $j = 0, 1$, pont azért mert a sajátérték kétszeres.

Ha a minimálpolinom valamely gyökének multiplicitása nagyobb, mint 2, akkor fellépnek még $t^2 e^{\lambda t}$, $t^3 e^{\lambda t}$ stb. tényezők is.

Levonható tehát az a következtetés, hogy az állandó együtthatójú *homogén* lineáris differenciálegyenlet-rendszerek megoldását kizárólag exponenciális függvények alkotják, ha a minimálpolinom minden gyöke egyszeres, ellenkező esetben fellépnek az idő polinomjával súlyozott exponenciális függvények is.

Mátrixfüggvények alkalmazása a válasz számításában

Példa. Határozzuk meg az alábbi állapotváltozós leírásával adott SISO-rendszer ugrásválasztát és impulzusválasztát.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. A megoldást két módon mutatjuk be. Az első kicsit hosszadalmasabb, azonban megadja az állapotváltozók időfüggvényét is, a második egy rövidebb megoldás, de csak a kimeneti jel alakulását adja.

A rendszermátrix e^{At} mátrixfüggvényére szükségünk lesz a megoldás során. Célszerű először ezt meghatározni, majd a lentebb bemutatott módon felhasználni. Ezen mátrix mátrixfüggvénye ismert, korábban már meghatároztuk, s most felhasználjuk (l. 76. oldal).

(a) Első lépésben határozzuk meg az állapotváltozók időfüggvényét az állapotváltozós leírás állapotvektorra vonatkozó részéből. Látható, hogy az $y = y(t)$ kimeneti jel ezektől függ, hiszen $y(t) = x_1(t) + 5x_2(t)$. Az állapotvektor időfüggvényének meghatározására szolgál az

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(-0) + \int_{-0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{b}s(\tau) d\tau$$

összefüggés, ahol $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$, mivel a gerjesztés a belépő egységugrásjel, $s(\tau) = \varepsilon(\tau)$, továbbá az integrál alsó határa 0 lehet, mivel

a gerjesztés nem tartalmaz Dirac-impulzust. Így az

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} d\tau$$

összefüggéshez jutunk. Szükségünk lesz az $e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}$ szorzatra, amely egy 2×2 -es mátrix és egy 2×1 -es oszlopvektor szorzata. Az eredmény egy 2×1 -es oszlopvektor lesz. Foglalkozzunk először az $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$ szorzattal, majd a végeredményben írjuk át minden t -t $(t - \tau)$ -ra. A szorzat tehát a következő:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1,5e^{-1t} - 0,5e^{-3t} & 0,5e^{-1t} - 0,5e^{-3t} \\ -1,5e^{-1t} + 1,5e^{-3t} & -0,5e^{-1t} + 1,5e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,5e^{-1t} - 0,5e^{-3t} \\ -0,5e^{-1t} + 1,5e^{-3t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

azaz

$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0,5e^{-(t-\tau)} - 0,5e^{-3(t-\tau)} \\ -0,5e^{-(t-\tau)} + 1,5e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}.$$

Ennek első sora az $x_1(t)$, második sora pedig az $x_2(t)$ időfüggvény számításához szükséges, tehát:

$$x_1(t) = \int_0^t \left[0,5e^{-(t-\tau)} - 0,5e^{-3(t-\tau)} \right] d\tau.$$

Ennek megoldása hasonló a konvolúciónál bemutatott integrálok számításához: a zárójelek felbontása után vigyük ki az integrálás szempontjából konstansnak tekinthető paramétereket, majd határozzuk meg a primitív függvényeket és a határozott integrálokat:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0,5e^{-t} \int_0^t e^{\tau} d\tau - 0,5e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau = \\ &= 0,5e^{-t} [e^{\tau}]_0^t - 0,5e^{-3t} \left[\frac{e^{3\tau}}{3} \right]_0^t = 0,5e^{-t} (e^t - 1) - \\ &- \frac{1}{6}e^{-3t} (e^{3t} - 1) = 0,5 - 0,5e^{-t} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}e^{-3t}. \end{aligned}$$

Az $x_1(t)$ időfüggvénye tehát a következő:

$$x_1(t) = \varepsilon(t) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \right).$$

Az $x_2(t)$ időfüggvénye hasonlóképp számítható:

$$x_2(t) = \varepsilon(t) \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right).$$

Ezen eredmények felhasználásával az $y(t)$ válaszjel időfüggvénye is meghatározható behelyettesítéssel. Mivel a gerjesztés az $\varepsilon(t)$ egységugrás, ezért a válaszjel a $v(t)$ ugrásválasz, azaz

$$\begin{aligned} v(t) = y(t) &= x_1(t) + 5x_2(t) = \varepsilon(t) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \right) + \\ &+ 5\varepsilon(t) \left(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \right) = \varepsilon(t) \left(\frac{1}{3} + 2e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-3t} \right). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az impulzusválaszt az ugrásválasz általánosított deriváltjaként:

$$\begin{aligned} w(t) = v'(t) &= \delta(t) \left(\frac{1}{3} + 2 - \frac{7}{3} \right) + \varepsilon(t) (-2e^{-t} + 7e^{-3t}) = \\ &= \varepsilon(t) (-2e^{-t} + 7e^{-3t}). \end{aligned}$$

(b) Határozzuk meg az $y(t)$ válaszjelet közvetlenül az

$$y(t) = \mathbf{c}^T \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} s(\tau) d\tau + D s(t)$$

összefüggés alapján. Szükségünk van tehát a

$$\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}$$

szorzatra, melyből az $e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b}$ szorzatot már meghatároztuk, így csak az

$$\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5e^{-(t-\tau)} - 0,5e^{-3(t-\tau)} \\ -0,5e^{-(t-\tau)} + 1,5e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

szorzatot kell meghatároznunk. Ez egy 1×2 sorvektor és egy 2×1 oszlopvektor szorzata, amely egy skalár kifejezést ad, azaz

$$\begin{bmatrix} 0, 5e^{-(t-\tau)} - 0, 5e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -0, 5e^{-(t-\tau)} + 1, 5e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix},$$

azaz: $\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{b} = -2e^{-(t-\tau)} + 7e^{-3(t-\tau)}$, amit integrálni kell ($D = 0$):

$$y(t) = \int_0^t \left[-2e^{-(t-\tau)} + 7e^{-3(t-\tau)} \right] d\tau.$$

Az ugrásválasz így a következő:

$$v(t) = \varepsilon(t) \left(\frac{1}{3} + 2e^{-t} - \frac{7}{3}e^{-3t} \right).$$

Az impulzusválasz meghatározható a

$$w(t) = \varepsilon(t) \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b} + D\delta(t)$$

kifejezés alapján. Mivel $D = 0$, ezért az impulzusválaszban a $\delta(t)$ gerjesztés nem jelenik meg, a $\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{b}$ kifejezést pedig már fentebb meghatároztuk, így

$$w(t) = \varepsilon(t) \left(-2e^{-t} + 7e^{-3t} \right).$$

A (a) és (b) pontban meghatározott eredmények egyenlőek, ahogy azt várni lehetett.

A példákból érzékelhető, hogy a mátrixfüggvények alkalmazása meglehetősen hosszadalmas számítást jelent papíron, kézzel elvégezve a műveleteket. Nagy előnye a (nem tárgyalt) rendszeregyenlet megoldásához képest, hogy a kezdeti feltételek sokkal egyszerűbben meghatározhatók és számítógépes programokban sokkal egyszerűbb a kód elkészítése.

4.7. Az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet kapcsolata

A rendszeregyenlet és az állapotváltozós leírás egy rendszer két különböző matematikai megfogalmazása. Mivel ugyanazon rendszert írják le, közöttük kapcsolat kell legyen.

4.7.1. Az állapotváltozós leírás meghatározása a rendszeregyenlet ismeretében

Példa. Határozzuk meg az alábbi, rendszeregyenletével adott rendszer állapotváltozós leírását.

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 3s.$$

Megoldás. A cél tehát állapotváltozók bevezetése, és a rendszeregyenlet átalakítása állapotváltozós leírássá. Arra kell ügyelnünk, hogy az állapotváltozós leírás jobb oldalán csak az állapotváltozók és a gerjesztés időfüggvénye, bal oldalán pedig csak az állapotváltozók idő szerinti első deriváltja szerepeljen, továbbá a válaszjel időfüggvénye. A megoldás menete a következő. Először azt kell meghatároznunk, hogy hány állapotváltozó szükséges a rendszer leírására. Ez a rendszeregyenletből mindig megállapítható: $N = n$, jelen esetben $N = 2$. Első lépésben rendezzük át a rendszeregyenletet úgy, hogy annak bal oldalán a válaszjel n -edik deriváltja szerepeljen:

$$\ddot{y} = -4\dot{y} - 3y + 3s.$$

Integráljuk ezt az egyenletet $N = 2$ -szer $-\infty$ -tól t -ig. Így a bal oldali kétszeres derivált eltűnik és az időfüggvény kifejezését kapjuk:

$$y = -4 \int y \, dt - 3 \iint y \, d\tau \, d\tau + 3 \iint s \, d\tau \, d\tau.$$

Ezt az egyenletet kell átalakítanunk állapotváltozós leírássá. Ebben az állapotváltozós leírás utolsó egyenletére ismerhetünk, amelyben a válaszjelet határozzuk meg. Abban azonban nem szerepelhet integrál, csak az állapotváltozó és a gerjesztés időfüggvénye, minden mást másképp kell jelölnünk. Erre szolgálnak az állapotváltozók, jelöljük hát a teljes jobb oldalt az x_2 állapotváltozóval, azaz

$$x_2 = -4 \int y \, d\tau - 3 \iint y \, d\tau \, d\tau + 3 \iint s \, d\tau \, d\tau,$$

és így kapjuk a válaszjel állapotváltozós leírását is: $y = x_2$, mellyel többet nem kell foglalkoznunk. A jelölést mindig N -től kell kezdeni, visszafelé haladva. Ezután deriváljuk idő szerint az x_2 állapotváltozót:

$$\dot{x}_2 = -4y - 3 \int y \, d\tau + 3 \int s \, d\tau.$$

Ezt azért kell megtennünk, mert definíció szerint az állapotváltozós leírás normálalakjának bal oldalán az állapotváltozók idő szerinti első deriváltja szerepel. Jobb oldalán azonban csak az állapotváltozó és a gerjesztés időfüggvénye szerepelhet. Az y -t már kifejeztük az x_2 állapotváltozóval, az integrált tartalmazó két tagot pedig jelöljük az x_1 állapotváltozóval:

$$\dot{x}_2 = -4x_2 - 3 \int y \, d\tau + 3 \int s \, d\tau = -4x_2 + x_1,$$

azaz

$$x_1 = -3 \int y \, d\tau + 3 \int s \, d\tau.$$

Deriváljuk ezt a kifejezést is idő szerint, mivel az állapotváltozó deriváltja kell, hogy szerepeljen a bal oldalon, azaz

$$\dot{x}_1 = -3y + 3s = -3x_2 + 3s.$$

Ez az alak már megfelel az állapotváltozós leírás normálalakjának. Összegezve kapjuk, hogy

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} s(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Az átalakítás megoldható egyetlen lépésben is, azonban ehhez meg kell jegyeznünk a következő formulát:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ b_{N-2} - b_0 a_{N-2} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} s(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + b_0 s(t). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ez az alak az ún. *második Frobenius-alak*, vagy *megfigyelő alak*.¹⁴

4.7.2. A rendszeregyenlet meghatározása az állapotváltozós leírás ismeretében

Példa. Határozzuk meg a következő állapotváltozós leírásával adott rendszer rendszeregyenletét.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} s, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. A cél az állapotváltozók kiejtése az állapotváltozós leírásból. A megoldás menete a következő. A válaszjel egyenletét N -szer deriváluk idő szerint. Ezáltal kapunk egy $N+1$ egyenletből álló egyenletrendszert, amely tartalmazza az állapotváltozók időfüggvényét, továbbá a gerjesztés és a válasz időfüggvényét, első,

¹⁴Az *első Frobenius-alak*, vagy *szabályozó alak* a következőt jelenti a második alak ismeretében (vagy megfordítva): $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2^T$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_2^T$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{B}_2^T$ és $D_1 = D_2$ (az indexek az első és a második alakra utalnak).

második, ..., N -edik deriváltjait. Az egyenletrendszer megoldása során ismeretlennek tekintjük az N számú állapotváltozót és a válasz N -edik deriváltját. Ez pontosan $N + 1$ számú ismeretlen. A cél $y^{(N)} = y^{(n)}$ kifejezése egyetlen egyenlettel (a rendszeregyenlettel) úgy, hogy az egyenlet ne tartalmazzon állapotváltozót.

Mindig a válaszzel egyenletéből indulunk ki. Deriváljuk ezt idő szerint egyszer: $\dot{y} = \dot{x}_2$, és helyettesítsük be $\dot{x}_2$ kifejezését:

$$\dot{y} = x_1 - 5x_2 + 3s.$$

Deriváljuk az így kapott egyenletet idő szerint:

$$\ddot{y} = \dot{x}_1 - 5\dot{x}_2 + 3\dot{s},$$

majd helyettesítsük be $\dot{x}_1$ és $\dot{x}_2$ kifejezését az állapotváltozós leírásból és vonjunk össze:

$$\ddot{y} = -2x_2 + s - 5x_1 + 25x_2 - 15s + 3\dot{s} = -5x_1 + 23x_2 - 14s + 3\dot{s}.$$

Kaptunk tehát egy $N + 1 = 3$ egyenletből álló egyenletrendszert, amelyben ismeretlen az x_1 , az x_2 (azért kellett visszahelyettesíteni az állapotvektort, hogy az állapotváltozók időfüggvénye szerepeljen) és az $\ddot{y}$. Minden mást ismertnek tekintünk. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert. Használjuk fel az $x_2 = y$ kifejezést és helyettesítsük azt vissza az $\dot{y}$ és az $\ddot{y}$ egyenletekbe:

$$\dot{y} = x_1 - 5y + 3s, \quad \ddot{y} = -5x_1 + 23y - 14s + 3\dot{s}.$$

Ezen egyenletek már csak az x_1 és az $\ddot{y}$ ismeretleneket tartalmazza. Szorozzuk be az első egyenletet 5-tel, majd adjuk össze a két egyenletet. Rendezve a kapott eredményt a következő rendszeregyenlethez jutunk:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 2y = 3\dot{s} + s.$$

5. fejezet

DI rendszerek analízise az időtartományban

5.1. Az ugrásválasz és alkalmazása

Diszkrét idejű rendszerek esetében is természetesen igaz, hogy ha ismerjük egy lineáris rendszer *adott gerjesztéshez (vizsgálójel) tartozó válaszát*, akkor ezen *gerjesztés-válasz kapcsolat* ismeretében meg tudjuk határozni a rendszer tetszőleges gerjesztéshez tartozó válaszát is, hiszen ez a gerjesztés-válasz kapcsolat jellemzi a lineáris rendszert (l. $\mathcal{W}\{\cdot\}$ operátor a (2.1) definícióban). Ilyen vizsgálójel az *egységugrásjel* és a *Dirac-impulzus*.

Ha a gerjesztés időfüggvényét elemi függvényekre bontjuk, akkor az egyes részfüggvényekre, mint gerjesztésekre a részválaszokat egyenként meg lehet határozni. Végül a (2.3) összefüggésnek megfelelően a részválaszok összegzése adja a teljes válaszjelet, hiszen a rendszer lineáris.

Az egyik legegyszerűbb diszkrét idejű jel az $\varepsilon[k]$ egységugrásjel. Ha a rendszer bemenetére ezt a jelet adjuk, akkor a rendszer válasza az un. *ugrásválasz*, vagy másnéven *átmeneti függvény* lesz, melyet $v[k]$ -val szokás jelölni.

Az ugrásválasz tehát az egységugrás jelre adott válasz:

$$\boxed{y[k] = v[k], \quad \text{ha} \quad s[k] = \varepsilon[k], \quad \text{azaz} \quad v[k] = \mathcal{W}\{\varepsilon[k]\}.} \quad (5.1)$$

Hasonlóan, mint a folytonos idejű rendszereknél, ha a rendszer *kauzális*, akkor az ugrásválasz *belépőjel*. Ha a rendszer időben *invariáns*, akkor az eltoló $\varepsilon[k - i]$ jelre a rendszer $v[k - i]$ válasszal felel.

A rendszer *invarianciájának* és *linearitásának* illusztrálását szolgálja a következő három egyszerű példa.

1.) Legyen egy lineáris, invariáns és kauzális rendszer ugrásválasza, azaz az $s[k] = \varepsilon[k]$ gerjesztésre adott válasza pl.

$$v[k] = 2\varepsilon[k]0,5^k.$$

Legyen először *ugyanezen* rendszer gerjesztése $s[k] = \varepsilon[k - 5]$, azaz az ugrás a $k = 5$ ütemben jelenik meg, vagyis késik. Ekkor a rendszer kimenetén az *invariancia* következtében az

$$y[k] = v[k - 5] = 2\varepsilon[k - 5]0,5^{k-5}$$

jel jelenik meg, amely szintén 5 ütemmel késik. Vegyük észre, hogy minden k helyébe $(k - 5)$ -öt írtunk a rendszer invarianciája következtében.

2.) Az ugrásválasz ismeretében meghatározhatjuk pl. azt is, hogy milyen feleletet ad a rendszer az $s[k] = 1,5\varepsilon[k]$ gerjesztésre. A gerjesztés ebben az esetben az egységugrásjel 1,5-szerese, s mivel a rendszer az $\varepsilon[k]$ jelre $v[k]$ jellel válaszol, a gerjesztésben szereplő konstansszorzó megjelenik a válaszban is, tehát a kimeneten az $1,5v[k]$ jel lesz, mivel a rendszer *lineáris*. A példánál maradva a rendszer válaszjele a következő lesz:

$$y[k] = 1,5v[k] = 3\varepsilon[k]0,5^k.$$

3.) Legyen a rendszer gerjesztése a következő ablakozott jel:

$$s[k] = 2\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - 3]\},$$

s határozzuk meg a rendszer válaszát. A gerjesztést most két $\varepsilon[k]$ típusú jel különbségeként írtuk fel. A rendszer válaszána meghatározásához fel kell használni a fenti két eredményt, s így a válaszjel $y[k] = 2\{v[k] - v[k - 3]\}$ lesz, azaz

$$y[k] = 4 \left\{ \varepsilon[k]0,5^k - \varepsilon[k - 3]0,5^{k-3} \right\}.$$

Az ugrásválasz egy ún. *rendszerjellemező függvény*, mivel az jellemzi a rendszer működését, azonban nem játszik annyira fontos szerepet általános gerjesztésekre adott válasz számításában mint a folytonos idejű rendszerek analízise esetén, ezért ezzel a lehetőséggel nem foglalkozunk. Az 5.3. részben térünk ki az impulzusválasz és az ugrásválasz kapcsolatára.

5.2. Az impulzusválasz és alkalmazása

5.2.1. Az impulzusválasz definíciója

A $\delta[k]$ egységimpulzus egy fontos *vizsgálójel*. Ha a rendszer bemenetére ezt a jelet adjuk, akkor a rendszer válasza az ún. *impulzusválasz*, vagy másnéven *súlyfüggvény* lesz, melyet $w[k]$ -val szokás jelölni.¹

Az impulzusválasz tehát az egységimpulzus jelre adott válasz:

$$\boxed{y[k] = w[k], \quad \text{ha} \quad s[k] = \delta[k], \quad \text{azaz} \quad w[k] = \mathcal{W}\{\delta[k]\}. \quad (5.2)}$$

Ha a rendszer *kauzális*, akkor az impulzusválasz *belépőjel*. Ha a rendszer időben *invariáns*, akkor az eltoló $\delta[k - i]$ jelre a rendszer $w[k - i]$ válasszal felel.

A rendszer *invarianciájának* és *linearitásának* illusztrálását szolgálják a következő egyszerű példák.

¹Egyes irodalmakban a $h[k]$ jelöléssel is találkozhatunk.

1.) Legyen egy lineáris, invariáns és kauzális rendszer impulzusválasza, azaz az $s[k] = \delta[k]$ gerjesztésre adott válasza pl.

$$w[k] = \delta[k] - 2\varepsilon[k]0,1^k,$$

s ezután legyen *ugyanezen* rendszer gerjesztése $s[k] = \delta[k - 5]$, ami a $\delta[k]$ jelhez képest jobbra tolódik a $k = 5$ ütembe. Ekkor a rendszer kimenetén az impulzusválasz is eltolódik 5 ütemmel (*invariancia*):

$$y[k] = w[k - 5] = \delta[k - 5] - 2\varepsilon[k - 5]0,1^{k-5}.$$

2.) Az impulzusválasz ismeretében meghatározhatjuk pl. az $s[k] = 1,5\delta[k]$ gerjesztésre adott választ. A gerjesztés ebben az esetben az egységimpulzus 1,5-szerese, s a rendszer *linearitásának* köszönhetően a válasz az $1,5w[k]$ jel lesz:

$$y[k] = 1,5\delta[k] - 3\varepsilon[k]0,1^k.$$

3.) Legyen a rendszer gerjesztése most

$$s[k] = 2\delta[k] + \delta[k - 3],$$

s határozzuk meg a rendszer válaszát. Az $s[k]$ jel most két egységimpulzusból áll. A rendszer válaszának meghatározásához fel kell használni a fenti két eredményt, s így a válaszjel $y[k] = 2w[k] + w[k - 3]$, behelyettesítés után pedig

$$y[k] = 2\delta[k] - 4\varepsilon[k]0,1^k + \delta[k - 3] - 2\varepsilon[k - 3]0,1^{k-3}.$$

Ezen példákban a gerjesztés csak a $\delta[k]$ jelet, annak konstansszorosát és időbeli eltoltját tartalmazta, s a válasz meghatározása nagyon egyszerű volt. Az impulzusválasz is *rendszerjellemező függvény*, segítségével meghatározható a rendszer tetszőleges gerjesztésre adott válasza, ezzel foglalkozunk a következő részben.

Attól függően, hogy egy diszkrét idejű rendszer impulzusválasza időben véges, vagy sem, két csoportra bonthatjuk a diszkrét idejű rendszereket:

1. *FIR típusú rendszerek.* A FIR az angol „finite impulse response” szóból ered, s annyit jelent, véges impulzusválasz. Egy kauzális rendszer akkor FIR típusú, ha impulzusválasza azonosan nulla a K -adik ütem után, s ekkor az impulzusválasz hossza $K + 1$ ($k = 0, \dots, K$). A FIR típusú rendszer impulzusválasza általánosan tehát a következő ablakkal írható fel, ami egy *véges tartójú jel*:

$$w[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - (K + 1)]\} f[k], \quad (5.3)$$

ahol $f[k]$ valamilyen függvény.

2. *IIR típusú rendszerek.* Az IIR az angol „infinite impulse response” szóból ered, s annyit jelent, végtelen impulzusválasz.

A FIR típusú rendszer egy olyan hálózattal realizálható, amely csak *előreccsatolást* tartalmaz, az IIR típusú rendszerhez rendelhető hálózat azonban tartalmaz *visszacsatolást* is, így az egy *rekurzív hálózat*.

5.2.2. A válaszjel számítása

Már megbeszéltük, hogy tetszőleges diszkrét idejű jel eltolt egységimpulzusok összegeként felírható (l. (1.31) összefüggést). Alkalmazzuk ezt az eredményt a rendszer $s[k]$ gerjesztőjére:

$$s[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]\delta[k - i]. \quad (5.4)$$

Az impulzusválasz definíciója és a 94. oldalon említett példák alapján a rendszer ezen gerjesztésre a következő válaszjellel reagál:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]w[k - i]. \quad (5.5)$$

Ebből az összefüggésből érzékelhető az impulzusválasz másik elnevezése, a súlyfüggvény: $w[k-i]$ megadja $s[i]$ súlyát $y[k]$ kifejezésében. Az utóbbi szumma a *diszkrét idejű konvolúció*, melynek jelölése a következő:

$$\boxed{y[k] = s[k] * w[k]}, \quad (5.6)$$

ahol a $*$ operátor az $s[k]$ gerjesztés és a $w[k]$ impulzusválasz (5.5)-ben definiált utasítását jelenti.

A folytonos idejű konvolúcióhoz hasonlóan a diszkrét idejű konvolúció is rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- *Kommutatív*, azaz $s[k] * w[k] = w[k] * s[k]$. Az (5.5) összefüggésből $p = k - i$ helyettesítéssel ugyanis következik, hogy

$$\boxed{y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]w[k-i] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} w[p]s[k-p]}. \quad (5.7)$$

- *Asszociatív*, azaz $f[k] * \{g[k] * h[k]\} = \{f[k] * g[k]\} * h[k]$.
- *Disztributív*, azaz $\{f[k] + g[k]\} * h[k] = f[k] * h[k] + g[k] * h[k]$.

Az (5.5) szummában az alsó határ akkor lehet 0, ha (5.5) kifejezésében $s[k]$ belépő, a felső határ pedig akkor lehet k , ha $w[k]$ belépő, azaz ha a rendszer kauzális.

Az (5.7) második szummájában az alsó határ akkor lehet 0, ha $w[k]$ belépő, a felső határ pedig akkor lehet k , ha $s[k]$ belépő.

Kauzális rendszer esetében a konvolúció tehát a következő alakot ölti:

$$\boxed{y[k] = \sum_{i=-\infty}^k s[i]w[k-i] \equiv \sum_{p=0}^{\infty} w[p]s[k-p]}. \quad (5.8)$$

Ha ezen felül a gerjesztés is *belépő* jellegű, akkor

$$y[k] = \sum_{i=0}^k s[i]w[k-i] \equiv \sum_{p=0}^k w[p]s[k-p]. \quad (5.9)$$

Ebben az esetben (ha a rendszer kauzális és a gerjesztés belépő) a szummák véges számú tagból állnak.

Ha a rendszer FIR típusú, akkor

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{p=0}^k w[p]s[k-p] \stackrel{(1)}{=} \sum_{p=0}^k \{\varepsilon[p] - \varepsilon[p - (K+1)]\} f[p]s[k-p] \\ &\stackrel{(2)}{=} f[0]s[k] + f[1]s[k-1] + f[2]s[k-2] + \dots + f[K]s[k-K]. \end{aligned}$$

Az (1) lépésben beírtuk a konvolúció definíciós összefüggésébe a FIR típusú rendszer (5.3) impulzusválaszát, s mivel az $0 \leq k \leq K$ intervallumon kívül mindenütt nulla, ezért a felső összegzési határt átrírtuk K -ra, majd a szummázást részletesen kifejtettük a (2) lépésben.

Megállapítható tehát, hogy egy FIR típusú rendszer tetszőleges gerjesztésre adott válasza is *véges tartójú*, mely tartónak a hossza ugyancsak $K+1$.

5.3. Az ugrásválasz és az impulzusválasz kapcsolata

Az impulzusválasz és az ugrásválasz között egy nagyon egyszerű kapcsolat van diszkrét idejű, lineáris, invariáns és kauzális rendszerek esetében. A következőkben ezt a kapcsolatot mutatjuk be. Mint ismeretes a $\delta[k]$ jel egyszerűen előállítható az $\varepsilon[k]$ és az $\varepsilon[k-1]$ jelek különbségként:

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1].$$

Az erre adott válasz pedig a következő:

$$w[k] = v[k] - v[k - 1], \quad (5.10)$$

azaz az impulzusválasz kifejezhető az ugrásválasz és eltolójának különbségeként. Ebből

$$v[k] = w[k] + v[k - 1] \quad (5.11)$$

fejezhető ki. Alkalmazzuk ezután az (5.10) kifejezést $w[k - 1]$ -re, azaz

$$w[k - 1] = v[k - 1] - v[k - 2],$$

ahonnan $v[k - 1] = w[k - 1] + v[k - 2]$ fejezhető ki, majd helyettesítsük be ezt az (5.11) kifejezésbe:

$$v[k] = w[k] + w[k - 1] + v[k - 2].$$

Ezt a műveletsort rekurzívan lehet folytatni, s végeredményben a következő összefüggést kapjuk:

$$\boxed{v[k] = \sum_{i=-\infty}^k w[i]}. \quad (5.12)$$

Kauzális rendszerek esetében pedig

$$\boxed{v[k] = \sum_{i=0}^k w[i]}. \quad (5.13)$$

Ha tehát az impulzusválaszt ismerjük, az ugrásválasz meghatározható, de mint ahogy azt már említettük, inkább az impulzusválasz játszik fontos szerepet diszkrét idejű rendszerek analízise során.

1. Példa. Határozzuk meg a rendszer válaszjelét konvolúcióval, ha impulzusválasza és gerjesztése az alábbi:

$$w[k] = \varepsilon[k] 0, 1^k, \quad s[k] = \varepsilon[k].$$

Megoldás. A válaszjelet a konvolúció (5.5) definíciójából kiindulva határozzuk meg:

$$\begin{aligned}
 y[k] &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i]w[k-i] \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=0}^k s[i]w[k-i] \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^k 0,1^{k-i} = \\
 &\stackrel{(3)}{=} 0,1^k \sum_{i=0}^k 0,1^{-i} \stackrel{(4)}{=} 0,1^k \sum_{i=0}^k 10^i \stackrel{(5)}{=} 0,1^k \frac{1-10^{k+1}}{1-10} = \\
 &\stackrel{(6)}{=} \frac{0,1^k - 0,1^k 10^{k+1}}{1-10} \stackrel{(7)}{=} -\frac{1}{9} 0,1^k + \frac{10}{9}.
 \end{aligned}$$

A gerjesztés belépő, ezért az összegzés alsó határa $i = 0$, továbbá az impulzusválasz is belépőjel, így az összegzés felső határának $i = k$ választható. Ezt jelzi az (1) lépés. Ezután a (2) lépésben helyettesítsük be az impulzusválasz és a gerjesztés jelalakját. Az összegzést az i változó szerint kell elvégezni, a k változó az összegzés szempontjából konstansnak tekinthető és kivihető a szumma elé. A (3) lépésben tehát felhasználtuk, hogy $0,1^{k-i} = 0,1^k 0,1^{-i}$ (azonos alapú hatványok szorzása). A (4) lépésben negatív kitevőjű hatványokról áttérünk pozitív kitevőjű hatványokra, azaz $0,1^{-i} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-i} = (10^{-1})^{-i} = 10^i$. Az eredmény egy véges mértani sor, melynek összegképletét használjuk az (5) lépésben:

$$\boxed{\sum_{i=0}^k q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}}. \quad (5.14)$$

Ezután –a (6) lépésben– szorozzunk be a $0,1^k$ tényezővel és írjuk át a 10^{k+1} kifejezést $10^k 10$ -re. A (7) lépésben egyszerűsítsük a kifejezést: $0,1^k 10^k = 1^k = 1$. Mivel a gerjesztés belépő és a rendszer kauzális (az impulzusválasz is belépő), ezért a válaszjel is belépő lesz:

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(\frac{10}{9} - \frac{1}{9} 0,1^k \right).$$

2. Példa. Egy rendszer impulzusválasza és gerjesztése az alábbi. Határozzuk meg a válaszjel időfüggvényét.

$$w[k] = \varepsilon[k] 0,5^k, \quad s[k] = \varepsilon[k] 0,2^k.$$

Megoldás. A válaszjelet konvolúcióval határozzuk meg:

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{i=0}^k s[i]w[k-i] \stackrel{(1)}{=} \sum_{i=0}^k 0,2^i 0,5^{k-i} \stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^k 0,2^i 0,5^k 0,5^{-i} = \\ &\stackrel{(3)}{=} 0,5^k \sum_{i=0}^k 0,4^i \stackrel{(4)}{=} 0,5^k \frac{1-0,4^{k+1}}{1-0,4} = \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{0,5^k - 0,5^k 0,4^{k+1}}{1-0,4} \stackrel{(6)}{=} \frac{0,5^k - 0,4 \cdot 0,2^k}{0,6}. \end{aligned}$$

Miután az (1) lépésben behelyettesítjük az impulzusválasz és a gerjesztés időfüggvényét a konvolúció képletébe, a (2) lépésben bontjuk fel a hatványkitevőben szereplő különbséget. Az összegzést az i változó szerint kell elvégezni, k tehát konstansnak tekinthető és kivihető a szumma elé. Használjuk ki továbbá, hogy $\left(\frac{0,2}{0,5}\right)^i = 0,4^i$. Ezeket a műveleteket végeztük el a (3) lépésben. A mértani sor összegképletét használjuk az (4) lépésben. Az (5) lépésben szorozzuk be a $0,5^k$ tényezővel, majd a (6) lépésben egyszerűsítjük a kifejezést. Az eredmény minden tagját osztva $0,6$ -del, a következő válaszjel adódik:

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(\frac{5}{3} 0,5^k - \frac{2}{3} 0,2^k \right).$$

A válaszjelben szerepel a $0,5^k$ és a $0,2^k$, ezek szerepelnek az impulzusválaszban és a gerjesztésben.

3. Példa. Ebben a példában az impulzusválaszban is és a gerjesztésben is szerepel egy $0,1^k$ tag. Megvizsgáljuk miként jelentkezik ez a megoldásban. Az eddigi példákban a hatványalapok

mindig különbözőek voltak. Legyen tehát egy rendszer impulzusválasza és gerjesztése az alábbi. Határozzuk meg a rendszer válaszána időfüggvényét.

$$w[k] = 5\varepsilon[k-1] \left(0, 5^{k-1} - 0, 1^{k-1}\right), \quad s[k] = \varepsilon[k] 0, 1^k.$$

Megoldás. A gerjesztés belépőjel, tehát az összegzés alsó határa $i = 0$, az impulzusválasz a $k = 1$ ütemben lép be ezért az összegzés felső határa $k - 1$ lesz:

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{i=0}^{k-1} s[i] w[k-i] = \sum_{i=0}^{k-1} 0, 1^i 5 \left(0, 5^{k-1-i} - 0, 1^{k-1-i}\right) = \\ &\stackrel{(1)}{=} 5 \cdot 0, 5^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0, 1}{0, 5}\right)^i - 5 \cdot 0, 1^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} 1^i = \\ &\stackrel{(2)}{=} 5 \cdot 0, 5^{k-1} \left(\sum_{i=0}^k 0, 2^i - 0, 2^k\right) - 5 \cdot 0, 1^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} 1^i = \\ &\stackrel{(3)}{=} 5 \cdot 0, 5^{k-1} \left\{\frac{1 - 0, 2^{k+1}}{1 - 0, 2} - 0, 2^k\right\} - 5 \cdot 0, 1^{k-1} k = \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{5 \cdot 0, 5^{k-1} - 5 \cdot 0, 5^k 0, 5^{-1} 0, 2^k 0, 2}{0, 8} - 5 \cdot 0, 5^k 0, 5^{-1} 0, 2^k - \\ &\quad - 5k 0, 1^{k-1} = \\ &\stackrel{(5)}{=} 6, 25 \cdot 0, 5^{k-1} - 2, 5 \cdot 0, 1^k - 10 \cdot 0, 1^k - 5k 0, 1^{k-1} \end{aligned}$$

Az impulzusválasz két tagból áll, bontsuk fel ezért két részre az (1) lépésben, és emeljük ki az összegzés elé az összegzés szempontjából konstansnak tekinthető tagokat. A mértani sor összegképletének alkalmazása céljából írjuk át a (2) lépésben az első összeget a már ismertetett módon. A (3) lépésben alkalmazzuk a geometriai sor összegképletét az első összeg esetén. A második összegben k számú 1-et adunk össze, így az összeg értéke k lesz ($i = 0, \dots, k - 1$). A

(4) lépésben szorozzunk be az $5 \cdot 0, 5^{k-1}$ tényezővel, majd az (5) lépésben egyszerűsítsük a kifejezést. A kapott eredmény még nem végleges. Tegyük egységessé a kitevőket úgy, hogy mindenhol $k-1$ szerepeljen, ahol szükséges alkalmazzuk a $k-1+1$ átalakítást:

$$6, 25 \cdot 0, 5^{k-1} - 0, 25 \cdot 0, 1^{k-1} - 0, 1^{k-1} - 5(k-1)0, 1^{k-1} - 5 \cdot 0, 1^{k-1},$$

és így a válaszjel alakja összegzés után a következő lesz:

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(6, 25 \cdot 0, 5^{k-1} - 6, 25 \cdot 0, 1^{k-1} - 5(k-1)0, 1^{k-1} \right).$$

Ha tehát a gerjesztésben és az impulzusválaszban is szerepel azonos alapú hatványfüggvény, akkor a válaszjelben megjelenik olyan tag is, amely a k időnek polinomja.

5.4. A gerjesztés-válasz stabilitás

A diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor és csak akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha impulzusválasza abszolút összegezhető, azaz ha

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |w[k]| < \infty.} \quad (5.15)$$

Ennek igazolására vegyük a konvolúcióval számított válaszjel abszolút értékét és használjuk ki, hogy korlátos gerjesztés esetén $|s[k]| \leq M$:

$$|y[k]| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w[i]| |s[k-i]| \leq M \sum_{i=-\infty}^{\infty} |w[i]|.$$

Ebből következik, hogy $y[k]$ akkor korlátos, ha az utóbbi összeg véges. Kauzális rendszer impulzusválasza belépő jellegű, azaz az egyszerűbb

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |w[k]| < \infty} \quad (5.16)$$

összefüggést kell vizsgálni.

Ennek egy *szükséges feltétele*, hogy

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} w[k] = 0.} \quad (5.17)$$

Ebben az esetben a rendszer *ugrásválasza* egy véges K konstans értékhez tart, azaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v[k] = K. \quad (5.18)$$

FIR-rendszerek impulzusválasza véges számú tagból áll, ennek következtében az (5.15) kifejezés biztosan véges, azaz egy *FIR-rendszer mindig gerjesztés-válasz stabilis*.

Az előző példák mindegyike gerjesztés-válasz stabilis rendszert tartalmazott. Ezen impulzusválaszokról könnyű eldönteni, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} w[k] = 0$, hiszen q^k típusú exponenciális kifejezéseket tartalmaznak, melyekben $|q| < 1$. A rendszer akkor is gerjesztés-válasz stabilis, ha az impulzusválasz tartalmaz $k^n q^k$ jellegű tagokat, hiszen a q^k szerinti exponenciális csökkenés gyorsabb, mint a k^n szerinti növekedés. A gerjesztés-válasz stabilitással a későbbiekben még foglalkozunk.

5.5. A rendszeregyenlet

5.5.1. A rendszeregyenlet definíciója

A diszkrét idejű, lineáris, invariáns és kauzális SISO-rendszer *rendszeregyenlete* általánosan a következő alakban írható fel:

$$\boxed{y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 s[k] + b_1 s[k-1] + b_2 s[k-2] + \dots + b_m s[k-m].} \quad (5.19)$$

A rendszer *rendszámát* szintén n jelöli, továbbá bármelyik együtt-ható lehet nulla is. A rendszeregyenletből látható, hogy a válaszjel

k -adik ütembeli értéke a gerjesztés k -adik ütembeli értékétől, valamint a gerjesztés és a válasz $i < k$ (múltbeli) ütembeli értékeitől függ (kauzalitás).

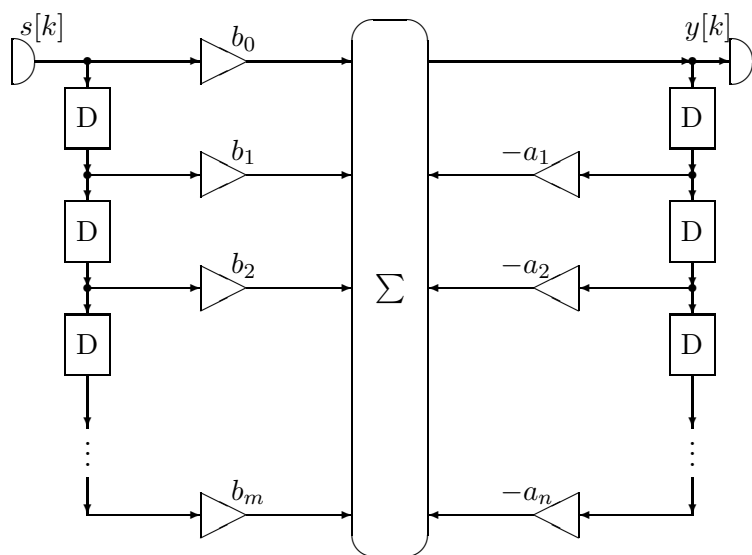
Az (5.19) rendszeregyenlet egy n -edrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciaegyenlet.

A rendszer invariáns, hiszen a_i és b_i együtthatói állandók, nem függenek a k diszkrét időtől. A rendszer lineáris, mivel mind a gerjesztés, mind a válasz elsőfokú formában van jelen.

A rendszeregyenlet egy tömörebb alakja a következő:

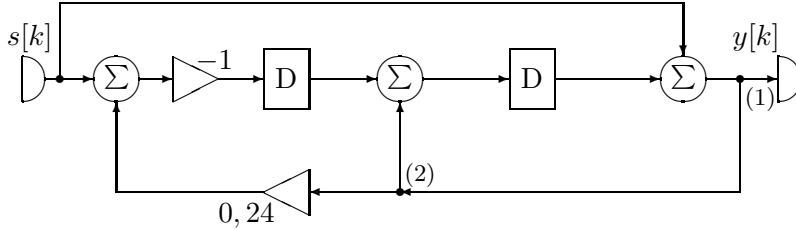
$$y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^m b_i s[k-i]. \quad (5.20)$$

A rendszeregyenletet a következő hálózat realizálja:



5.5.2. A rendszeregyenlet előállítása a hálózati reprezentáció alapján

Egy rendszer rendszeregyenlete meghatározható pl. a hálózati reprezentációja alapján. Az eljárás menetét a következő példán keresztül mutatjuk be:



Az (1) jelzésű csomópont egy elágazócsomópont, melynek kimenete $y[k]$, következésképp bemenete és lefelé irányuló kimenete is $y[k]$. Ez eljut a (2) jelzésű elágazócsomópontig. Itt $y[k]$ halad tovább balra az erősítő felé és felfelé az összegzőcsomópontba. A bal oldali összegzőcsomópontba így $s[k]$ és $0,24y[k]$ megy be, mely összeget -1 -gyel szorozza az erősítő. A késleltető kimenete, ami a középső összegző egyik bemenete is tehát $-s[k-1] - 0,24y[k-1]$. Ez az összeg az $y[k]$ -val összeadódva bemenete lesz a másik késleltetőnek. Ennek kimenete tehát $y[k-1] - s[k-2] - 0,24y[k-2]$. A jobb oldali összegző kimenete pedig pontosan $y[k]$, azaz

$$y[k] = s[k] + y[k-1] - s[k-2] - 0,24y[k-2],$$

azaz

$$y[k] - y[k-1] + 0,24y[k-2] = s[k] - s[k-2],$$

ami a hálózat és az általa reprezentált rendszer rendszeregyenlete.

Megjegyezzük, hogy a rendszeregyenlet nem minden esetben írható fel a hálózattól közvetlenül. Az 5.6. pontban tárgyalt állapotváltozós leírás reguláris hálózat esetében azonban mindig előállítható, amelyből a rendszeregyenlet származtatható (l. 5.7. pont).

5.5.3. A rendszeregyenlet megoldása

A rendszeregyenlet megoldásának diszkrét idejű rendszerek esetén az a célja, hogy azon $y[k]$ *időfüggvényt* határozzuk meg, amely megoldása a rendszeregyenletnek adott $s[k]$ gerjesztés mellett. A megoldás tehát a rendszeregyenletével adott rendszer válasza *adott $s[k]$ gerjesztésre*.

Hangsúlyozzuk, hogy a megoldás egy időfüggvény, amely k minden értékére megadja a válaszjel értékét egy képlet formájában.

Az időtartománybeli analízis során a diszkrét idejű rendszeregyenletet is *összetevőkre bontással* oldjuk meg, azaz a megoldást

$$\boxed{y[k] = y_{\text{tr}}[k] + y_{\text{st}}[k]} \quad (5.21)$$

alakban keressük. Az egyes összetevőkre ugyanazon nevekkel utalunk, mint a folytonos idejű rendszerek esetében.

Az *első* lépés a válaszjel $y_{\text{tr}}[k]$ *szabad összetevőjének, tranziensének* felírása. A szabad összetevő a differenciaegyenlet *homogén* megfelelőjének általános megoldása, melyet úgy kapunk, hogy a rendszeregyenlet jobb oldalát nullának tekintjük, mintha nem lenne gerjesztés:

$$y_{\text{tr}}[k] + \sum_{i=1}^n a_i y_{\text{tr}}[k-i] = 0. \quad (5.22)$$

Az $y_{\text{tr}}[k]$ időfüggvényt az

$$\boxed{y_{\text{tr}}[k] = M\lambda^k} \quad (5.23)$$

exponenciális alakban keressük, melyben M egy ismeretlen konstans és λ a rendszer *sajátértéke*. Helyettesítsük vissza a tranziens összetevő (5.23) függvényét és megfelelő eltoltjait az (5.22) homogén differenciaegyenletbe:

$$\left(M\lambda^k\right) + \sum_{i=1}^n a_i \left(M\lambda^{k-i}\right) = 0. \quad (5.24)$$

Fejtsük ki az összegzést részletesen:

$$M\lambda^k + a_1 M\lambda^{k-1} + a_2 M\lambda^{k-2} + \dots + a_n M\lambda^{k-n} = 0.$$

Az $M\lambda^k$ minden tagban szerepel, így azzal egyszerűsíteni lehet:

$$1 + a_1 \lambda^{-1} + a_2 \lambda^{-2} + \dots + a_n \lambda^{-n} = 0.$$

Ez egy negatív kitevőjű polinom. Szorozzunk végig a λ^n tényezővel, s így eljutunk a rendszeregyenlet ún. *karakterisztikus egyenletéhez*:

$$\boxed{\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0,} \quad (5.25)$$

amelyben egy n -edfokú polinom (és n a rendszám), az ún. *karakterisztikus polinom* szerepel. Ennek megoldása pedig n számú ún. *sajátértéket* szolgáltat. Kis gyakorlással a karakterisztikus egyenlet felírható közvetlenül a rendszeregyenletből.

Attól függően, hogy a sajátértékek milyenek, különböző szabad összetevőket írhatunk fel.

1.) Minden sajátérték különböző. Ebben az esetben a szabad válasz (transziens összetevő, vagy homogén általános megoldás) általános alakja n számú *független* szabad válasz *összege*:

$$\boxed{y_{\text{tr}}[k] = \sum_{i=1}^n M_i \lambda_i^k.} \quad (5.26)$$

Minden egyes $M_i \lambda_i^k$ szabad válasz megoldása a homogén differenciaegyenletnek, s mivel az lineáris, ezért az összegük is megoldás. Az M_i konstansokat a megoldás *végén* határozzuk meg.

2.) Az egyik sajátérték többszörös. Ha van olyan sajátérték, amelyik többszörös és a többi egyszeres, akkor a szabad válasz alakja a következő:

$$\boxed{y_{\text{tr}}(t) = \sum_{i=1}^{s-1} M_i \lambda_i^k + \sum_{j=0}^{m-1} M_j k^j \lambda_s^k.} \quad (5.27)$$

A λ_s sajátérték többszörös, *multiplicitása* m , azaz m számú van belőle. Ebben az esetben $s-1+m=n$. Az első szumma ugyanaz, mint egyszeres sajátértékek esetén, hiszen az első $s-1$ sajátérték egyszeres. A második szummában az m multiplicitásnak megfelelő számú tag van, melyekben λ_s azonos, és az idő hatványai jelennek meg az exponenciális kifejezés mellett. Ha pl. két olyan sajátérték van, amelyik többszörös (λ_{s_1} m_1 multiplicitással és λ_{s_2} m_2 multiplicitással), akkor a következő alakot kell használni:

$$y_{\text{tr}}(t) = \sum_{i=1}^{s-1} M_i \lambda_i^k + \sum_{j_1=0}^{m_1-1} M_{j_1} k^{j_1} \lambda_{s_1}^k + \sum_{j_2=0}^{m_2-1} M_{j_2} k^{j_2} \lambda_{s_2}^k. \quad (5.28)$$

Ebben az esetben pedig $s-1+m_1+m_2=n$. És így tovább.

3.) Két sajátérték konjugált komplex párt alkot. Ha λ_i és λ_{i+1} sajátértékek konjugált komplex párt alkotnak, azaz ha $\lambda_{i+1} = \lambda_i^*$, akkor a nekik megfelelő M_i és M_{i+1} konstansok is konjugált komplex párok lesznek.² Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= r_i e^{j\vartheta_i}, & \lambda_{i+1} &= r_i e^{-j\vartheta_i}, \\ M_i &= N_i e^{j\varphi_i}, & M_{i+1} &= N_i e^{-j\varphi_i}. \end{aligned}$$

Határozzuk meg az $M_i \lambda_i^k + M_{i+1} \lambda_{i+1}^k$ kifejezését, ami a szabad összetevő ezen esetre vonatkozó része:

$$y_{\text{tr}}[k] = M_i \lambda_i^k + M_{i+1} \lambda_{i+1}^k = N_i e^{j\varphi_i} r_i^k e^{j\vartheta_i k} + N_i e^{-j\varphi_i} r_i^k e^{-j\vartheta_i k}.$$

Itt felhasználjuk a következő Euler-formulát:

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

és a $\phi = \vartheta_i k + \varphi_i$ helyettesítést. A nevezőben található kettes osztót úgy visszük be a kifejezésbe, hogy a kifejezést elosztjuk

²* jelöli a komplex konjugáltat.

2-vel, és megszorozzuk 2-vel:

$$y_{\text{tr}}[k] = 2N_i r_i^k \frac{e^{j(\vartheta_i k + \varphi_i)} + e^{-j(\vartheta_i k + \varphi_i)}}{2},$$

azaz

$$y_{\text{tr}}[k] = 2N_i r_i^k \cos(\vartheta_i k + \varphi_i). \quad (5.29)$$

Ez utóbbi tehát a szabad összetevő abban az esetben, ha két sajátérték konjugált komplex párt alkot. Ez a függvény koszinuszos lefutású jel (azt is mondjuk, hogy a tranziens összetevő *lengő jellegű*), melynek amplitúdóját a sajátérték r_i abszolút értéke és az M_i konstans abszolút értéke adja. Ez növekszik, ha $r_i = |\lambda_i| = |\lambda_{i+1}| > 1$ és csökken, ha $r_i = |\lambda_i| = |\lambda_{i+1}| < 1$, körfrekvenciáját és fáziseltolását pedig a sajátérték, valamint az M_i konstans fázisa adja.

Általánosan ezen három eset kombinálva is előfordulhat.

A *második* lépés a válaszjel $y_{\text{st}}[k]$ *gerjesztett összetevőjének, stacionárius válaszá*nak meghatározása. A gerjesztett összetevő az inhomogén differenciaegyenlet egy *partikuláris* megoldása, melyet a gerjesztés, azaz a differenciaegyenlet jobb oldalának figyelembevételével kapunk meg. Tehát ez az a tag, amelyik függ a gerjesztéstől (a tranziens összetevő független a gerjesztéstől).

A stacionárius választól azt várjuk el, hogy *hasonlítson* a gerjesztőjel alakjához. Ha tehát a gerjesztés egy elemi függvény által leírt időfüggvény, akkor ahhoz találhatunk olyan un. *próba*függvényt, amelyik hasonlít rá, csak épp a paraméterei ismeretlenek. Erre szolgál a *próba*függvény módszer és a következő *próba*függvény-táblázat:

Gerjesztőjel, $s[k]$	Próba
C	A
$Cq^k, q \neq \lambda_i$	Aq^k
$C \cos(\vartheta k) + D \sin(\vartheta k)$	$A \cos(\vartheta k) + B \sin(\vartheta k)$
Ck^p	$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \dots + A_k k^p$
$C\lambda^k$ (egyszeres sajátérték)	$Ak\lambda^k$

A próbafüggvény csak a $k \geq m$ ütemekben igaz, amikor is a differenciaegyenlet jobb oldalán álló összes gerjesztés érzékelteti hatását (amikor mindegyik belép).

Miután kiválasztottuk az alkalmas próbafüggvényt, helyettesítsük be azt a megoldandó differenciaegyenletbe:

$$y_{\text{st}}[k] + \sum_{i=1}^n a_i y_{\text{st}}[k-i] = \sum_{i=0}^m b_i s[k-i]. \quad (5.30)$$

Ebben a lépésben tehát a próbafüggvényt és annak eltoltjait kell az egyenlet bal oldalába, a gerjesztőjelet és annak eltoljait pedig az egyenlet jobb oldalába helyettesíteni. A különböző függvények együtthatóinak egyezése annyi lineáris egyenletet szolgáltat, amennyi ismeretlen adat van. Ezen egyenletekből felépített egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a próbafüggvényt.

Az *utolsó* lépés a szabad válasz és a gerjesztett válasz összeadása, a válaszjel felírása:

$$y[k] = y_{\text{tr}}[k] + y_{\text{st}}[k], \quad (5.31)$$

azaz a kiszámított tranziens összetevőt (az egyelőre ismeretlen konstansokkal) és a stacionárius összetevőt egyszerűen összeadjuk. Ebben az időfüggvényben szerepel n számú ismeretlen konstans, tehát végtelen számú megoldás van, s ezek közül kell kiválasztani azt az egyet, amely kielégíti a *kezdeti feltételeket*. Gyakorlatilag egy függványseregéből választunk ki egyet, amely illeszkedik bizonyos *előírt* feltételekhez.

Az n számú kezdeti feltétel az $y[m-1], y[m-2], y[m-3], \dots, y[m-n]$ feltételeket jelenti, azaz a válaszjel adott ütembeli értékeit kell kielégíteni. Ezzel gyakorlatilag a próbafüggvény által „behozott” feltételt tudjuk kiterjeszteni a $k \geq m$ feltételről a $k \geq m-n$ feltételre. Ha $m = n$, akkor eljutunk oda, hogy a válaszjel a $k \geq 0$ ütemekre érvényes, ha $m < n$, akkor a válaszjel negatív ütembeli értékei is részt vesznek a konstansok

meghatározásában, ha pedig $m > n$, akkor csak valamely $k > 0$ ütemtől kezdve tudjuk meghatározni a válaszijel időfüggvényét. Ebben az esetben a „lépésről lépésre”-módszer által szolgáltatott értékeket használhatjuk fel a válaszijel $0 \leq k < m - n$ ütembeli értékeinek megadására.

Belépőgerjesztés esetén a válaszijel a $k < 0$ ütemekre nulla.

Ha ismerjük a kezdeti értékeket, akkor az n számú ismeretlen együtthatóra n számú lineáris egyenlet áll rendelkezése, miután felírjuk a válaszijeleket az (5.31) alakban.

Ha az impulzusválaszt kívánjuk meghatározni, akkor nagyon hasonlóan kell eljárunk. Egyetlen lényeges különbség az, hogy a próbafüggvény értékét nullának tekintjük a $k \geq m + 1$ ütemekben, tehát nem a $k \geq m$ ütemekben, s minden más lépés a fentiek szerint történik. Az impulzusválasz tehát *csak* a tranziens összetevő:

$$\boxed{w[k] = y_{tr}[k], \quad \text{ha} \quad k \geq m + 1.} \quad (5.32)$$

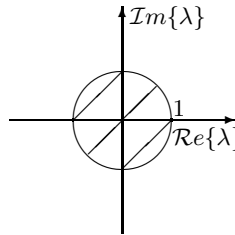
5.5.4. A gerjesztés-válasz stabilitás

A $\varphi(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenlet tehát az n -edfokú un. *karakterisztikus polinom* (n a rendszám), melynek megoldása n számú *sajátérték*et szolgáltat. Ha minden sajátérték az egységsugarú kör belsejébe esik, akkor a válasz tranziens összetevője nullához tart és a rendszer válasza az $y_{st}[k]$ időfüggvényhez közelít, amely azonban alakilag megegyezik a gerjesztéssel. Ha tehát a gerjesztés korlátos, akkor a stacionárius válasz is korlátos lesz.

Egy rendszeregyenletével adott rendszer akkor és csak akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha minden sajátérték abszolút értéke 1-nél kisebb, azaz

$$\boxed{|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n,} \quad (5.33)$$

vagyis, ha minden sajátérték az egységsugarú kör belsejében helyezkedik el.



A *Jury-kritérium* alkalmas arra, hogy a rendszeregyenletével adott rendszer gerjesztés-válasz stabilitását vizsgáljuk a sajátértékek meghatározása nélkül. Ez $n+1$ számú egyenlőtlenség vizsgálatát jelenti, itt az $n = 1, 2, 3$ eseteket mutatjuk be.

Ha $n = 1$, akkor $\varphi(\lambda) = \lambda + a_1 = 0$, amiből $\lambda = -a_1$ és ez akkor lesz egységsugarú körön belül, ha $|a_1| < 1$. Ez egyetlen feltétel (itt nem kell a kritériumot alkalmazni).

Ha $n = 2$, akkor $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Ekkor 3 feltételnek kell teljesülni:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda = 1) &= 1 + a_1 + a_2 > 0, \\ \varphi(\lambda = -1) &= 1 - a_1 + a_2 > 0, \\ 1 &> |a_2|.\end{aligned}\tag{5.34}$$

Ha $n = 3$, akkor $\varphi(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$. Ekkor 4 feltételnek kell teljesülni:

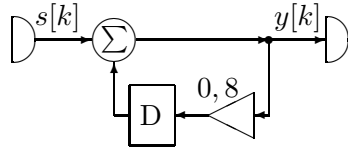
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda = 1) &= 1 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, \\ \varphi(\lambda = -1) &\Rightarrow 1 - a_1 + a_2 - a_3 > 0, \\ 1 &> |a_3|, \\ \begin{vmatrix} 1 & a_3 \\ a_3 & 1 \end{vmatrix} &> \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{5.35}$$

Az utóbbi egy másodrendű determináns: $|1 - a_3^2| > |a_2 - a_1a_3|$. A második feltételben azért nyílt szerepel, mert páratlan n esetén az egyenlőtlenség bal oldalát -1 -el szorozni kell.

A kritérium arra is alkalmas, hogy meghatározzuk a rendszer valamely paraméterét úgy, hogy a rendszer stabilis legyen.

1. Példa. Határozzuk meg az alábbi differenciaegyenletével adott rendszer ugrásválaszát és impulzusválaszát.

$$y[k] - 0,8y[k-1] = s[k].$$



Megoldás. Felrajzoltuk a rendszert reprezentáló hálózatot is. Határozzuk meg az ugrásválaszt először a „lépésről lépésre”-módszer segítségével. Ehhez írjuk át a rendszeregyenletet úgy, hogy $v[k]$ rekurzívan kifejezhető legyen, és helyettesítsünk be a $k = 0, 1, 2, \dots$ ütemekre:

$$\begin{aligned} v[k] &= 0,8v[k-1] + \varepsilon[k], \\ v[0] &= 0,8v[-1] + \varepsilon[0] = 0 + 1 = 1, \\ v[1] &= 0,8v[0] + \varepsilon[1] = 0,8 \cdot 1 + 1 = 1,8, \\ v[2] &= 0,8v[1] + \varepsilon[2] = 0,8 \cdot 1,8 + 1 = 2,44, \quad \dots, \end{aligned}$$

$v[3] = 2,952$ stb. Fontos megjegyezni, hogy a válaszjel a $k < 0$ időpillanatokban azonosan nulla, ha a gerjesztés belépő függvény, ezért pl. $v[-1] = 0$. Ezt a sorozatot a végtelenségig lehetne folytatni, azonban ha pl. a $k = 10000$ ütembeli értéket szeretnénk meghatározni, akkor célszerűbb lehet az analitikus megoldást meghatározni, s k értékét a kapott képletbe helyettesíteni. A „lépésről lépésre”-módszer nagyon hatékony lehet, ha a rendszeregyenletet számítógéppel oldjuk meg, azonban papíron, kézzel reménytelen. Az első pár ütembeli értékre azonban szükségünk lehet az analitikus megoldás során. Határozzuk meg hát az analitikus megoldást összetevőkre bontással:

$$v[k] = v_{\text{tr}}[k] + v_{\text{st}}[k].$$

A tranziens összetevő általános alakja a következő:

$$v_{\text{tr}}[k] = M\lambda^k.$$

Helyettesítsük ezt vissza a homogén differenciaegyenletbe, azaz a gerjesztést tekintsük nullának:

$$v_{\text{tr}}[k] - 0,8v_{\text{tr}}[k-1] = 0,$$

azaz

$$M\lambda^k - 0,8M\lambda^{k-1} = M\lambda^k - 0,8M\lambda^k\lambda^{-1} = 0.$$

Az M konstanssal és a λ^k tényezővel lehet egyszerűsíteni, majd λ -val beszorozva az egyenletet kapjuk a karakterisztikus egyenletet:

$$\lambda - 0,8 = 0,$$

melynek megoldása szolgáltatja a rendszer sajátértékét: $\lambda = 0,8$. A tranziens összetevő tehát a következő:

$$v_{\text{tr}}[k] = M0,8^k.$$

Az M konstans értékét a kezdeti feltételek érvényesítése (a számítás utolsó lépése) során határozzuk meg.

Határozzuk meg ezután a stacionárius választ alkalmas próbafüggvény választásával. A próbafüggvény alakja olyan kell legyen, mint a gerjesztés alakja, ami most konstans. Legyen hát a próbafüggvény $v_{\text{st}}[k] = A$ konstans, melynek értékét meg kell határoznunk (az ugrásválaszt tehát mindig konstans próbafüggvénnyel számítjuk). Van azonban egy fontos feltétele a próbafüggvény alkalmazásának. A próbafüggvényt csak akkor tételezhetjük fel, ha $k \geq m$, azaz $k \geq 0$, ugyanis ezekben az ütemekben a jobb oldal már belép és érezteti hatását (ennek akkor van nagyobb jelentősége, ha $m > 0$, l. következő példa). Helyettesítsük vissza a próbafüggvényt a megadott inhomogén differenciaegyenletbe:

$$v_{\text{st}}[k] - 0,8v_{\text{st}}[k-1] = \varepsilon[k], \quad \Rightarrow \quad A - 0,8A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = 5.$$

A teljes válasz tehát a következő:

$$v[k] = M0,8^k + 5.$$

Ez az alak csak $k > m$, azaz $k > 0$ időpillanatokban adhat helyes eredményt a próbafüggvény miatt. Az egyetlen M konstans értékét úgy kell megválasztani, hogy egyet visszalépünk az időben a $k = m - 1 = -1$ ütemre, ahol a válasz értéke nulla, hiszen a gerjesztés belépő:

$$v[-1] = 0 = M0,8^{-1} + 5 \Rightarrow M = -4.$$

A válaszjel így most már a $k \geq -1$ ütemekre érvényes, nekünk azonban elegendő a $k \geq 0$ időpillanatok ismerni. Az ugrásválasz belépő, időfüggvénye pedig a következő:

$$v[k] = \varepsilon[k] \left(5 - 4 \cdot 0,8^k \right).$$

A $\varepsilon[k]$ függvényt a megoldással együtt fel kell tüntetni, ugyanis anélkül a válaszjel a $k < 0$ (ebben a példában a $k < -1$) ütemekre biztosan rossz eredményt adna, hiszen ott $v[k] = 0$ -nak kell teljesülni.³ Az ugrásválasz tehát a $v[k \rightarrow \infty] = 5$ konstans értékhez tart, ami a „lépésről lépésre”-módszerből egyelőre nem látszik. A „lépésről lépésre”-módszerrel ellenőrizni lehet a kapott analitikus megoldást. Fontos megjegyezni, hogy a stacionárius válasz, azaz amit a próbafüggvénnyel számoltunk a tranziens folyamat lecsengése után (stabil rendszer esetében) állandóan fennáll.

Határozzuk meg ezután az impulzusválaszt. Alkalmazzuk először a „lépésről lépésre”-módszert:

$$\begin{aligned} w[k] &= 0,8w[k-1] + \delta[k], \\ w[0] &= 0,8w[-1] + \delta[0] = 0 + 1 = 1, \\ w[1] &= 0,8w[0] + \delta[1] = 0,8 \cdot 1 + 0 = 0,8, \\ w[2] &= 0,8w[1] + \delta[2] = 0,8 \cdot 0,8 + 0 = 0,64, \quad \dots \end{aligned}$$

³Ezt érdemes kipróbálni, pl. $k = -3$ esetén $v[-3] = 5 - 4 \cdot 0,8^{-3} = -2,8125$, ugyanakkor $v[-3] = \varepsilon[-3] (5 - 4 \cdot 0,8^{-3}) = 0$, hiszen a $k < 0$ időpillanatokban nincs gerjesztés, így a válasz értéke is nulla kell legyen. Érdemes megfigyelni azonban, hogy $k = -1$ esetében teljesül a feltétel, ugyanis az M konstans értékét $v[-1] = 0$ segítségével határoztuk meg.

Ebből az egyszerű példából jól látszik, hogy az impulzusválasz $0,8^k$, azaz λ^k típusú. Általánosan elmondható, hogy az impulzusválasz a tranziens összetevővel egyezik meg, ugyanis a $\delta[k]$ gerjesztéshez tartozó próbafüggvény értéke nulla. Azonban ehhez is tartozik egy feltétel. Ebben a példában $m = 0$, az $s[k] = \delta[k]$ a $k > 0$ értékek után nulla (hiszen $k = 0$ -ban $\delta[0] = 1$), és feltételezhetjük, hogy a stacionárius válasz is nulla ezen ütemekben, általánosan ez a $k \geq m + 1$ ütemekre áll fenn:⁴

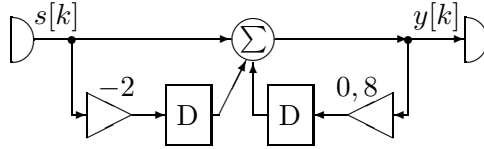
$$w[k] = y_{\text{tr}}[k] = M0,8^k, \quad \text{ha } k \geq 1.$$

Az M konstans értékét (az előzőkhöz hasonlóan) a válaszjel $k = m + 1 - 1 = 0$ ütembeli értékhez illesztjük, amit a „lépésről lépésre”-módszerből már ismerünk, azaz $w[0] = 1 = M0,8^0$, így az impulzusválasz függvényét kiterjesztettük a $k \geq 0$ ütemekre:

$$w[k] = \varepsilon[k]0,8^k.$$

2. Példa. Határozzuk meg az alábbi rendszeregyenlettel adott rendszer ugrásválaszát és impulzusválaszát.

$$y[k] - 0,8y[k-1] = s[k] - 2s[k-1].$$



Megoldás. Felvázoltuk a rendszert reprezentáló hálózatot is. Határozzuk meg az ugrásválaszt először ismét a „lépésről lépésre”-

⁴Jegyezzük meg: általános gerjesztés esetén a próbafüggvény a $k \geq m$ ütemekre érvényes, impulzusválasz esetében pedig a $k \geq m + 1$ ütemekre lehet nullának tekinteni a stacionárius választ.

módszer segítségével:

$$\begin{aligned}v[k] &= 0,8v[k-1] + \varepsilon[k] - 2\varepsilon[k-1], \\v[0] &= 0,8v[-1] + \varepsilon[0] - 2\varepsilon[-1] = 0 + 1 - 0 = 1, \\v[1] &= 0,8v[0] + \varepsilon[1] - 2\varepsilon[0] = 0,8 \cdot 1 + 1 - 2 = -0,2, \\v[2] &= 0,8v[1] + \varepsilon[2] - 2\varepsilon[1] = 0,8 \cdot (-0,2) + 1 - 2 = -1,6\end{aligned}$$

és így tovább. Az előző példából tudjuk, hogy a próbafüggvény csak a $k \geq m$ ütemekre igaz. Azt is láttuk, hogy a tranziens összetevő határozatlan konstansait a válaszjel $k = m-1, m-2, \dots, m-n$ ütembeli értékeire támaszkodva határozhatjuk meg. Ebben a példában $m = 1$ és $n = 1$. Az előző példához hasonlóan egyetlen ismeretlen konstans lesz, és a válaszjel $k = m-1 = 1-1 = 0$ ütembeli értékére lesz szükségünk, amit a „lépésről lépésre”-módszerrel tudunk meghatározni.

Határozzuk meg hát az analitikus megoldást összetevőkre bontással. A rendszer sajátértéke ebben az esetben is $\lambda = 0,8$, mivel a rendszeregyenlet bal oldala megegyezik az előző példában vizsgált rendszeregyenlettel, a tranziens összetevő alakja tehát a következő: $v_{\text{tr}}[k] = M0,8^k$.

Határozzuk meg a stacionárius választ a próbafüggvény-módszerrel. A próbafüggvény konstans: $v_{\text{st}}[k] = A$. A próbafüggvény alkalmazásának feltétele, hogy $k \geq m$, azaz $k \geq 1$. Helyettesítsük vissza a próbafüggvényt a megadott inhomogén differenciaegyenletbe:

$$v_{\text{st}}[k] - 0,8v_{\text{st}}[k-1] = \varepsilon[k] - 2\varepsilon[k-1],$$

azaz $A - 0,8A = 1 - 2$, ahonnan $A = -5$. Ebben a felírásban nagyon jól látszik, hogy a jobb oldalon $2s[k-1] = 2\varepsilon[k-1]$ helyett csak akkor írhatunk 2-t, ha $k \geq 1$, $k = 0$ esetében ugyanis $2s[k-1] = 2\varepsilon[k-1] = 0$. A teljes válasz tehát:

$$v[k] = M0,8^k - 5.$$

Ez az alak csak $k > 1$ időpillanatokban adhat helyes eredményt. Az egyetlen M konstans értékét a $k = m - 1 = 0$ ütemre támaszkodva kell meghatározni, $v[0]$ értékét pedig a „lépésről lépésre”-módszerrel már meghatároztuk, így $v[0] = 1 = M - 5$, azaz $M = 6$. Vegyük figyelembe, hogy a válaszjel most már a $k \geq 0$ ütemekre érvényes, azaz belépő:

$$v[k] = \varepsilon[k] \left(6 \cdot 0,8^k - 5 \right).$$

Az ugrásválasz stacionárius állapotban tehát a $v[k \rightarrow \infty] = -5$ konstans értékhez tart, ami a próbafüggvény értékével egyezik meg, mivel az a stacionárius választ adja.

A konstans(ok) meghatározása során tehát ügyelni kell m és n értékére.

Határozzuk meg ezután a rendszer impulzusválaszát is. Alkalmazzuk először a „lépésről lépésre”-módszert:

$$\begin{aligned} w[k] &= 0,8w[k-1] + \delta[k] - 2\delta[k-1], \\ w[0] &= 0,8w[-1] + \delta[0] - 2\delta[-1] = 0 + 1 - 0 = 1, \\ w[1] &= 0,8w[0] + \delta[1] - 2\delta[0] = 0,8 \cdot 1 + 0 - 2 = -1,2, \\ w[2] &= 0,8w[1] + \delta[2] - 2\delta[1] = 0,8 \cdot (-1,2) + 0 - 0 = -0,96 \end{aligned}$$

és így tovább. Az impulzusválasz analitikus alakja megegyezik a tranziens összetevő általános alakjával:

$$w[k] = M0,8^k,$$

ha $k \geq m + 1$, jelen esetben tehát ha $k \geq 2$, ugyanis a $k = 1$ ütemben a $-2\delta[k-1]$ értéke még nem nulla, $k \geq 2$ esetében pedig azonosan nulla. Az M paraméter értékét az impulzusválasz $k = 2 - 1 = 1$ ütembeli értékéhez kell illeszteni, azaz

$$w[1] = -1,2 = M0,8 \quad \Rightarrow \quad M = -1,5.$$

Az impulzusválasz időfüggvényét ezáltal kiterjesztettük a $k \geq 1$ ütemekre. Nekünk azonban a $k \geq 0$ ütembeli értékekre van

szükségünk. A $k = 0$ időpillanatbeli értéket egy egységimpulzus segítségével lehet beírni az időfüggvénybe, tehát az impulzusválasz a következő:

$$w[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1] \left(-1, 5 \cdot 0, 8^k \right).$$

Ezt a formulát érdemes átírni a következőképp:

$$\begin{aligned} w[k] &= \delta[k] + \varepsilon[k-1] \left(-1, 5 \cdot 0, 8^{k-1} 0, 8 \right) = \\ &= \delta[k] + \varepsilon[k-1] \left(-1, 2 \cdot 0, 8^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Tesszük ezt azért, hogy az egyes függvények k , $k-1$, $k-2$ stb. jelölései összehangoltak legyenek.⁵

A példák ismeretében összefoglalhatjuk a kezdeti értékekhez kapcsolódó szabályokat:

- ha $m > n$, akkor a megoldást nem tudjuk a $k = 0$ ütemig kiterjeszteni, csak a $k = m-n > 0$ ütemig. Az ezen időpillanat előtti függvényértékeket egységimpulzusok segítségével adhatjuk meg úgy, hogy a válaszjel értékét ezen ütemekben a „lépésről lépésre”-módszerrel határozzuk meg,
- ha $m = n$, akkor mindig $k = 0$ időpillanatban belépő választ kapunk,
- ha pedig $m < n$, akkor k negatív értékeire is kiterjeszthetjük a megoldást. A negatív ütemek azonban számunkra érdektelenek, hiszen nulla értékűek kell legyenek a gerjesztés belépő jellege miatt (kauzalitás).

Ha az impulzusválaszt akarjuk meghatározni, akkor az előbb elmondottak mind igazak, csak épp minden helyen nem m , hanem $m+1$ szerepel.

⁵Ez a későbbiekben nagyon lényeges lesz, szokjuk hát meg ezt a jelölésmódot.

5.6. Az állapotváltozós leírás

5.6.1. Az állapotváltozós leírás definíciója

Egy diszkrét idejű rendszer $x_i[k]$ ($i = 1, \dots, N$) állapotváltozói a változók olyan minimális halmaza, amelyek a következő két tulajdonsággal bírnak:

1. A rendszert megadó állapotváltozós leírás ismeretében az állapotváltozók és a gerjesztés(ek) k -edik ütembeli értékéből meghatározható az állapotváltozók $(k + 1)$ -edik ütembeli értéke, és
2. ugyanezen adatokból meghatározható a rendszer válaszának (válaszainak) értéke a k -edik ütemben.

Ha a rendszer *lineáris*, akkor az állapotváltozós leírás egy *lineáris differenciaegyenlet-rendszer*, a válaszokat pedig lineáris egyenletek fejezik ki. Ha a rendszer *invariáns*, akkor az állapotváltozós leírásban szereplő együtthatók időtől független konstansok. A *kauzalitás* a definíció miatt teljesül. Az állapotváltozó definíciójából az állapotváltozós leírás a következő alakú:

$$\begin{aligned} x_i[k + 1] &= \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j[k] + \sum_{j=1}^{N_s} B_{ij} s_j[k], \\ y_k[k] &= \sum_{j=1}^N C_{kj} x_j[k] + \sum_{j=1}^{N_s} D_{kj} s_j[k]. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Ezen leírásban szereplő mátrixok és vektorok hasonlóak a folytonos idejű rendszerek állapotváltozós leírásában szereplő mátrixokhoz és vektorokhoz: N az állapotváltozók száma ($i = 1, \dots, N$), N_s a gerjesztések száma, N_y pedig a válaszok száma ($j = 1, \dots, N_s$, $k = 1, \dots, N_y$).

Az állapotváltozós leírásban szereplő első sor egy *elsőrendű, állandó együtthatós, lineáris differenciaegyenlet-rendszert* tartalmaz, amit *állapotegyenletnek* is neveznek. Ez *elsőrendű*, mivel csak egyetlen ütemmel való eltolás szerepel benne, *állandó együtthatós*, mert A_{ij} , B_{ij} , C_{kj} és D_{kj} együtthatók állandók a rendszer invariáncája következtében (variáns rendszerek esetében $A_{ij}[k]$, $B_{ij}[k]$, $C_{kj}[k]$ és $D_{kj}[k]$ lenne), és *lineáris*, mivel az állapotváltozók és a gerjesztések elsőfokú, azaz lineáris módon szerepelnek (nincs pl. egyik sem négyzetesen).

Felírhatjuk mindezt kompaktabb alakban is, az állapotváltozós leírás *normálalakjában*:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}s[k], \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}s[k],\end{aligned}} \quad (5.37)$$

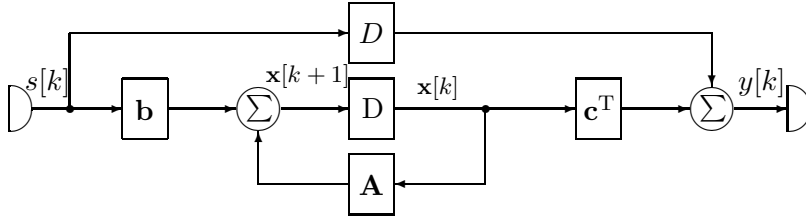
ahol $\mathbf{x}[k]$ az *állapotvektor* és $\mathbf{A}$ az N -edrendű kvadratikus *rendszer-mátrix*. *SISO-rendszerek* esetében az állapotváltozós leírás egyszerűsödik:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}s[k], \\ y[k] &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] + Ds[k],\end{aligned}} \quad (5.38)$$

azaz

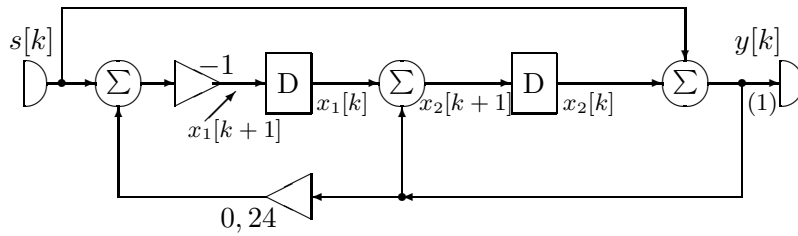
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_N[k+1] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_N[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} s[k], \\ y &= \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_N[k] \end{bmatrix} + D s[k]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

A SISO-rendszer állapotváltozós leírását realizálja a következő hatásvázlat:



5.6.2. Az állapotváltozós leírás előállítása a hálózati reprezentáció alapján

Egy rendszer állapotváltozós leírása meghatározható pl. a hálózati reprezentációja alapján. Az eljárás menetét a következő példán keresztül mutatjuk be:



Első lépésben jelöljük be az állapotváltozókat. Ezeket a dinamikus elemekhez, azaz a késleltetőkhöz kell kapcsolni. A késleltető bemenete az $x_i[k+1]$ eltolt állapotváltozó, kimenete pedig az $x_i[k]$ állapotváltozó. Az (1) jelű elágazócsomópontból lefelé az $y[k]$ halad, és ez lesz a középső összegző egyik bemenete. Az összegző másik bemenete az $x_1[k]$, azaz

$$x_2[k+1] = x_1[k] + y[k].$$

Ez azonban még nem az állapotváltozós leírásnak megfelelő alak, hiszen a jobb oldalon $y[k]$ nem szerepelhet. Az egyenletet később tovább alakítjuk. A -1 erősítésű komponens kimenete az $x_1[k+1]$:

$$x_1[k+1] = -0,24y[k] - s[k],$$

ami szintén nem felel meg az állapotváltozós leírás alakjának. A jobb oldali összegző kimenete az $y[k]$, amely $x_2[k]$ és $s[k]$ összege:

$$y[k] = x_2[k] + s[k],$$

aminek alakja megfelelő, hiszen jobb oldalán csak az állapotváltozó és a gerjesztés, bal oldalán pedig a válasz k -adik ütembeli értéke szerepel. Helyettesítsük ezt vissza az előbbi két eredménybe, és megkapjuk az állapotváltozós leírás normálalakját:

$$x_1[k+1] = -0,24x_2[k] - 1,24s[k],$$

$$x_2[k+1] = x_1[k] + x_2[k] + s[k],$$

$$y[k] = x_2[k] + s[k].$$

Arra kell tehát törekedni, hogy az egyenletrendszer alakja a fentiek megfelelő legyen. Ha ez nem állítható elő, akkor a hálózat nem reguláris.

5.6.3. Az állapotváltozós leírás megoldása

Kövessük végig pár lépésben az (5.38) állapotváltozós leírásban szereplő állapotegyenletet a „*lépésről lépésre*”-módszer segítségével. Feltesszük, hogy az állapotvektor $\mathbf{x}[0]$ kezdeti értékét ismerjük, így $k = 0$ helyettesítéssel megkapjuk az $\mathbf{x}[1]$ állapotvektort:

$$\mathbf{x}[1] = \mathbf{Ax}[0] + \mathbf{bs}[0].$$

Ismételjük meg ezt az eljárást $k = 1$ helyettesítéssel:

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{Ax}[1] + \mathbf{bs}[1],$$

és helyettesítsük be $\mathbf{x}[1]$ kifejezését:

$$\mathbf{x}[2] = \mathbf{A} \{ \mathbf{A}\mathbf{x}[0] + \mathbf{b}s[0] \} + \mathbf{b}s[1] = \mathbf{A}^2\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}s[0] + \mathbf{b}s[1].$$

Ismételjük meg ezt még egyszer $k = 2$ helyettesítéssel és használjuk fel az előző eredményt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[3] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[2] + \mathbf{b}s[2] = \mathbf{A} \{ \mathbf{A}^2\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}s[0] + \mathbf{b}s[1] \} + \mathbf{b}s[2] = \\ &= \mathbf{A}^3\mathbf{x}[0] + \mathbf{A}^2\mathbf{b}s[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}s[1] + \mathbf{b}s[2]. \end{aligned}$$

A fenti *rekurzív* lépésekből a következő zárt alakú kifejezés adódik a $k > 0$ ütemekre:

$$\boxed{\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i}\mathbf{b}s[i].} \quad (5.40)$$

Vizsgáljuk meg ezek után az (5.37) állapotváltozós leírás kimeneti válaszjel(ek)re vonatkozó összefüggését. Az $\mathbf{x}[0]$ értéket ismertnek tekintjük (ez a kezdeti érték), segítségével $y[0]$ meghatározható:

$$y[0] = \mathbf{c}^T\mathbf{x}[0] + Ds[0].$$

Minden $k > 0$ ütemre helyettesítsük be $y[k]$ kifejezésébe az (5.40) összefüggést:

$$y[k] = \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] + Ds[k] = \mathbf{c}^T \left\{ \mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i}\mathbf{b}s[i] \right\} + Ds[k],$$

majd szorozzunk be a $\mathbf{c}^T$ sorvektorral balról:

$$y[k] = \mathbf{c}^T\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \mathbf{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i}\mathbf{b}s[i] + Ds[k].$$

Ez az eredmény alkalmazható $y[k]$ tetszőleges $k > 0$ ütemre történő számítása során.

Összefoglalva tehát az $y[k]$ válaszvektor a következő zárt formulával határozható meg tetszőleges k értékre:

$$y[k] = \begin{cases} \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0] + Ds[0], & k = 0; \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}[0] + \mathbf{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} s[i] + Ds[k], & k > 0. \end{cases} \quad (5.41)$$

Látható, hogy a válaszjel időfüggvényében nem szerepel az állapotvektor időfüggvénye.

Határozzuk meg most a SISO-rendszer impulzusválaszának kifejezését az állapotváltozós leírás ismeretében. Az impulzusválasz a Dirac-impulzusra adott válasz, ami egy belépőjel, azaz a $k = 0$ ütemben az állapotvektor biztosan nullvektor, hiszen nincs gerjesztés: $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Ez a diszkrét idejű állapotvektor kifejezéséből is látszik, mivel $k = -1$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\mathbf{x}[0] = \mathbf{A} \mathbf{x}[-1] + \mathbf{b} s[-1] = \mathbf{0}.$$

Ennek következtében az állapotvektor a $k < 0$ ütemekre azonosan nulla.

Vizsgáljuk meg először az állapotvektor egységimpulzusra adott válaszát. Helyettesítsük az (5.40) kifejezésbe az $s[k] = \delta[k]$ gerjesztést:

$$\mathbf{w}_x[k] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} \delta[i].$$

Tudjuk, hogy a $\delta[k]$ Dirac-impulzus csak az $i = 0$ ütemben egységnyi, s minden más ütemben nulla, így az összegzést nem kell elvégezni, hiszen $i > 0$ értékekre a $\delta[i]$ úgyis nullát ad, azaz

$$\mathbf{w}_x[k] = \varepsilon[k-1] \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}.$$

A rendszer válasza azonban fontosabb információt tartalmaz, a rendszer impulzusválaszát. Helyettesítsük most az (5.41) kifejezésbe a $s[k] = \delta[k]$ gerjesztést:

$$\mathbf{w}[k] = \begin{cases} D\delta[0], & k = 0; \\ \mathbf{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} \delta[i] + D\delta[k], & k > 0. \end{cases}$$

A kifejezés első sora egyértelmű, csak a $k = 0$ ütemben ad nullától különböző értéket, ami pontosan a D értékével egyezik meg. A második sort átírhatjuk az előzőekhez hasonlóan:

$$\mathbf{w}[k] = \varepsilon[k - 1] \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}.$$

A két részeredményt összevonva kapjuk az impulzusválasz kifejezését:

$$\boxed{\mathbf{w}[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k - 1] \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}.} \quad (5.42)$$

Az aszimptotikus stabilitás

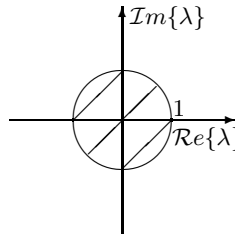
Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor aszimptotikusan stabilis, ha a gerjesztetlen rendszer állapotvektora $k \rightarrow \infty$ esetén nullához tart tetszőleges $\mathbf{x}[0]$ kezdeti érték esetén:

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}[k] = \mathbf{0}.} \quad (5.43)$$

Ez gyakorlatilag az állapotvektor Dirac-impulzusra adott válaszának meghatározását és a $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}_x[k]$ határérték vizsgálatát jelenti, amely $\mathbf{A}^k \rightarrow \mathbf{0}$ esetén cseng le. A következőkben látni fogjuk, hogy ez a mátrixfüggvény akkor tart a nullmátrixhoz, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértéke egységsugarú körön belül helyezkedik el.

Az állapotvektor tehát akkor tart nullához (a rendszer akkor aszimptotikusan stabil), ha a rendszermátrix minden sajátértékének abszolút értéke 1-nél kisebb:

$$\boxed{|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, N.} \quad (5.44)$$



A rendszermátrix karakterisztikus polinomjának meghatározása után, annak együtthatóinak segítségével is meg lehet állapítani,

hogy a rendszer aszimptotikusan stabilis vagy sem. A feltételeket l. 113. oldalon.

Ha $\mathbf{w}_x[k]$ nullához tart, akkor (5.42) alapján a rendszer impulzusválasza is nullához tart. Azaz, *ha a rendszer aszimptotikusan stabil, akkor gerjesztés-válasz stabil is*. Ez fordítva nem biztos, hogy igaz, sőt bizonyos feltételek mellett az aszimptotikusan nem stabil rendszer lehet gerjesztés-válasz stabilis.⁶

A mátrixfüggvény számítása

Diszkrét idejű rendszerek állapotváltozós leírásának megoldása során szükségünk van tehát az $\mathbf{A}^k$ mátrixfüggvényre. A mátrixfüggvényt a folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírásának megoldása során már tárgyaltuk, így azt nem ismételjük meg, viszont egy példát lépésről lépésre bemutatunk.

Annyit azonban emlékeztetőül jegyezzünk meg, hogy ha a mátrix minden sajátértéke egyszeres, vagy van többszörös sajátérték, de a minimálpolinom gyökei egyszeresek, akkor a Lagrange-féle mátrixpolinomokat alkalmazzuk:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^M f(\lambda_i) \mathbf{L}_i(\mathbf{A}), \quad (5.45)$$

ahol $\mathbf{L}_i(\mathbf{A})$ jelöli a meghatározandó *Lagrange-mátrixokat* (definícióját és meghatározásának menetét l. 75. oldalon). Diszkrét idejű rendszerek esetében a függvény $f(x) = x^k$ alakú, tehát

$$\boxed{\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^M \lambda_i^k \mathbf{L}_i(\mathbf{A}).} \quad (5.46)$$

Ha a mátrixnak van többszörös sajátértéke, és minimálpolinomjának gyökei között is van többszörös, akkor az Hermite-féle

⁶Minderre a 9. fejezetben még visszatérünk.

mátrixpolinomokat alkalmazzuk:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{\beta_i-1} f^{(j)}(\lambda_i) \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A}), \quad (5.47)$$

ahol $\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A})$ jelöli az *Hermite-mátrix*okat (l. 79. oldal). Diszkrét idejű rendszerek esetében a függvény $f(x) = x^k$ alakú, tehát⁷

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^{\beta_i-1} \frac{k!}{(k-j)!} \lambda_i^{k-j} \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{A}), \quad (5.48)$$

Példa. Határozzuk meg az alábbi állapotváltozós leírásával adott SISO-rendszer ugrásválaszát, impulzusválaszát és az $s[k] = \varepsilon[k]0,5^k$ gerjesztésre adott válaszát.

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,5 \end{bmatrix} s[k],$$

$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + s[k].$$

Megoldás. Első lépésben határozzuk meg a rendszermátrix sajátértékeit:

$$D_2(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 0,24 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) + 0,24 = \lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0.$$

⁷Gondoljuk végig az x^k függvény deriváltjait: $(x^k)' = kx^{k-1}$, $(x^k)'' = (kx^{k-1})' = k(k-1)x^{k-2}$, $(x^k)''' = (k(k-1)x^{k-2})' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$ és így tovább. Ugyanakkor írhatjuk úgy is, hogy $k = \frac{k!}{(k-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)} = k$, $k(k-1) = \frac{k!}{(k-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-2)} = k(k-1)$ és így tovább. Általánosan tehát $\frac{k!}{(k-j)!} = k(k-1)(k-2) \dots (k-j+1)$, és pont erre van szükségünk a deriváltak kifejezésében.

A sajátértékek számítására használjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 0,24}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0,6, \\ \lambda_2 = 0,4. \end{cases}$$

A sajátértékek egyszeresek, tehát további vizsgálat nélkül eldönthető, hogy az $\mathbf{A}^k$ mátrixfüggvényt a Lagrange-féle mátrixpolinomok segítségével határozzuk meg. A két Lagrange-mátrix a következőképp számítható:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(\mathbf{A}) &= \prod_{j=1, j \neq 1}^2 \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}}{\lambda_1 - \lambda_j} = \frac{\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) = \\ &= \frac{1}{0,6 - 0,4} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,4 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{0,2} \begin{bmatrix} -0,4 & -0,24 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1,2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az $\mathbf{L}_2(\mathbf{A})$ Lagrange-mátrix hasonlóképp számítható:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2(\mathbf{A}) &= \prod_{j=1, j \neq 2}^2 \frac{\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}}{\lambda_2 - \lambda_j} = \frac{\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) = \\ &= \frac{1}{0,4 - 0,6} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= -\frac{1}{0,2} \begin{bmatrix} -0,6 & -0,24 \\ 1 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1,2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ellenőrzésképp számítsuk ki a két Lagrange-mátrix összegét:

$$\mathbf{L}_1(\mathbf{A}) + \mathbf{L}_2(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -2 & -1,2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1,2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ami a másodrendű egységmátrix, ahogy annak lenni kell.

A Lagrange-mátrixok ismeretében az $\mathbf{A}^k$ mátrixfüggvény a következőképp határozható meg:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= \lambda_1^k \mathbf{L}_1(\mathbf{A}) + \lambda_2^k \mathbf{L}_2(\mathbf{A}) = 0,6^k \begin{bmatrix} -2 & -1,2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + 0,4^k \begin{bmatrix} 3 & 1,2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -2 \cdot 0,6^k + 3 \cdot 0,4^k & -1,2 \cdot 0,6^k + 1,2 \cdot 0,4^k \\ 5 \cdot 0,6^k - 5 \cdot 0,4^k & 3 \cdot 0,6^k - 2 \cdot 0,4^k \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ezen lépéseket mindig ugyanígy kell megtennünk, mert ezek a gerjesztéstől függetlenek.

Határozzuk meg gyakorlásképp az $\mathbf{x}[k]$ állapotvektor időfüggvényét az (5.40) alapján. Az állapotváltozók kezdeti értéke nulla, mivel a gerjesztés belépő, így

$$\mathbf{x}[k] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b}_s[i].$$

Szükség van tehát az $\mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b}$ szorzatra. Számítsuk először ki az $\mathbf{A}^k \mathbf{b}$ szorzatot, majd az eredményben minden k helyébe írjunk $(k-1) - i$ -t. A szorzat tehát a következő:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} -2 \cdot 0,6^k + 3 \cdot 0,4^k & -1,2 \cdot 0,6^k + 1,2 \cdot 0,4^k \\ 5 \cdot 0,6^k - 5 \cdot 0,4^k & 3 \cdot 0,6^k - 2 \cdot 0,4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1,32 \cdot 0,6^k + 1,08 \cdot 0,4^k \\ 3,3 \cdot 0,6^k - 1,8 \cdot 0,4^k \end{bmatrix},\end{aligned}$$

amiből

$$\mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1,32 \cdot 0,6^{(k-1)-i} + 1,08 \cdot 0,4^{(k-1)-i} \\ 3,3 \cdot 0,6^{(k-1)-i} - 1,8 \cdot 0,4^{(k-1)-i} \end{bmatrix}.$$

Az állapotváltozók időfüggvénye meghatározható a konvolúció tárgyalásakor bemutatott példák ismerete alapján. Az összegzés felső határában $(k-1)$ áll (l. (5.40)), a mértani sor összegképletét ismerjük, ha a felső összegzési határ k . Vezessük le a mértani sor

összegképletét, ha a felső határ $(k-1)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} q^i &= \sum_{i=0}^k q^i - q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} - q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} - q^k \frac{1 - q}{1 - q} = \\ &= \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1} - q^k}{1 - q} = \frac{1 - q^k}{1 - q}. \end{aligned}}$$

(5.49)

Használjuk ki ezt az összefüggést, így kissé rövidebb lesz a számítás. Az $x_1[k]$ időfüggvényének meghatározása tehát ($s[i] = 1$) a következő:

$$\begin{aligned} x_1[k] &= \sum_{i=0}^{k-1} \left(-1, 32 \cdot 0, 6^{(k-1)-i} + 1, 08 \cdot 0, 4^{(k-1)-i} \right) = \\ &\stackrel{(1)}{=} -1, 32 \cdot 0, 6^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{0, 6} \right)^i + 1, 08 \cdot 0, 4^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{0, 4} \right)^i = \\ &\stackrel{(2)}{=} -1, 32 \cdot 0, 6^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{0, 6} \right)^k}{1 - \left(\frac{1}{0, 6} \right)} + 1, 08 \cdot 0, 4^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{0, 4} \right)^k}{1 - \left(\frac{1}{0, 4} \right)} = \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{-1, 32 \cdot 0, 6^k + 1, 32}{0, 6 - 1} + \frac{1, 08 \cdot 0, 4^k - 1, 08}{0, 4 - 1} = \\ &\stackrel{(4)}{=} -1, 5 + 3, 3 \cdot 0, 6^k - 1, 8 \cdot 0, 4^k. \end{aligned}$$

Az (1) lépésben tegyük meg a szokásos műveleteket, vigyük ki az összegzés elé az összegzés szempontjából konstansnak tekinthető tagokat, majd a (2) lépésben használjuk fel a fentebb tárgyalt összegképletet. A (3) lépésben szorozzunk be a törtek előtt álló kifejezésekkel, az első tört számlálóját és nevezőjét szorozzuk be 0, 6-del, a másodikét pedig 0, 4-del, majd vonjunk össze a (4) lépésben. Mivel a gerjesztés belépő, az állapotváltozó is az lesz:

$$x_1[k] = \varepsilon[k] \left(-1, 5 + 3, 3 \cdot 0, 6^k - 1, 8 \cdot 0, 4^k \right).$$

Érdemes megfigyelni, hogy ezen jelalak a $k = 0$ ütemben nullát ad, ahogy azt a kiindulásnál megadtuk.

Az $x_2[k]$ állapotváltozó időfüggvényét ugyanígy kell számolni. A részleteket itt mellőzzük, mert az $x_1[k]$ számításának áttekintése után ezt hasonlóan meg lehet tenni. Azaz

$$\begin{aligned} x_2[k] &= \sum_{i=0}^{k-1} \left[3, 3 \cdot 0, 6^{(k-1)-i} - 1, 8 \cdot 0, 4^{(k-1)-i} \right] \\ &= \varepsilon[k] \left(5, 25 - 8, 25 \cdot 0, 6^k + 3 \cdot 0, 4^k \right). \end{aligned}$$

Határozzuk meg a válaszjelet is (5.41) alapján. Megjegyezzük, hogy az állapotváltozók számítása nem szükséges a válaszjel számításához, azokat csak gyakorlásképp határoztuk meg. A $k = 0$ ütemben a válaszjel a következő ($\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$):

$$y[0] = \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0] + Ds[0] = 1.$$

A $k > 0$ ütemekre pedig a következőképp számíthatjuk:

$$y[k] = \mathbf{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} s[i] + Ds[k],$$

ahol az $\mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b}$ szorzatot már meghatároztuk. Szükségünk van azonban a következő szorzatra:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1, 32 \cdot 0, 6^{(k-1)-i} + 1, 08 \cdot 0, 4^{(k-1)-i} \\ 3, 3 \cdot 0, 6^{(k-1)-i} - 1, 8 \cdot 0, 4^{(k-1)-i} \end{bmatrix} = \\ &= 3, 3 \cdot 0, 6^{(k-1)-i} - 1, 8 \cdot 0, 4^{(k-1)-i}. \end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve az $y[k]$ összefüggésébe kapjuk, hogy

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k-1} \left[3, 3 \cdot 0, 6^{(k-1)-i} - 1, 8 \cdot 0, 4^{(k-1)-i} \right] + 1.$$

Az összegre ráismerhetünk: ez pontosan az $x_2[k]$, amit azonban már meghatároztunk, így az ugrásválasz a következő:

$$y[k] = v[k] = \varepsilon[k] \left(6, 25 - 8, 25 \cdot 0, 6^k + 3 \cdot 0, 4^k \right).$$

Ez a függvény kielégíti az $y[0] = 1$ értéket is.

Határozzuk meg ezután az impulzusválaszt az (5.42) összefüggésből kiindulva:

$$w[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1]\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}.$$

Ehhez azonban már kiszámítottuk a szükséges szorzatokat, így

$$w[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1] \left(3, 3 \cdot 0, 6^{k-1} - 1, 8 \cdot 0, 4^{k-1} \right).$$

Végül határozzuk meg az $s[k] = \varepsilon[k]0, 5^k$ gerjesztésre adott választ. A válaszjel számításának ismert (5.41) összefüggését alkalmazzuk. A $k = 0$ ütemben a válaszjel a következő ($\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$):

$$y[0] = \mathbf{c}^T \mathbf{x}[0] + Ds[0] = 1.$$

A $k > 0$ ütemekre pedig a következőképp számíthatjuk:

$$y[k] = \mathbf{c}^T \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{(k-1)-i} \mathbf{b}s[i] + Ds[k].$$

Helyettesítsünk be ezen formula szummájába és vezessük le a

válaszjel kifejezését:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{k-1} \left(3, 3 \cdot 0, 6^{(k-1)-i} - 1, 8 \cdot 0, 4^{(k-1)-i} \right) 0, 5^i = \\
& \stackrel{(1)}{=} 3, 3 \cdot 0, 6^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0, 5}{0, 6} \right)^i - 1, 8 \cdot 0, 4^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0, 5}{0, 4} \right)^i = \\
& \stackrel{(2)}{=} 3, 3 \cdot 0, 6^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{0, 5}{0, 6} \right)^k}{1 - \left(\frac{0, 5}{0, 6} \right)} - 1, 8 \cdot 0, 4^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{0, 5}{0, 4} \right)^k}{1 - \left(\frac{0, 5}{0, 4} \right)} = \\
& \stackrel{(3)}{=} \frac{3, 3 \cdot 0, 6^k - 3, 3 \cdot 0, 5^k}{0, 1} - \frac{1, 8 \cdot 0, 4^k - 1, 8 \cdot 0, 5^k}{-0, 1}
\end{aligned}$$

Az (1) lépésben szorozzunk be a $0, 5^i$ tényezővel és vigyük ki az összegzés elé az összegzés szempontjából konstansnak tekinthető tagokat. Használjuk a mértani sor összegképletének kifejezését a (2) lépésben, majd a (3) lépésben szorozzuk be a törtet az előttük álló taggal és alakítsuk át az emeletes törtet. Összevonás után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
y[k] &= \varepsilon[k] \left(33 \cdot 0, 6^k + 18 \cdot 0, 4^k - 51 \cdot 0, 5^k \right) + \varepsilon[k] 0, 5^k = \\
&= \varepsilon[k] \left(33 \cdot 0, 6^k + 18 \cdot 0, 4^k - 50 \cdot 0, 5^k \right).
\end{aligned}$$

Ez a kifejezés a $k = 0$ ütemre 1-et ad, ahogy azt fentebb kiszámítottuk.

5.7. Az állapotváltozós leírás és a rendszer-egyenlet kapcsolata

A rendszeregyenlet és az állapotváltozós leírás egy rendszer két különböző matematikai megfogalmazása. Mivel ugyanazon rendszert írnak le, közöttük kapcsolat kell legyen.

5.7.1. Az állapotváltozós leírás meghatározása a rendszeregyenlet ismeretében

Példa. Határozzuk meg az alábbi állapotváltozós leírással adott rendszer rendszeregyenletét.

$$y[k] - 0,8y[k-1] = s[k] - 2s[k-1].$$

Megoldás. A cél tehát állapotváltozók bevezetése, és a rendszeregyenlet átalakítása állapotváltozós leírássá. Arra kell ügyelnünk, hogy az állapotváltozós leírás jobb oldalán az állapotváltozók és a gerjesztés k -adik, bal oldalán pedig az állapotváltozók $(k+1)$ -edik, továbbá a válaszcél k -adik ütembeli értéke szerepeljen. A megoldás menete a következő. Először azt kell meghatároznunk, hogy hány állapotváltozó szükséges a rendszer leírására. Ez a rendszeregyenletből mindig megállapítható: $N = \max(n, m)$, vagyis n és m értékek közül a nagyobbik számú, jelen esetben $N = 1$. Első lépésben rendezzük át a rendszeregyenletet úgy, hogy annak bal oldalán csak $y[k]$ szerepeljen:

$$y[k] = 0,8y[k-1] + s[k] - 2s[k-1].$$

Ebben $s[k]$ az egyedüli, amelynek a k -adik ütembeli értéke szerepel, ezt tehát hagyjuk meg, mert az állapotváltozós leírásban pont $s[k]$ szerepel, a másik két tagot pedig jelöljük az $x_1[k]$ állapotváltozóval, azaz

$$x_1[k] = 0,8y[k-1] - 2s[k-1],$$

s így $y[k] = x_1[k] + s[k]$. A válaszcél így rendben is van, hiszen k -adik ütembeli értéke az állapotváltozó és a gerjesztés k -adik ütembeli értékei által meghatározott, ahogy azt a definíció is mondja. Toljuk el ezután $x_1[k]$ kifejezését, mivel az állapotváltozós leírás bal oldalán az állapotváltozók $k+1$ -edik ütembeli értéke kell szerepeljen:

$$x_1[k+1] = 0,8y[k] - 2s[k].$$

Vegyük szemügyre ezt a felírást. Ebben $s[k]$ szerepel, amelyet már nem kell módosítanunk, továbbá $y[k]$, amelynek azonban semmi keresnivalója az egyenlet jobb oldalán. Azonban fentebb meghatároztuk $y[k]$ kifejezését a helyes alakban. Helyettesítsük azt vissza az utóbb felírt egyenletbe:

$$x_1[k+1] = 0,8 \{x_1[k] + s[k]\} - 2s[k] = 0,8x_1[k] - 1,2s[k].$$

Ez az alak már megfelel a definíciónak, azaz az állapotváltozós leírás a következő:

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= 0,8x_1[k] - 1,2s[k], \\ y[k] &= x_1[k] + s[k]. \end{aligned}$$

Az átalakítás megoldható egyetlen lépésbe is, a folytonos idejű rendszereknél is alkalmazott *második Frobenius-alak*, vagy más néven *megfigyelő alak* segítségével⁸:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_N \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{N-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ b_{N-2} - b_0 a_{N-2} \\ \vdots \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix} s[k], \\ y[k] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + b_0 s[k]. \end{aligned} \tag{5.50}$$

⁸Az *első Frobenius-alak*, vagy *szabályozó alak* meghatározható a második alak ismeretében (vagy megfordítva): $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2^T$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_2^T$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{B}_2^T$ és $D_1 = D_2$ (az indexek az első és a második alakra utalnak).

5.7.2. A rendszeregyenlet meghatározása az állapotváltozós leírás ismeretében

Példa. Határozzuk meg a következő állapotváltozós leírásával adott rendszer rendszeregyenletét.

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,24 \\ 1,5 \end{bmatrix} s[k],$$
$$y[k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + s[k].$$

Megoldás. A cél az állapotváltozók kiejtése az állapotváltozós leírásból. A megoldás menete a következő. A válaszjel egyenletét N -szer el kell tolnunk 1 ütemmel. Ezáltal kapunk egy $N+1$ egyenletből álló egyenletrendszert, amely tartalmazza az állapotváltozók k -adik ütembeli értékét, továbbá a gerjesztés és a válasz k -adik, $(k+1)$ -edik, $\dots$, $(k+N)$ -edik ütembeli értékét. Az egyenletrendszer megoldása során ismeretlennek tekintjük az N számú állapotváltozót és az $y[k+N]$ választ. Ez pontosan $N+1$ számú ismeretlen. A cél $y[k+N]$ kifejezése egyetlen egyenlettel (a rendszeregyenlettel) úgy, hogy az egyenlet ne tartalmazzon állapotváltozót.

Mindig a válaszjel egyenletéből indulunk ki. Toljuk el ezt egy ütemmel:

$$y[k+1] = x_2[k+1] + s[k+1].$$

Helyettesítsük be ezután $x_2[k+1]$ kifejezését az állapotváltozós leírásból:

$$y[k+1] = x_1[k] + x_2[k] + 1,5s[k] + s[k+1].$$

Toljuk el egy ütemmel a kapott $y[k+1]$ egyenletet:

$$y[k+2] = x_1[k+1] + x_2[k+1] + 1,5s[k+1] + s[k+2],$$

majd helyettesítsük be $x_1[k+1]$ és $x_2[k+1]$ kifejezését az állapotváltozós leírásból és vonjunk össze:

$$\begin{aligned} y[k+2] &= -0,24x_2[k] - 0,24s[k] + x_1[k] + x_2[k] + \\ &\quad + 1,5s[k] + 1,5s[k+1] + s[k+2] = \\ &= x_1[k] + 0,76x_2[k] + 1,26s[k] + 1,5s[k+1] + s[k+2]. \end{aligned}$$

Az $N = 2$ számú eltolás után kaptunk egy $N + 1 = 3$ egyenletből álló egyenletrendszert, amelyben ismeretlen az $x_1[k]$, az $x_2[k]$ (azért kellett visszahelyettesíteni az állapotvektort, hogy az állapotváltozóknak csak a k -adik ütembeli értéke szerepeljen) és az $y[k+2]$. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert. Fejezzük ki az $y[k]$ egyenletéből az $x_2[k]$ állapotváltozót: $x_2[k] = y[k] - s[k]$, és helyettesítsük vissza az $y[k+1]$ és $y[k+2]$ egyenletekbe. Rendezés után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} y[k+1] &= x_1[k] + y[k] + 0,5s[k] + s[k+1], \\ y[k+2] &= x_1[k] + 0,76y[k] + 0,5s[k] + 1,5s[k+1] + s[k+2]. \end{aligned}$$

Ezen egyenletek már csak az $x_1[k]$ és $y[k+2]$ ismeretleneket tartalmazza. Előbbiből fejezzük ki $x_1[k]$ -t, majd helyettesítsük vissza azt az utolsó egyenletbe:

$$y[k+2] = y[k+1] - 0,24y[k] + s[k+2] + 0,5s[k+1].$$

Ez azonban még nem a teljes végeredmény, a rendszeregyenletben ugyanis késleltetések szerepelnek. Toljuk el ezért a kapott eredményt $N = 2$ -vel, így:

$$y[k] = y[k-1] - 0,24y[k-2] + s[k] + 0,5s[k-1],$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$y[k] - y[k-1] + 0,24y[k-2] = s[k] + 0,5s[k-1].$$

3. rész Analízis a frekvenciatartományban

Ebben a részben *lineáris*, *invariáns* és *kauzális* rendszerek frekvenciatartománybeli analízisével foglalkozunk. Először megvizsgáljuk a gyakorlatban legtöbbször előforduló *szinuszos gerjesztésre* adott válasz számításának módszerét. Bevezetjük a *komplex csúcérték* fogalmát és a komplex számítási módszert, valamint a rendszert adott körfrekvencián jellemző *átviteli tényezőt*. Utóbbi általánosítása az *átviteli karakterisztika*, melynek ábrázolását teszi lehetővé a *Nyquist-diagram* és a *Bode-diagram*. Megvizsgáljuk az impulzusválasz és az átviteli karakterisztika kapcsolatát is. Az átviteli karakterisztika egy újabb rendszerjellemző függvény.

Ezen rész másik, rendkívül fontos területe a *Fourier-közelítés*, amely lehetővé teszi, hogy teljesen általános periodikus jelekre adott válasz számítását visszavezessük a szinuszos gerjesztésre adott válasz számítására. Látni fogjuk, hogy diszkrét idejű jelek esetében ez nem csupán közelítés, hanem a jel pontos leírása.

A Fourier-közelítésből kiindulva eljutunk a jelek és rendszerek *spektrális leírásához*, amely kiegészíti az időtartománybeli analízis egyes eszközeit. Az ún. *Fourier-transzformáció* mélyebb betekintést enged a rendszer viselkedésébe, és a részt a gyakorlatban is sokszor alkalmazott eljárások bemutatásával zárjuk.

6. fejezet

FI rendszerek analízise a frekvenciatartományban

6.1. Szinuszos állandósult válasz számítása

6.1.1. A szinuszos jel

Egy folytonos idejű szinuszos jel a következőképp adható meg:

$$\boxed{s(t) = S \cos(\omega t + \rho)}, \quad (6.1)$$

ahol $S > 0$ a jel *csúcsértéke*, vagy *amplitúdója*, ω a jel *körfrekvenciája*, ρ pedig a jel *kezdőfázisa* ($0 \leq \rho < 2\pi$, vagy $-\pi \leq \rho < \pi$). A csúcsértéket szokás $\hat{S}$ -sal is jelölni. Ezen jel mindig *periodikus* a T *periódusidővel*, *frekvenciája* pedig $f = 1/T$. Utóbbi két mennyiségből a körfrekvencia számítható:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi f.}$$

Fontos megjegyezni, hogy a periódusidő SI mértékegysége a másodperc (s), a frekvencia mértékegysége a hertz (Hz), a körfrekvencia mértékegysége pedig a radián per másodperc ($\frac{\text{rad}}{\text{s}}$). Ha pl.

a periódusidő ms egységben adott, akkor a frekvencia és a körfrekvencia mértékegysége $[f] = \frac{1}{[T]}$ és $[\omega] = \frac{\text{rad}}{[T]}$ szerint kHz és $\frac{\text{krad}}{\text{s}}$ (ez egy un. *koherens egységrendszer*), és így tovább.

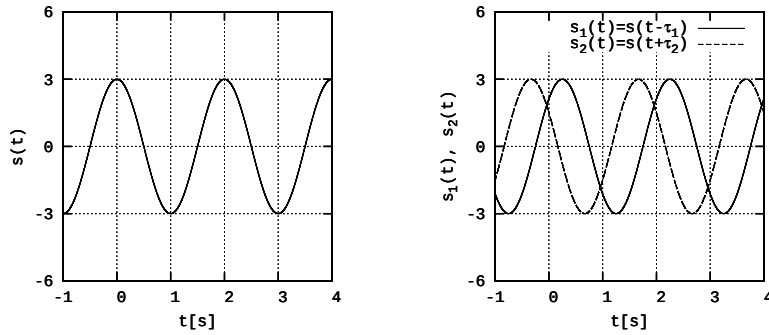
Például a következő, $f = 0,5 \text{ Hz}$ frekvenciájú ($T = 2 \text{ s}$ periódusidejű) szinuszos jel és két eltoltja látható a 6.1 ábrán:¹

$$s(t) = 3 \cos(2\pi 0,5 t),$$

$$s_1(t) = 3 \cos(2\pi 0,5 t - \pi/4), \quad s_2(t) = 3 \cos(2\pi 0,5 t + \pi/3).$$

A két eltolt jel felírható a következő módon is:

$$s_1(t) = 3 \cos(2\pi 0,5(t - 1/4)), \quad s_2(t) = 3 \cos(2\pi 0,5(t + 1/3)).$$

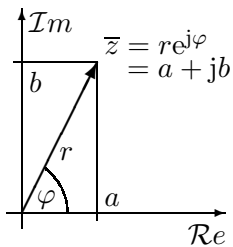


6.1. ábra. Folytonos idejű szinuszos jelek

6.1.2. A szinuszos jel komplex leírása

A szinuszos jelek leírására nagyon előnyös az un. *komplex leírás*, melynek ismertetése előtt átismétljük a komplex számok számunkra fontos definícióit és összefüggéseit.

¹Emlékeztetőül: a $-\pi/4$ az eredeti jelet *jobbra* tolja el, azaz késik az eredeti jelhez képest, a $+\pi/3$ *balra* tolja el az eredeti jelet, azaz sietteti azt. A $\pi/4$ eltolás az időben $\tau_1 = T/8 = 1/4 \text{ s}$ -nak, a $\pi/3$ pedig $\tau_2 = T/6 = 1/3 \text{ s}$ -nak felel meg. Ez a következő aránypárból számítható: ha a 2π fázis T időnek felel meg, akkor a $\pi/4$ fázis τ_1 -nek: $\frac{2\pi}{T} = \frac{\pi/4}{\tau_1}$, ahonnan $\tau_1 = \frac{\pi/4}{2\pi} T = T/8$.



Egy $\bar{z}$ komplex szám ($\bar{z} \in \mathbb{C}$, ahol $\mathbb{C}$ jelöli a komplex számok halmazát) két részből áll: egy *valós részből* és egy *képzetes részből*. Ez felírható az un. *algebrai alak* segítségével:

$$\boxed{\bar{z} = a + jb,} \quad (6.2)$$

6.2. ábra. A *fazor*

ahol $a = \text{Re}\{\bar{z}\}$ a komplex szám *valós*, vagy *reális része*, $b = \text{Im}\{\bar{z}\}$ pedig a komplex szám *képzetes*, vagy *imaginárius része*. A j a képzetes egység: $j \equiv \sqrt{-1}$. Fontos megjegyezni, hogy a is és b is valós szám. Egy komplex számot egy vektorként szokás ábrázolni, és ezen vektor neve *fazor* (6.2. ábra). Egy komplex szám másik alakja a *trigonometrikus alak*:

$$\boxed{\bar{z} = r(\cos \varphi + j \sin \varphi),} \quad (6.3)$$

ugyanis

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi$$

a fazor r hosszának és a valós tengellyel bezárt φ szögének ismeretében.

A számítások során kényelmesen alkalmazható az un. *Euler-alak*, amely a trigonometrikus alakból származtatható. Írjuk fel ehhez a $\cos \varphi$ és a $\sin \varphi$ trigonometrikus függvények hatványsorát:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} \mp \dots, \\ \sin \varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} \mp \dots, \end{aligned}$$

és írjuk fel az e^x exponenciális függvény hatványsorát is

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots,$$

majd helyettesítsük x helyébe a $j\varphi$ kifejezést:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - j\frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^8}{8!} + j\frac{\varphi^9}{9!} \mp \dots = \\ &= 1 - \underbrace{\frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} \mp \dots}_{\cos \varphi} + j \underbrace{\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} \mp \dots \right)}_{\sin \varphi}, \end{aligned}$$

amelyben tehát felismerhető a $\cos \varphi$ és a $\sin \varphi$ hatványsora azzal a különbséggel, hogy a $\sin \varphi$ hatványsorához tartozó tagokban szerepel a j képzetes egység. Így $e^{j\varphi}$ felírható a következő alakban is:

$$\boxed{e^{j\varphi} \equiv \cos \varphi + j \sin \varphi.} \quad (6.4)$$

Ez az un. *Euler-reláció*. Látható, hogy $|e^{j\varphi}| \equiv 1$. Egy komplex szám tehát felírható az Euler-alak segítségével is:

$$\boxed{\bar{z} = r e^{j\varphi}.} \quad (6.5)$$

Egy komplex számnak tehát három alakja van. Azt, hogy mikor melyiket érdemes alkalmazni, példán keresztül vizsgáljuk meg.²

Ezen ismeretek birtokában a (6.1) időfüggvényt felírhatjuk az Euler-relációnak megfelelően:

$$\boxed{s(t) = S \cos(\omega t + \rho) = \mathcal{R}e \left\{ S e^{j(\omega t + \rho)} \right\} = \mathcal{R}e \left\{ S e^{j\omega t} e^{j\rho} \right\}.} \quad (6.6)$$

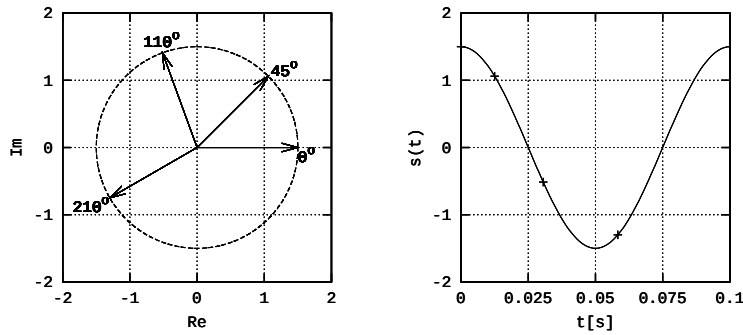
Ha a gerjesztőjel körfrekvenciája ω és a rendszer *lineáris*, akkor a rendszer kimeneti jelének a körfrekvenciája is ω lesz. Azaz a gerjesztés és a válasz körfrekvenciája megegyezik, így az $e^{j\omega t}$ tényezővel nem kell foglalkoznunk, hiszen az csak az ω körfrekvenciát tartalmazza. A másik két tényező neve együttesen a *komplex amplitúdó*, vagy *komplex csúcsérték*:

$$\boxed{\bar{S} = S e^{j\rho} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \mathcal{R}e \left\{ \bar{S} e^{j\omega t} \right\} = \mathcal{R}e \left\{ \bar{s}(t) \right\}.} \quad (6.7)$$

²Már most megjegyezzük, hogy az összeadást és kivonást az algebrai alakkal, a szorzást és az osztást az Euler-alakkal lehet leggyorsabban elvégezni. A trigonometrikus alak az előbbi két alak közti átmenetet biztosítja.

Utóbbiban az $\bar{s}(t) = \bar{S}e^{j\omega t}$ az ún. *komplex pillanatérték*, amely gyakorlatilag egy forgó fázor: abszolút értékét és kezdőfázisát az S csúcserőérték és a ρ szög adja, helyzete, azaz ahova a vektor mutat az $e^{j\omega t}$ fázor határozza meg minden egyes t időpillanatban. Ez a fázor az óramutató járásával ellentétes irányban ω körfrekvenciával forog és a valós tengelyre vett vetülete adja a (6.1) időfüggvényt. A képzetes tengelyre vett vetülete egy ugyanilyen amplitúdójú, fázisszögű és körfrekvenciájú szinuszos jel.

Az elmondottak illusztrálását szolgálja a 6.3. ábra, ahol az $s(t) = 1,5 \cos \omega t$ jel komplex reprezentációja (fázorja) és időfüggvénye látható ($f = 10$ Hz). Az ábrán bejelöltük az egyes komplex pillanatértéknek megfelelő függvényértéket is (pl. a $\varphi = 110^\circ$ -os fázis a $\tau = 0,03055$ s időpillanatnak felel meg, ami a $\frac{2\pi}{T} = \frac{\varphi}{\tau}$ aránypárból határozható meg).



6.3. ábra. Egy folytonos idejű szinuszos jel komplex pillanatértékének és időfüggvényének illusztrációja

A következő összefüggéseket a későbbiekben többször is alkalmazni fogjuk.

1.) Mivel a komplex csúcserőérték egy vektor, ezért két, $s_1(t)$ és $s_2(t)$ szinuszos jel összege és különbsége egyszerűen képezhető trigonometrikus azonosságok felhasználása nélkül. A két jel komplex csúcserőértékének meghatározása után két vektor összegét kell

képezni:

$$\boxed{s(t) = s_1(t) \pm s_2(t) \Leftrightarrow \bar{S} = \bar{S}_1 \pm \bar{S}_2.} \quad (6.8)$$

2.) Egy K valós számmal végzett szorzás a vektor hosszát, azaz a csúcsértéket változtatja meg:

$$\boxed{y(t) = Ks(t) \Leftrightarrow \bar{Y} = K\bar{S}.} \quad (6.9)$$

Ha $K > 0$, akkor $y(t)$ és $s(t)$ fázisban vannak, ha $K < 0$, akkor egymáshoz képest 180° -kal vannak eltolva.

3.) A szinuszos jel deriváltjának komplex csúcsértékére a későbbiekben szükségünk lesz. Képezzük hát a (6.1) jel deriváltját a deriválási szabályoknak megfelelően:

$$y(t) = \dot{s}(t) = -\omega S \sin(\omega t + \rho) = \omega S \cos(\omega t + \rho + \frac{\pi}{2}), \quad (6.10)$$

azaz a derivált jel siet $\pi/2$ -vel az eredeti jelhez képest. Írjuk fel ugyanezt úgy, hogy használjuk a komplex csúcsérték és a komplex pillanatérték fogalmát:

$$y(t) = \dot{s}(t) = \mathcal{Re} \{ \bar{S} e^{j\omega t} \}' = \mathcal{Re} \{ \bar{S} j\omega e^{j\omega t} \}, \quad (6.11)$$

hiszen $\bar{S}$ egy konstans, s csak az $e^{j\omega t}$ tagot kell deriválni, ami pedig $j\omega e^{j\omega t}$, továbbá $j\omega = \omega e^{j\frac{\pi}{2}}$ az Euler-reláció szerint³, azaz

$$\begin{aligned} y(t) &= \omega \mathcal{Re} \left\{ \bar{S} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} \right\} = \omega \mathcal{Re} \left\{ \bar{S} e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} \right\} = \\ &= \omega \mathcal{Re} \left\{ \bar{S} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \right\} = \omega S \cos(\omega t + \rho + \frac{\pi}{2}), \end{aligned} \quad (6.12)$$

ami természetesen megegyezik az előbbi eredménnyel⁴. A (6.11) összefüggésből látható, hogy ha egy $s(t)$ szinuszos időbeli lefutású

³Jegyezzük meg már most, hogy $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ és $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, azaz $\pm j$ -vel való szorzás $\pm 90^\circ$ -os fázisforgatást jelent.

⁴Az ω tagot kiemelhetjük, mivel az egy valós szám.

jelet idő szerint deriválunk, akkor az a komplex csúcértékekre áttérve $j\omega$ taggal történő szorzást jelent:

$$\boxed{y(t) = \dot{s}(t) \Leftrightarrow \bar{Y} = j\omega \bar{S},} \quad (6.13)$$

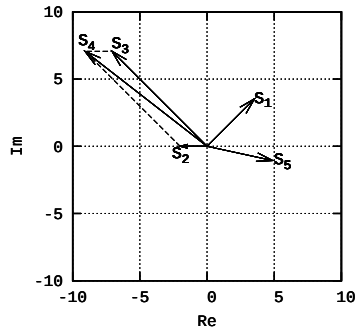
azaz az $y(t)$ derivált jel az $s(t)$ jelhez képest fázisban 90° -kal ($\pi/2$ -l) siet. Általánosan az n -edik derivált és a komplex csúcérték kapcsolata a következő:

$$\boxed{y(t) = s^{(n)}(t) \Leftrightarrow \bar{Y} = (j\omega)^n \bar{S}.} \quad (6.14)$$

Példa. Adott két szinuszos jel időfüggvénye:

$$s_1(t) = 5 \cos(2t + 0,25\pi), \quad s_2(t) = -2 \cos(2t).$$

Határozzuk meg az $s_3(t) = s_1'(t)$, az $s_4(t) = s_2(t) + s_3(t)$ és az $s_5(t) = s_1(t - 0,5)$ jelek időfüggvényét és komplex csúcértékét. A példában szereplő fázorokat a 6.4. ábrán ábrázoltuk.



6.4. ábra. A példában szereplő fázorok

Megoldás. A jelek körfrekvenciája azonos: $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (SI egységben). A (6.1) időfüggvény és a (6.7) definíció alapján meg-

határozhatjuk a két jel komplex csúcsértékét⁵:

$$\overline{S}_1 = 5e^{j0,25\pi}, \quad \overline{S}_2 = -2 = 2e^{j\pi}.$$

Látható, hogy a csúcsérték mindig pozitív ($S > 0$). Az $s_3(t)$ jel komplex csúcsértéke a (6.13) alapján a következő⁶:

$$\overline{S}_3 = j2 \overline{S}_1 = j2 \cdot 5e^{j0,25\pi} = 2e^{j0,5\pi} 5e^{j0,25\pi} = 10e^{j0,75\pi},$$

időfüggvénye pedig a (6.1) és (6.7) összefüggések szerint felírható:

$$s_3(t) = 10 \cos(2t + 0,75\pi).$$

Két komplex szám szorzását és osztását az Euler-alak segítségével célszerű számolni. Általánosan tehát:

$$\boxed{r_1 e^{j\alpha} r_2 e^{j\beta} = r_1 r_2 e^{j(\alpha+\beta)}, \quad \frac{r_1 e^{j\alpha}}{r_2 e^{j\beta}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha-\beta)}}. \quad (6.15)$$

Az $s_4(t)$ meghatározása során összeadást kell végezni. Ekkor célszerű áttérni az algebrai alakra:

$$\begin{aligned} \overline{S}_2 &= -2, \quad \overline{S}_3 = 10e^{j0,75\pi} = 10(\cos(0,75\pi) + j\sin(0,75\pi)) = \\ &= -7,071 + j7,071. \end{aligned}$$

Adjuk össze hát ezen két algebrai alakkal adott komplex számot:

$$\overline{S}_4 = \overline{S}_2 + \overline{S}_3 = -2 - 7,071 + j7,071 = -9,071 + j7,071.$$

A komplex csúcsérték felírásához az Euler-alakot kell felírni:

$$\overline{S}_4 = \sqrt{9,071^2 + 7,071^2} e^{j \arctan\left\{\frac{7,071}{-9,071}\right\}} = 11,5e^{-j0,662}.$$

⁵ $-2 = -2 + j0 = 2e^{j\pi}$. Ez a vektor a valós tengellyel 180° -os szöget zár be. Eleinte érdemes a fazort felrajzolni.

⁶ $j2 = 0 + j2 = 2e^{j0,5\pi}$. Ez a vektor a valós tengellyel 90° -os szöget zár be.

Vigyáznunk kell azonban a fázis számítása során! Itt a valós rész negatív, a képzetes rész pedig pozitív, azaz a szög biztosan nem lehet negatív értékű (l. 6.2 ábra). Ez tehát a $\pi - 0,662$ szög lesz, amelynek értéke: $2,48$.⁷ Így a komplex csúcsérték és az időfüggvény helyes értéke a következő:

$$\overline{S}_4 = 11,5e^{j2,48} \Rightarrow s_4(t) = 11,5 \cos(2t + 2,48).$$

Az $s_5(t) = s_1(t - 0,5)$ jel időfüggvénye és komplex csúcsértéke a következőképp számítható:

$$\begin{aligned} s_1(t - 0,5) &= 5 \cos(2(t - 0,5) + 0,25\pi) = 5 \cos(2t - 1 + 0,25\pi) = \\ &= 5 \cos(2t - 0,215) \Rightarrow \overline{S}_5 = 5e^{-j0,215}. \end{aligned}$$

Az időbeli eltolás tehát fázistolást jelent.

6.1.3. Az átviteli karakterisztika

Az átviteli karakterisztika és az átviteli együttható fogalma, a válaszjel számítása

Ha egy folytonos idejű, lineáris, invariáns és kauzális rendszer *gerjesztés-válasz stabilis*, akkor a teljes válasz szabad összetevője nullához tart és a válasz egy idő után megegyezik a gerjesztett összetevővel. A szinuszos jel egy *vizsgálójel*. Ha a gerjesztés szinuszos lefutású, akkor a válaszjel is szinuszos lesz ugyanazon körfrekvenciával. Legyen hát a gerjesztés is és a válasz is szinuszos:

$$s(t) = S \cos(\omega t + \rho), \quad y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi). \quad (6.16)$$

Írjuk fel ezen jelek komplex csúcsértékét:

$$\overline{S} = Se^{j\rho}, \quad \overline{Y} = Ye^{j\varphi}. \quad (6.17)$$

⁷Ezért kell felrajzolni mindig a fazorábrát, hogy lássuk a vektor végpontja melyik síknegyedbe mutat. A mai számológépek azonban tudják az egyes alakok közti helyes átszámítást ($\rightarrow xy, \rightarrow r\Theta$).

Szinuszos gerjesztés és válasz esetén képezhetjük ezen két komplex mennyiség hányadosát, ami az ún. *átviteli karakterisztika*.⁸

$$\boxed{\overline{W} = W(j\omega) = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}}} \quad (6.18)$$

The diagram shows a block labeled $W(j\omega)$. An input arrow from the left is labeled $s(t) = S \cos(\omega t + \rho)$ and $\overline{S} = S e^{j\rho}$. An output arrow to the right is labeled $y(t) = Y \cos(\omega t + \varphi)$ and $\overline{Y} = Y e^{j\varphi}$.

Az átviteli karakterisztika egy *rendszerjellemező függvény*, és az ω körfrekvencia függvénye, amely adott körfrekvencián (ami a gerjesztés körfrekvenciája) megadja a válaszjel komplex csúcsértékét a gerjesztés komplex csúcsértékének függvényében:

$$\boxed{\overline{Y} = \overline{W} \overline{S}}, \quad (6.19)$$

amelyből a válasz $y(t)$ időfüggvénye meghatározható a komplex csúcsérték definíciójának megfelelően. Fontos megjegyezni, hogy az átviteli karakterisztika egy adott körfrekvencián egy komplex szám, amely megadja azt, hogy ezen körfrekvencián a rendszer hatására mennyivel fog különbözni a válaszjel amplitúdója és fázisa a gerjesztés amplitúdójától és fázisától.⁹ Az átviteli karakterisztika egy adott körfrekvencián az ún. *átviteli együttható*: $\overline{W} = K e^{j\phi}$, ahol $K = |\overline{W}|$ az átviteli együttható abszolút értéke, azaz nagysága, és $\phi = \arg \overline{W}$ az átviteli együttható szöge a vizsgált körfrekvencián. A válaszjel tehát az alábbiak szerint számítható:

$$\boxed{\overline{Y} = \overline{W} \overline{S} = K e^{j\phi} S e^{j\rho} = K S e^{j(\phi+\rho)},} \quad (6.20)$$

⁸Két jelölési mód is van: a $\overline{W}$ azt jelzi, hogy ez egy komplex szám, a $W(j\omega)$ pedig azt is, hogy ez a $j\omega$ függvénye. Ezen két jelölés természetesen ekvivalens.

⁹Az átviteli karakterisztika méréssel úgy vehető fel, hogy egy adott amplitúdójú és adott fázisú szinuszosan változó gerjesztőjelet kapcsolunk a rendszer bemenetére, amelynek aztán változtatjuk a frekvenciáját és minden egyes frekvencián mérjük a kimeneti jel amplitúdóját és fázisát. Ez megtehető pl. egy kétcsatornás oszcilloszkóp segítségével. A mért adatokat pedig rögzítjük. Az átviteli karakterisztika ábrázolási lehetőségeivel később foglalkozunk.

és így a válaszjel időfüggvénye a következő:

$$\boxed{y(t) = \underbrace{KS}_Y \cos(\omega t + \underbrace{(\phi + \rho)}_\varphi) = Y \cos(\omega t + \varphi).} \quad (6.21)$$

Megadtuk tehát az átviteli karakterisztika definícióját és azt, hogy hogyan lehet alkalmazni a szinuszosan gerjesztett válasz számításában. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy miként határozhatjuk meg az átviteli karakterisztikát az állapotváltozós leírás, és a rendszeregyenlet ismeretében. Valamilyen kapcsolat nyilván kell legyen, hiszen mindhárom leírás ugyanazon rendszer más-más matematikai megfogalmazása.

Az átviteli karakterisztika meghatározása az állapotváltozós leírás alapján

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns és *gerjesztés-válasz stabilis* SISO-rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja a következő:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}s(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + Ds(t), \end{aligned} \quad (6.22)$$

ahol $\mathbf{x}(t)$ és $\dot{\mathbf{x}}(t)$ az *állapotvektor* és annak idő szerinti első deriváltja, $s(t)$ és $y(t)$ a rendszer szinuszos gerjesztése és válasza, $\mathbf{A}$ a *rendszer mátrix*, a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}^T$ vektorok, valamint a D skalár pedig a normálalakban szereplő megfelelő együtthatókat tartalmazza. Ha a rendszer nem gerjesztés-válasz stabilis, akkor ezen levezetés eredményeképp kapott átviteli karakterisztikával számított gerjesztett válasznak nincs fizikai tartalma (l. 58. oldal). Először SISO-rendszerekkel foglalkozunk, majd a kapott eredményt általánosítjuk.

Mivel a gerjesztés, és így a válasz is szinuszosan változik, átérthetünk a komplex leírási módra, azaz használjuk fel a komplex

csúcsérték fogalmát valamint a (6.13) összefüggést:

$$\begin{aligned} j\omega \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{b}\bar{S}, \\ \bar{Y} &= \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} + D\bar{S}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ezt megtehetjük, hiszen ha ezen egyenletekben szereplő összes komplex csúcsértéket szorozzuk $e^{j\omega t}$ -vel (komplex pillanatérték), majd ezeknek vesszük a valós részét, akkor pontosan az időtartománybeli analízisből ismert állapotváltozós leírást kapjuk.

Az első egyenletből $\bar{\mathbf{X}}$ kifejezhető:

$$j\omega \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{b}\bar{S} \quad \Rightarrow \quad (j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A}) \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{b}\bar{S},$$

azaz

$$\bar{\mathbf{X}} = (j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}\bar{S}, \quad (6.24)$$

ahol $\mathbf{E}$ az N -edrendű egységmátrix. A válaszjel komplex csúcsértékét megkapjuk, ha a kapott eredményt $\bar{Y}$ kifejezésébe visszahe-
lyettesítjük:

$$\bar{Y} = \left[\mathbf{c}^T (j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D \right] \bar{S}. \quad (6.25)$$

Utóbbiból az átviteli karakterisztika kifejezhető:

$$\boxed{\bar{W} = \frac{\bar{Y}}{\bar{S}} = \mathbf{c}^T (j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D,} \quad (6.26)$$

azaz egy komplex elemű mátrixot kell invertálni. Példa kapcsán látni fogjuk, hogy *az átviteli karakterisztika a $j\omega$ változó racionális függvénye valós együtthatókkal, vagyis az átviteli karakterisztika egy polinom per polinom alakú kifejezés.*

Mindez MIMO-rendszerekre a következőképp fejezhető ki:

$$\boxed{\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{C} (j\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D},} \quad (6.27)$$

ami az *átvitelikarakterisztika-mátrix*, melynek ij idnexű eleme megadja az i -edik kimenet és a j -edik bemenet között fennálló átviteli karakterisztikát úgy, hogy közben az összes többi bemeneten nincs jel:

$$\overline{W}_{ij} = \left. \frac{\overline{Y}_i}{\overline{S}_j} \right|_{\overline{S}_k=0, k \neq j}, \quad i = 1, \dots, N_y, j = 1, \dots, N_s. \quad (6.28)$$

Példa. Határozzuk meg az alábbi állapotváltozós leírás által megadott rendszer átviteli karakterisztikáját és adjuk meg a gerjesztett válasz időfüggvényét, ha $s(t) = 2 \cos(20t + \pi/3)$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} s(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Ezt a feladatot kétféleképp is megoldhatjuk. Az (a) pontban az itt bemutatott módszert követjük, a (b) pontban az állapotváltozós leírást mint egyenletrendszert kezeljük, és az $\overline{Y}/\overline{S}$ hányadost fejezzük ki belőle.

(a) A levezetés alapján írhatjuk, hogy

$$\overline{W} = \mathbf{c}^T (\mathbf{j}\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D.$$

Helyettesítsük be a megadott mátrixot és vektorokat:

$$\overline{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j}\omega & 3 \\ -1 & \mathbf{j}\omega + 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az inverz mátrixot. Egy N -edrendű kvadratikus mátrix inverze is N -edrendű kvadratikus mátrix. A mátrix inverzésének meghatározására szolgál a következő, lineáris algebrából ismert összefüggés:

$$(\mathbf{j}\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{j}\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})}{|\mathbf{j}\omega \mathbf{E} - \mathbf{A}|}, \quad (6.29)$$

ahol $\text{adj}(\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})$ a $\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}$ mátrix adjungált mátrixa és $|\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ a mátrix determinánsa. Az adjungált és a determináns meghatározásával már foglalkoztunk:

$$\text{adj}(\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{j}\omega + 4 & 1 \\ -3 & \mathbf{j}\omega \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{j}\omega + 4 & -3 \\ 1 & \mathbf{j}\omega \end{bmatrix},$$

$$|\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \mathbf{j}\omega(\mathbf{j}\omega + 4) + 3 = (\mathbf{j}\omega)^2 + 4\mathbf{j}\omega + 3.$$

A determináns tehát $\mathbf{j}\omega$ polinomja, és alakilag megegyezik a $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ determinánsból képzett polinommal, amely egy aszimptotikusan stabil (tehát gerjesztés-válasz stabil) rendszert ír le, ha minden sajátérték negatív valós részű (l. 59. oldalon), itt $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -3$. Az ezzel történő osztást hagyhatjuk a műveletsor végére a sok tört elkerülése érdekében, azaz az átviteli karakterisztika számlálóját a következőképp számítható:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j}\omega + 4 & -3 \\ 1 & \mathbf{j}\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j}\omega + 4 - 15 \\ 1 + \mathbf{j}\omega 5 \end{bmatrix} = 1 + \mathbf{j}\omega 5,$$

s így az átviteli karakterisztika a következő:

$$\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{5(\mathbf{j}\omega) + 1}{(\mathbf{j}\omega)^2 + 4(\mathbf{j}\omega) + 3}.$$

Térjünk most vissza a (6.29) összefüggésre és alakítsuk át ennek megfelelően a (6.26) egyenletet:

$$\overline{W} = \mathbf{c}^T (\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj}(\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})}{|\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}|} \mathbf{b} + D,$$

majd hozzunk közös nevezőre:

$$\boxed{\overline{W} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + |\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}| D}{|\mathbf{j}\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}|}.} \quad (6.30)$$

Jelen feladat megoldása során ezt az alakot használtuk. Először tehát meghatároztuk az adjungált mátrixot, segítségével pedig

az átviteli karakterisztika számlálóját, majd a determináns meghatározásával annak nevezőjét. A példában $D = 0$ volt. Természetesen akár (6.26), akár (6.30) alkalmazható.

Határozzuk meg ezután a gerjesztett választ:

$$\bar{Y} = \bar{W}|_{\omega=20} \bar{S},$$

ahol $\bar{S}$ a gerjesztés komplex csúcserőértéke: $\bar{S} = 2e^{j\pi/3}$, a $\bar{W}$ értékét pedig meg kell határozni a gerjesztés által megszabott $\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ körfrekvencián, ami az átviteli együttható:¹⁰

$$\bar{W}|_{\omega=20} = \frac{5(j20) + 1}{(j20)^2 + 4(j20) + 3} = \frac{1 + j100}{-397 + j80} = \frac{100e^{j\pi/2}}{404,98e^{j2,943}},$$

aminek értéke $0,247e^{-j1,372}$, és azt adja meg, hogy a válaszjel csúcserőértéke a gerjesztés csúcserőértékének $0,247$ -szerese, a válaszjel fázisa pedig a gerjesztés fázisához képest $1,372 \text{ rad}$ szöggel késik. Így a válaszjel komplex csúcserőértéke a következő:

$$\bar{Y} = \bar{W}|_{\omega=20} \bar{S} = 0,247e^{-j1,372} 2e^{j\pi/3} = 0,494e^{-j0,325},$$

ami az

$$y(t) = 0,494 \cos(20t - 0,325).$$

időfüggvénynek felel meg.¹¹

Ugyanazon rendszer különböző körfrekvenciájú jelekre adott válasza különböző. A bemenet és a kimenet közti kapcsolatot ebben az esetben tehát az átviteli karakterisztika biztosítja.

¹⁰Két komplex szám hányadosát az Euler-alak segítségével célszerű elvégezni, mert így az eredmény számunkra kedvező, hiszen az egy Euler-alak lesz, amivel a következő lépésben úgyis szorzást kell elvégezni. Ez természetesen elvégezhető úgy is, hogy a törtet beszorozzuk egy olyan törttel, amelynek számlálója is és nevezője is megegyezik ezen tört nevezőjének konjugáltjával.

¹¹Gyakorlásképp határozzuk meg a rendszer válaszát, ha a gerjesztés $s(t) = 2 \cos(0,2t + \pi/3)$. A válasz ekkor $y(t) = 0,922 \cos(0,2t + 1,568)$, az átviteli tényező pedig a következő: $\bar{W}|_{\omega=0,2} = 0,461e^{j0,521}$.

A példából érzékelhető, hogy ha a lineáris, invariáns rendszer gerjesztése szinuszos, akkor a komplex számítási mód sokkal egyszerűbb, mint a konvolúcióval történő számítás, vagy akár az állapotváltozós leírás megoldása az időtartományban.

(b) Ezen példán keresztül bemutatjuk, hogy az állapotváltozós leírással adott rendszer átviteli karakterisztikája nem csak a (6.26) vagy a (6.30) szerint határozható meg. A következőkben bemutatott módszer azonban egyenletrendszer megoldását igényli.

Az állapotváltozós leírás normálalakja időtartományban és komplex csúcserőértékek segítségével a következő:¹²

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -3x_2 + s, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 4x_2 + 5s \\ y &= x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j\omega \bar{X}_1 &= -3\bar{X}_2 + \bar{S}, \\ j\omega \bar{X}_2 &= \bar{X}_1 - 4\bar{X}_2 + 5\bar{S} \\ \bar{Y} &= \bar{X}_2. \end{cases}$$

Utóbbi egyenletrendszert mindig úgy kell alakítani, hogy abból az átviteli karakterisztika alakját kapjuk. A megoldás menete a következő. Fejezzük ki az első két egyenletből az ismeretlennek tekintett állapotváltozók komplex csúcserőértékét az ismertnek tekintett $\bar{S}$ gerjesztéssel, majd helyettesítsük vissza azokat (jelen esetben csak az $\bar{X}_2$ -t) az utolsó egyenletbe. Az állapotváltozókat tehát ki kell ejteni az egyenletekből. Ezáltal kapunk egy olyan egyenletet, amely csak az $\bar{Y}$ -t és az $\bar{S}$ -et tartalmazza. Jelen példánál maradva, fejezzük ki pl. az $\bar{X}_1$ változót az első egyenletből:

$$\bar{X}_1 = -\frac{3}{j\omega} \bar{X}_2 + \frac{1}{j\omega} \bar{S},$$

majd helyettesítsük vissza ezt a második egyenletbe:

$$j\omega \bar{X}_2 = -\frac{3}{j\omega} \bar{X}_2 + \frac{1}{j\omega} \bar{S} - 4\bar{X}_2 + 5\bar{S}.$$

¹²Egy integrátor bemenete tehát az állapotváltozó komplex csúcserőértéke $j\omega$ -val szorozva, kimenete pedig az állapotváltozó komplex csúcserőértéke.

Szorozzuk be ezen egyenletet $j\omega$ -val úgy, hogy a $j\omega$ tagokat polinomként kezeljük:

$$(j\omega)^2 \overline{X}_2 = -3\overline{X}_2 + \overline{S} - j\omega 4\overline{X}_2 + j\omega 5\overline{S}.$$

Rendezzük át ezen egyenletet úgy, hogy a bal oldalon csak $\overline{X}_2$, a jobb oldalon pedig csak $\overline{S}$ álljon, továbbá vegyük figyelembe azt, hogy ebben a példában $\overline{Y} = \overline{X}_2$:

$$(j\omega)^2 \overline{Y} + j\omega 4\overline{Y} + 3\overline{Y} = \overline{S} + j\omega 5\overline{S},$$

majd rendezzük a kapott eredményt a szokásos alakra:

$$\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{5(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}.$$

A (b) pontban közölt megoldás alacsony rendszám esetén nagyon egyszerű: egy egyenletrendszert kell a kívánt alakra hozni, amelyben a gerjesztés komplex csúcserértékét ismertnek tekintjük, s minden más változót ismeretlennek, de csak a válasz komplex csúcserértékére kell koncentrálnunk. Az (a) pontban közölt megoldás csak alacsony fokszám ($N \leq 3$) esetén végezhető el papíron, azonban számítástechnikailag fontos eredmény.

Az átviteli karakterisztika és a rendszeregyenlet kapcsolata. Röviden bemutatjuk, hogy a rendszer átviteli karakterisztikájából a rendszer rendszeregyenlete meghatározható, és fordítva. Az átviteli karakterisztika tehát egy polinom per polinom alakú kifejezés:

$$\boxed{\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^{n-i}}{(j\omega)^n + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^{n-i}}}, \quad (6.31)$$

Szorozzunk ezután keresztbe:

$$\overline{Y} \left((j\omega)^n + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^{n-i} \right) = \overline{S} \sum_{i=0}^n b_i (j\omega)^{n-i}.$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy a $j\omega$ tényezővel végzett szorzás a (6.13) és (6.14) összefüggések szerint az időtartományban idő szerinti deriválás felel meg, akkor írhatjuk, hogy

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i s^{(n-i)}(t),$$

ami pontosan a rendszeregyenlet. Ez a műveletsorozat természetesen visszafelé is elvégezhető, azaz az átviteli karakterisztika meghatározható a rendszeregynletből is. Figyeljük meg, hogy az átviteli karakterisztika nevezőjének polinomja alakilag pontosan a rendszeregynletből képezhető karakterisztikus polinom.

Az átviteli karakterisztika ábrázolása

Az átviteli karakterisztika tehát a $j\omega$ változó függvénye és azt adja meg, hogy a rendszer kimenetének amplitúdója és fázisa hogy változik meg a bemeneti szinuszos jel ugyanezen adataihoz képest adott ω körfrekvencián: $\bar{Y} = \bar{W} \bar{S}$. A $\bar{W}$ minden körfrekvencián más és más komplex értékű szám, tehát van amplitúdója és fázisa. Ezek ábrázolására terjedt el két módszer, két diagram: a *Nyquist-diagram* és a *Bode-diagram*. Mindkettő a $\bar{W}$ átviteli karakterisztika

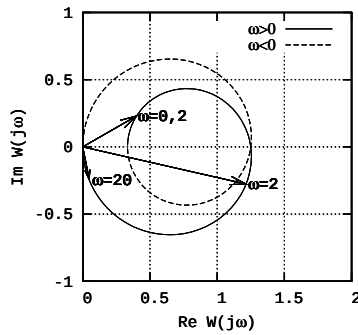
$$\boxed{\bar{W} = W(j\omega) = K(\omega)e^{j\phi(\omega)}} \quad (6.32)$$

alakjában található $K(\omega)$ un. *amplitúdó-karakterisztika*, és $\phi(\omega)$ un. *fázis-karakterisztika* ábrázolását realizálja eltérő módon.

Nyquist diagram. A Nyquist-diagram a $K(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ fázor végpontját ábrázolja a $-\infty < \omega < \infty$ intervallumban a *komplex számsíkon* és ezen pontokat köti össze, ahogy az a 6.5. ábrán látható.¹³ Ez tehát egy olyan görbe, amelyről leolvasható az

¹³A görbe az előzőekben meghatározott átviteli karakterisztikához tartozik (l. 154. oldal).

átviteli karakterisztika abszolút értéke és fázisa (vagy valós és képzetes része) egy-egy rögzített ω körfrekvencián. Az ábrán be-
rajzoltuk az $\omega = 0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ és $\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ körfrek-
venciákhoz tartozó fázorokat.¹⁴ Ábrázolásához ki kell számolni
az átviteli karakterisztika amplitúdóját és fázisát (vagy valós
és képzetes részét) néhány körfrekvencián, majd ezeket fel kell
mérni a komplex számsíkon, és ezen pontokat össze kell kötni. A
Nyquist-diagramot a negatív körfrekvenciákra is szokás ábrázolni,
azonban a diagram szimmetrikus a valós tengelyre. Érezhető, hogy
egy pontos Nyquist-diagram felvétele meglehetősen hosszadalmas
eljárás. Számítógéppel végezve a számításokat azonban pontos
görbét kaphatunk, de ekkor is nehéz lehet a leolvasás.¹⁵

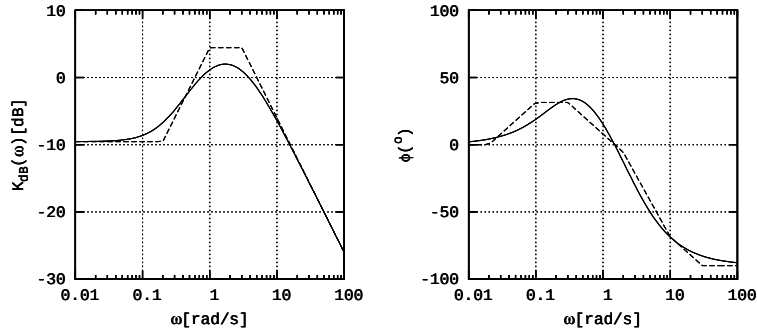


6.5. ábra. *Példa a Nyquist-diagramra*

Bode-diagram. A Bode-diagram külön koordináta-rendszer-
ben ábrázolja az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát, tehát két
függvényt kell ábrázolni. Ezek vízszintes tengelyén az ω körfrek-

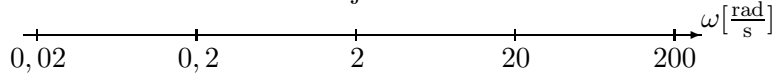
¹⁴Ezen pontok számolással ellenőrizhetők: ha $\omega = 0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, akkor $\overline{W} = 0,399 + j0,229$, ha $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, akkor $\overline{W} = 1,215 - j0,277$, ha $\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, akkor $\overline{W} = 0,046 - j0,243$. Így látható a fázor helyzetének alakulása és forgása is.

¹⁵Ezen tulajdonságok mellett azonban nem szabad azt gondolni, hogy ez az ábrázolási módszer nem hasznos, szabályozástechnikában pl. a Nyquist-diagramot stabilitási kritériumok ellenőrzésére lehet használni.



6.6. ábra. Példa az amplitúdó- és fáziskarakterisztikára, a Bode-diagram két elemére

vencia szerepel (szokták úgy is, hogy az abszcisszán az f frekvenciát mérik) logaritmikus léptékben, függőleges tengelyén pedig a $K(\omega)$ amplitúdókarakterisztika és a $\phi(\omega)$ fáziskarakterisztika (l. 6.6. ábra¹⁶). A logaritmikus lépték azért célszerű, hogy lehetőség szerint széles intervallumot tudjunk ábrázolni:



Látható, hogy a skálázás logaritmikusan történik, azaz két egymást követő osztás között az arány 10: $\omega_{i+1}/\omega_i = 10$. Egy ilyen távolság neve *dekád*.¹⁷ Lineáris skálán nem lehetne jól látható módon ilyen széles tartományt ábrázolni (ebben a példában a legkisebb és a legnagyobb körfrekvencia között 4 nagyságrend van). Egy dekádon belül egy adott körfrekvenciának megfelelő pont számítása a következőképp történik. Legyen egy dekád a papíron 40 mm és határozzuk meg pl. az $\omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ körfrekvenciának meg-

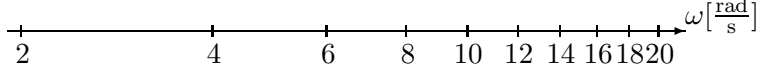
¹⁶A görbe az előzőekben meghatározott átviteli karakterisztikához tartozik (l. 154. oldal). A szaggatott vonallal berajzolt görbével pedig később foglalkozunk.

¹⁷Szokás ezt úgy is felvenni, hogy két egymást követő osztás között az arány 2, ekkor egy ilyen távolság neve *oktáv*. Mi a dekádot fogjuk használni.

felelő pontot:

$$40 \text{ mm} \lg \left(\frac{5}{2} \right) = 15,91 \text{ mm},$$

azaz az $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ponttól 15,91 mm-re lesz a keresett pont. Az $\omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ehhez hasonlóan az $\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ponttól lesz 15,91 mm-re és így tovább. A logaritmus argumentumában azért 2-vel osztottunk, mert az a keresett körfrekvencia intervallumának alsó határa.¹⁸ Elég tehát egy dekádon belül elvégezni a pontosabb felosztást. Ezen intervallum felosztása tehát a következőképp néz ki:



Fontos megjegyezni azonban azt, hogy a logaritmikus skálán nincs $\omega = 0$ és $\omega = \infty$ pont.

Az amplitúdókarakterisztika függőleges tengelyét hasonlóképp logaritmikusan célszerű felmérni azon egyszerű oknál fogva, hogy nagy értéktartományt tudjunk ábrázolni (ez az ún. *log-log diagram*). Itt az amplitúdókarakterisztika decibel egységben kifejezett értékét szokás felmérni:

$$\boxed{K_{\text{dB}} = K_{\text{dB}}(\omega) = 20 \lg K(\omega) \Rightarrow K(\omega) = 10^{0,05 K_{\text{dB}}}, \quad (6.33)}$$

aminek a mértékegysége tehát a dB (decibel).¹⁹ A fáziskarakterisztika esetében a függőleges tengelyen rad egységben, vagy fokban szokás felmérni a fáziskarakterisztika értékét. A dekád egységet D-vel fogjuk jelölni.

A Bode-diagram egyszerű esetekben kényelmesen szerkeszthető az ún. *normálalakok*, vagy *karakterisztikaelemek* segítségével. A következőkben ezeket foglaljuk össze.

¹⁸Pár pontra kapott eredmények: $\omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, 0 mm, ami egyértelmű, $\omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, 7,04 mm, $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, 27,96 mm, $\omega = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, 35 mm stb.

¹⁹Egy másik lehetőség a $K_{\text{Np}} = \ln K(\omega)$, amelynek mértékegysége az Np (neper). Mi az előbbi alkalmazzuk. A kettő között a következő kapcsolat van: 1Np = 8,686 dB, 1dB = 0,115 Np.

Tudjuk, hogy az átviteli karakterisztika egy polinom per polinom alakú kifejezés. Határozzuk meg először a számláló és a nevező gyöktényezős alakját, azaz számoljuk ki a polinomok zérushelyeit. Két eset lehetséges: a gyökök egy része valós, másik része (ha van ilyen) konjugált komplex párokat alkotnak. Ezután az átviteli karakterisztika mindig átalakítható a következő formára:

$$\overline{W} = A \left(\frac{\omega_0}{j\omega} \right)^r \frac{\prod_i \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_i} \right) \prod_k \left(1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2 \right)}{\prod_j \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_j} \right) \prod_l \left(1 + 2\xi_l \frac{j\omega}{\omega_l} + \left(\frac{j\omega}{\omega_l} \right)^2 \right)},$$

tehát vannak elsőfokú és másodfokú tényezők. A Bode-féle amplitúdó-karakterisztikában a $K(\omega)$ logaritmusát kell venni, azaz

$$\begin{aligned} \lg|\overline{W}| = \lg|A| + r \lg \left| \frac{\omega_0}{j\omega} \right| + \sum_i \lg \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_i} \right| - \sum_j \lg \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_j} \right| + \\ + \sum_k \lg \left| 1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2 \right| - \sum_l \lg \left| 1 + 2\xi_l \frac{j\omega}{\omega_l} + \left(\frac{j\omega}{\omega_l} \right)^2 \right|, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk azokat az azonosságokat, hogy szorzat logaritmus a tényezők logaritmusának összege és hányados logaritmus a tényezők logaritmusának különbsége. A kapott eredményt ezután még 20-szal még be kell szorozni.

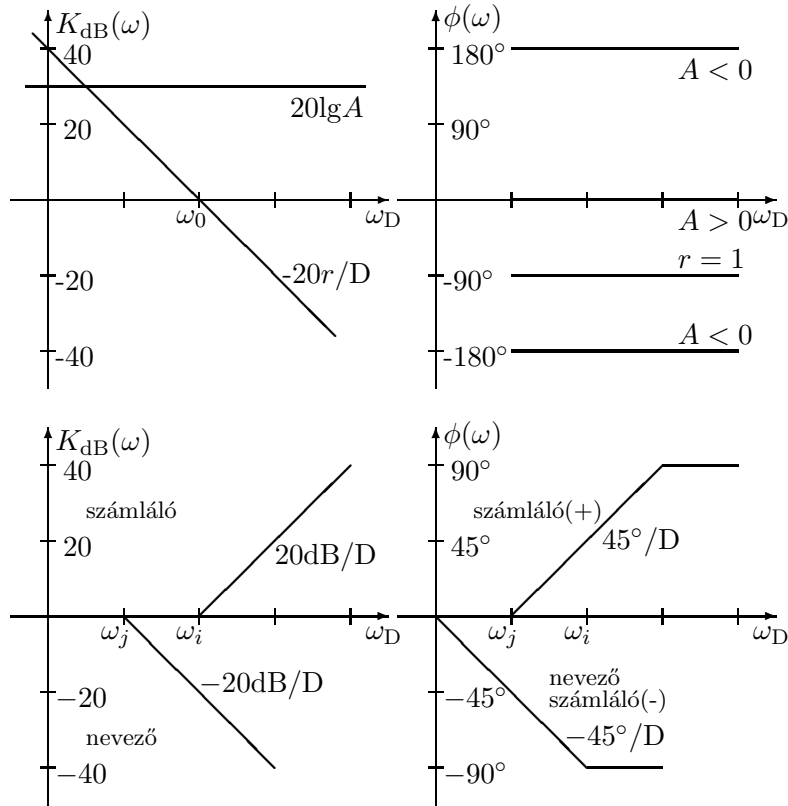
A Bode-féle fáziskarakterisztikában a $\phi(\omega)$ értékét kell meghatározni:

$$\begin{aligned} \arg \overline{W} = \arg\{A\} + r \arg \left\{ \frac{\omega_0}{j\omega} \right\} + \sum_i \arg \left\{ 1 + \frac{j\omega}{\omega_i} \right\} - \sum_j \arg \left\{ 1 + \frac{j\omega}{\omega_j} \right\} + \\ + \sum_k \arg \left\{ 1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k} \right)^2 \right\} - \sum_l \arg \left\{ 1 + 2\xi_l \frac{j\omega}{\omega_l} + \left(\frac{j\omega}{\omega_l} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

azaz a számlálóban szereplő elemek fázisainak összegéből ki kell vonni a nevezőben szereplő tényezők fázisainak összegét, ugyanúgy, ahogy azt két komplex szám osztásakor tesszük.

Ha ezután meghatározzuk az egyes tényezők amplitúdókarakterisztikáját és fáziskarakterisztikáját, akkor azokat csak előjelhelyesen össze kell adni, és így egy jó pontosságú közelítést kapunk.

Az *elsőfokú tényezőket* a következő ábrákon foglaljuk össze. A görbék tehát a következők (a vízszintes tengelyen minden esetben dekádban mérjük a körfrekvenciát, erre utal a D index, ha ez nem derül ki az ábrából):



Ezen karakterisztikaelemeket érdemes tehát megjegyezni,

segítségükkel ugyanis bonyolultabb átviteli karakterisztikák Bode-diagramja közelítőleg felvázolható. A karakterisztikaelemek tehát a következők.

1.) Az *állandó tényező* logaritmikus alakja a következő:

$$K_{dB}(\omega) = 20\lg|A|, \quad \phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \text{ha } A > 0; \\ \pm 180^\circ, & \text{ha } A < 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

Mindkét karakterisztika párhuzamos a vízszintes tengellyel és nem függenek a frekvenciától. Ha $|A| > 1$, akkor *erősítésről* beszélünk, és ekkor $K_{dB} > 0$, ha $|A| < 1$, akkor *csillapításról* beszélünk, és ekkor $K_{dB} < 0$. Már utaltunk arra, hogy egy negatív szám Euler-alakja a következő: $-A = Ae^{j\pi}$, ezért lesz ebben az esetben a fáziskarakterisztika $\pm 180^\circ$.

2.) Az $(\omega_0/j\omega)^r$ tényezőnek megfelelő amplitúdó-karakterisztika-elem és fáziskarakterisztika-elem a következőképp határozható meg. Ez az elem felírható az $(\omega_0/\omega)^r (1/j)^r$ alakban is, amelynek második tagja egységvektor, és csak a fázisforgatásért felelős, ugyanis $1/j = -j = e^{-j\pi/2}$, s így $(1/j)^r = (-j)^r = e^{-jr\pi/2}$, azaz

$$K_{dB}(\omega) = 20r \lg\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right), \quad \phi(\omega) = -r90^\circ, \quad (6.35)$$

azaz az $r \in \mathbb{Z}$ egész számtól függően $\mp 20\text{dB/D}$ meredekségű egyenest kapunk az amplitúdó-karakterisztikában, amely az $\omega = \omega_0$ pontban metszi az abszcisszát, mivel ekkor $\lg\frac{\omega_0}{\omega_0} = \lg 1 = 0$ (ha $r > 0$, akkor a meredekség negatív, ha $r < 0$, akkor a meredekség pozitív, hiszen ez a karakterisztikaelem fordítottan arányos az ω körfrekvenciával). A $\mp 20\text{dB/D}$ meredekség abból fakad, hogy míg az $\omega = \omega_0$ helyen az amplitúdó-karakterisztika értéke 0dB, addig az 1 dekáddal nagyobb frekvencián (az $\omega = 10\omega_0$ helyen) $20\lg 0,1 = -20\text{dB}$ lesz ($r = +1$). A fáziskarakterisztika pedig párhuzamos az ω tengellyel, értéke szintén r értékétől függ. Ez a tényező sok esetben nem szerepel.

Ha ennek reciproka, azaz $(j\omega/\omega_0)^r$ szerepel a számlálóban, akkor az előzőek vízszintes tengelyre vett tükörképe lesz mindkét

karakterisztikaelem. Ezt úgy lehet egyszerűen belátni, hogy figyelembe vesszük, hogy

$$\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^r = \left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^{-r},$$

és az r mindkét karakterisztikaelemben szorzóként szerepel, ami viszont előjelet vált.

3.) Az *elsőfokú tényező* szerepelhet akár a számlálóban, akár a nevezőben. Ha a nevezőben van, akkor mind az amplitúdókarakterisztika, mind a fáziskarakterisztika „lefelé” törik. Ez az egyszerű közelítés onnan származik, hogy alacsony frekvencián ($\omega \rightarrow 0$) az elsőfokú tényező abszolút értéke egyhez tart, melynek logaritmus 0, magas frekvenciákon ($\omega \rightarrow \infty$) pedig a tényező nevezője végtelenhez tart, s így a tört nullához közelít, amelynek logaritmus $-\infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_j)^2}} = 1, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_j)^2}} = 0.$$

A *törésponti körfrekvencián*, azaz az $\omega = \omega_j$ körfrekvencián az elsőfokú tényező $1/(1 + j)$, amelynek abszolút értéke $1/\sqrt{2}$, decibelben pedig $20\lg(1/\sqrt{2}) \simeq -3\text{dB}$. Ezt az értéket azonban nullának vesszük, s így ezen a körfrekvencián lesz a legnagyobb eltérés a közelítő karakterisztika és a valódi karakterisztika között. Ez a pont az un. *töréspont*, s ezért hívják ezt az ábrázolási módot *töréspontos karakterisztikának*. Ennél egy dekáddal nagyobb körfrekvencián az elsőfokú tényező $1/(1 + 10j) \simeq 1/(10j)$, amelynek abszolút értéke 0,1, decibelben kifejezve pedig pont -20dB . Ezért az $\omega > \omega_j$ körfrekvenciákon az egyenes meredeksége -20dB/D lesz. Még egy dekáddal magasabb körfrekvencián az elsőfokú tényező $1/(1 + 100j) \simeq 1/(100j)$, amelynek abszolút értéke 0,01, decibelben kifejezve pedig pont -40dB . A valódi értéktől való eltérés egyre kisebb lesz és a húzott egyenesek *aszimptotiku-*

san simulnak a valódi görbéhez.²⁰

A fáziskarakterisztika értéke a törésponti körfrekvencián az $1/(1+j)$ komplex számból kiindulva pontosan -45° , egy dekáddal magasabb körfrekvencian az $1/(1+10j) \simeq 1/(10j) = -j0,1$ közelítés miatt -90° , egy dekáddal kisebb körfrekvencián pedig az $1/(1+0,1j) \simeq 1$ közelítés miatt 0° lesz a közelítő fáziskarakterisztika értéke. Ebből fakad a $-45^\circ/D$ meredekség. A legnagyobb eltérés a valódi görbéhez képest a 0° -os és a -90° -os töréspontoknál van.²¹

Ha az elsőfokú tag a számlálóban szerepel, akkor az amplitúdókarakterisztika „felfelé” törik, szimmetrikusan az előbb elmondottakra. A fáziskarakterisztikát illetően két eset lehetséges. Ha negatív előjel szerepel a kifejezésben $(1 - \frac{j\omega}{\omega_i})$, akkor a fenti-ekben elmondottak érvényesek, ellenkező esetben pedig a fáziskarakterisztika is „felfelé” törik.

Megjegyezzük, hogy a számlálóban az előbb említett előjel lehet pozitív is, negatív is. A nevezőben a stabilitási kritérium teljesülése miatt azonban csak pozitív előjel szerepelhet (l. 59. oldal).

Példa. Vázoljuk fel a már kiszámolt átviteli karakterisztika Bode-diagramját.

Megoldás. Hozzuk az átviteli karakterisztikát a kívánt gyöktényező alakra. Számítsuk ki a nevező gyökeit (ha a számláló is legalább másodfokú, akkor természetesen azt is ilyen alakra kell hozni): $(j\omega)^2 + 4j\omega + 3 = 0$, ahonnan $(j\omega)_1 = -1$, és $(j\omega)_2 = -3$.

²⁰Például az $\frac{1}{1+10j}$ tört abszolút értéke $\frac{1}{\sqrt{1+10^2}} = 0,0995$, decibelben pedig $-20,043$ dB. Az $\frac{1}{1+100j}$ tört abszolút értéke $\frac{1}{\sqrt{1+100^2}} = 0,0099$, decibelben pedig $-40,000434$ dB.

²¹Például a $0,1\omega_j$ körfrekvencián a fáziskarakterisztika értéke $\arctg(\frac{0,1\omega}{\omega}) \simeq 5,7106^\circ$, s mi ezt a közelítés során nullának vesszük. A legnagyobb eltérés tehát kb. $5,71^\circ$. A 90° -os töréspontnál ez az érték természetesen ugyanennyi. Érdemes ezt is gyakorlásképp kiszámolni.

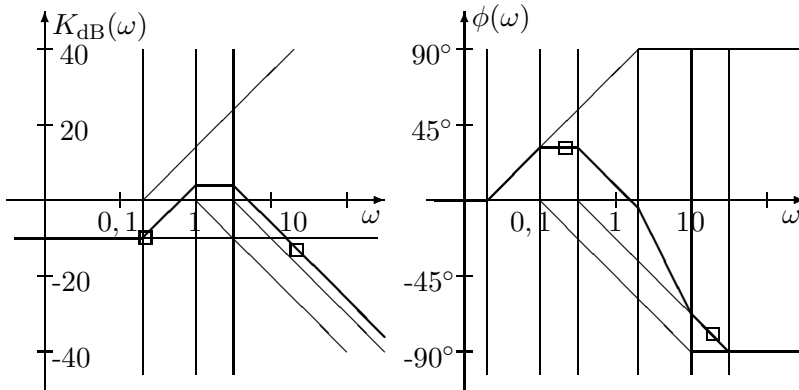
Ezen értékek *mindig negatívak* kell legyenek, különben a rendszer nem gerjesztés-válasz stabilis. Az átviteli karakterisztika így a következő alakban írható fel:

$$\overline{W} = \frac{5j\omega + 1}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}.$$

Mivel csak elsőfokú tényezők szerepelnek, ezért minden egyes elemnek $1 + \frac{j\omega}{\omega_i}$ alakúnak kell lenni, hiszen ezen alakokra léteznek egyszerű törtvonalas közelítő görbék. A számlálót át kell alakítani úgy, hogy $5 = 1/0,2$, a nevező első tagja rendben van, második tagjából azonban ki kell emelni 3-at, tehát

$$\overline{W} = \frac{1}{3} \frac{1 + \frac{j\omega}{0,2}}{(1 + \frac{j\omega}{1})(1 + \frac{j\omega}{3})}.$$

Ez a végleges alak, amelyben szerepel egy konstans tag és három elsőfokú alak. A Bode-diagram így már felvázolható a fenti ismeretek birtokában. Ez a következőképp néz ki (a pontos görbe és a törtvonalas görbe összehasonlítását l. a 6.6. ábrán, ahol a törtvonalas görbét szaggatott vonallal ábrázoltuk):



Az amplitúdókarakterisztikában a vízszintes vonal a $20\lg \frac{1}{3} = -9,542\text{dB}$ -nél van, mindhárom egyenes szakasz meredeksége azo-

nos: 20dB/D (a megfelelő előjellel). A fáziskarakterisztikában az egyes egyenes szakaszok meredeksége $\pm 45^\circ/\text{D}$. Miután megrajzoltuk az egyes alaptagoknak megfelelő karakterisztikákat, azokat össze kell adni. Ezt úgy célszerű megtenni, hogy az egyes töréspontoknál pl. függőleges vonalat húzunk és így látjuk azt, hogy mikor történik változás a karakterisztika menetében. Ezután adjuk össze két ilyen vonal között a meredekségeket és húzzunk egy ilyen meredekségű egyenest a következő bejelölt vonalig, azaz a következő töréspontig. Ezen függőleges egyeneseket az ábrán be is jelöltük.

Az ábrákon kis négyzettel bejelöltük a 155. oldalon kiszámolt átviteli együtthatók abszolút értékét és fázisát ($\bar{W}|_{\omega=0,2}$ és $\bar{W}|_{\omega=20}$). Ezek abszolút értéke decibel egységben a következő: $20\lg 0,461 = -6,726\text{dB}$ és $20\lg 0,247 = -12,146\text{dB}$. Olvassuk le ezek értékét a diagramról is. Előbbi pont az első töréspontnál található, értéke a már ismertetett $20\lg \frac{1}{3} = -9,542\text{dB}$, s a két érték között a maximális eltérés tapasztalható, ami kb. 3dB, a másik leolvasható érték azonban elég pontosan meghatározható a diagramból. Nézzük a radián egységben számított fázisok értékét: 0,521 és $-1,372$, amelyek rendre $29,851^\circ$ -nak és $-78,609^\circ$ -nak felelnek meg.

Az adatok kellő pontossággal leolvashatók a görbékről, ha azokat pl. milliméterpapíron szerkesztjük meg.

4.) A következőkben röviden tárgyaljuk a *másodfokú tényező*k ábrázolási módját, azaz a

$$W_l(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi_l \frac{j\omega}{\omega_l} + \left(\frac{j\omega}{\omega_l}\right)^2}$$

jellegű karakterisztikaelem amplitúdó-karakterisztikáját és fáziskarakterisztikáját. Ezt az alakot akkor alkalmazzuk, amikor a nevező (vagy $W_k(j\omega) = 1 + 2\xi_k \frac{j\omega}{\omega_k} + \left(\frac{j\omega}{\omega_k}\right)^2$ esetben a számláló) polinomjának gyökei konjugált komplex párt alkotnak, egyébként az

előbbieken elmondott elsőfokú karakterisztikaelemeket kell alkalmazni.

Alacsony frekvencián ($\omega \rightarrow 0$) ennek értéke egy valós szám, amely pontosan 1, decibel egységben pedig 0dB, és fázisa 0° . Az $\omega = \omega_l$ körfrekvencián a karakterisztika a következő alakot ölti:

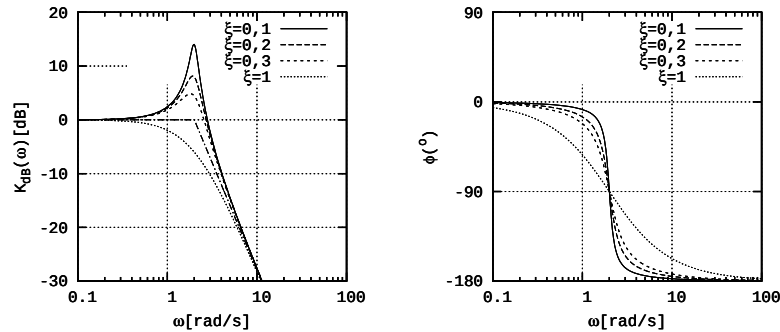
$$W_l(j\omega_l) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_l}{\omega_l}\right)^2 + j2\xi_l \frac{\omega_l}{\omega_l}} = \frac{1}{j2\xi_l},$$

amelynek abszolút értéke $1/(2\xi_l)$ és fázisa az $1/j$ tényező miatt pontosan -90° . Ezen körfrekvencia környezetében a diagram alakja függ a ξ_l értékétől. Egy dekáddal magasabb frekvencián, azaz az $\omega = 10\omega_l$ körfrekvencián azt kapjuk, hogy

$$W_l(j10\omega_l) = \frac{1}{-99 + j20\xi_l} \simeq \frac{1}{-100},$$

amelynek kb. -40dB -es csillapítás (az amplitúdókarakterisztika $\omega > \omega_l$ esetén -40dB/D meredekségű egyenessel közelíthető), és -180° -os fázis felel meg. Növelve a körfrekvenciát, aszimptotikusan ezen görbékhez simuló értékeket kapunk. A másodfokú karakterisztikaelem Bode-diagramja látható ξ_l különböző értékei mellett a 6.7. ábrán. Az amplitúdókarakterisztikába még berajzoltuk a 0dB -es egyenest és a -40dB/D meredekségű aszimptotát is, melyek az ω_l körfrekvencián metszik egymást.

Ha ezen tényező a számlálóban szerepel, akkor az amplitúdókarakterisztika az elmondottaknak pontosan a vízszintes tengelyre vett tükörképe, a fáziskarakterisztika $\xi_k > 0$ esetén az előbbiektől tükrözött, $\xi_k < 0$ esetén pedig az előbbiekkal megegyezően alakul.



6.7. ábra. A másodfokú karakterisztikaelem Bode-diagramja különböző ξ_l értékek mellett ($\omega_l = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$)

6.2. Periodikus állandósult válasz számítása

Ebben a részben általános periodikus jelekkel (pl. négyszögjel, fűrészfogjel, egyenirányított szinuszos jel stb.) és az ilyen típusú gerjesztésre adott válasz meghatározásával foglalkozunk. Építünk az előző részben megismert átviteli karakterisztika fogalmára, és a szinuszos gerjesztett válasz meghatározására. Az általános periodikus gerjesztésre adott válasz számítását ugyanis visszavezetjük a szinuszos gerjesztett válasz számítására. Tesszük ezt úgy, hogy az $s(t)$ periodikus gerjesztés időfüggvényét első lépésben szinuszos jelek összegére bontjuk, majd az átviteli karakterisztika segítségével minden egyes szinuszos összetevőre adott válasz meghatározása után a részválaszokat összegezzük, azaz szuperponáljuk. Ezt a rendszer *linearitása* miatt tehetjük meg.

Egy időben változó folytonos idejű $s(t)$ jel akkor periodikus a T periódusidővel, ha

$$\boxed{s(t + T) = s(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.} \quad (6.36)$$

Mint ismeretes a periódusidő reciproka a jel frekvenciája, $f =$

$1/T$, körfrekvenciája pedig az $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ mennyiség. Általános periodikus jelek esetében ezeket a mennyiségeket *alapfrekvenciának* és *alap-körfrekvenciának* nevezzük.

6.2.1. Folytonos idejű periodikus jel Fourier-felbontása

Első lépésben tehát bontsuk fel a periodikus jelet szinuszos jelek összegére. Ez az ún. *Fourier-felbontás*, ami azt mondja ki, hogy *tetszőleges periodikus jel előállítható olyan szinuszos jelek szuperpozíciójaként, amelyek körfrekvenciája a közelítendő periodikus jel körfrekvenciájának egész számú többszöröse.*

Már az elején megjegyezzük, hogy folytonos idejű jelek esetében a Fourier-felbontás egy közelítése az eredeti periodikus jelnek, és ezt a közelítést a következőképp fogjuk jelölni:²²

$$s(t) \simeq s_n(t), \quad (6.37)$$

ahol $s(t)$ a felbontandó periodikus jel, $s_n(t)$ pedig a jel Fourier-soros közelítése véges tagszámmal:

$$s(t) \simeq s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n [S_k^A \cos k\omega t + S_k^B \sin k\omega t], \quad (6.38)$$

amely egy *n-edrendű trigonometrikus közelítés*. Ez a Fourier-összeg egyik *valós alakja*.²³ A közelítésben az S_0 , az S_k^A és az S_k^B egyelőre ismeretlen konstansok, melyek meghatározásával foglalkozunk a következőkben.

²²Függvények közelítését függvények approximációjának is nevezzük, amelyre nagyon sok megoldás és lehetőség létezik. A Fourier-sor egy lehetséges, jelen esetben nagyon jól alkalmazható eljárás.

²³Ha $n \rightarrow \infty$, akkor beszélünk Fourier-sorról. A gyakorlatban végtelen tagból álló összeget nem tudunk meghatározni, ezért írunk Fourier-összeget, vagy véges tagszámú Fourier-sort a Fourier-sor kifejezés helyett.

Egy közelítést mindig valamilyen hibakritérium szerint kell elvégezni. Ha az $s(t)$ jelet a (6.38) kifejezéssel közelítjük, akkor a

$$H_n = H_n(S_0, S_k^A, S_k^B) = \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) - s_n(t)]^2 dt \quad (6.39)$$

összefüggés által definiált un. négyzetes (kvadratus) középhiba akkor lesz minimális, ha az ismeretlen S_0 , S_k^A és S_k^B együtthatókat az adott $s(t)$ jel (függvény) un. Fourier-együtthatóiként határozzuk meg.²⁴ Az ok, amiért ezen kritériumot választjuk az, hogy ebben az esetben az együtthatók meghatározására n értékétől független formula adható:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt, \\ S_k^A &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos k\omega t dt, \\ S_k^B &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin k\omega t dt. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Az S_0 értékét *egyszerű középértéknek*, az S_k^A és S_k^B együtthatókat pedig *Fourier-együtthatóknak* nevezzük.

Ennek igazolására helyettesítsük a (6.39) hibafüggvényben $s_n(t)$ helyébe a (6.38) közelítést:

$$H_n = \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ s(t) - S_0 - \sum_{k=1}^n [S_k^A \cos k\omega t + S_k^B \sin k\omega t] \right\}^2 dt.$$

²⁴Ha $n \rightarrow \infty$, akkor ezen négyzetes hiba nullához tart akkor, ha az $s(t)$ jel korlátos ($|s(t)| < \infty$) és a $t \in [0, T]$ intervallumon legalább szakaszonként folytonos. Erre azt is mondják, hogy a Fourier-sor középértékben tart az adott függvényhez. Ha az $s(t)$ jel folytonos, akkor az $s_n(t)$ közelítés pontonként is konvergál az $s(t)$ jelhez.

Egy hibafüggvénynek ott van szélsőértéke (most a minimumot keressük), ahol a kérdéses paraméterek szerinti parciális deriváltak valamennyien eltűnnek. Ezen szélsőérték-keresés céljából képezzük a kapott $H_n = H_n(S_0, S_k^A, S_k^B)$ hiba parciális deriváltjait az egyes paraméterek szerint:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_n}{\partial S_0} &= \frac{2}{T} \int_0^T \left\{ S_0 + \sum_{k=1}^n [S_k^A \cos k\omega t + S_k^B \sin k\omega t] - s(t) \right\} dt, \\ \frac{\partial H_n}{\partial S_p^A} &= \frac{2}{T} \int_0^T \left\{ S_0 + \sum_{k=1}^n [S_k^A \cos k\omega t + S_k^B \sin k\omega t] - s(t) \right\} \cos p\omega t dt, \\ \frac{\partial H_n}{\partial S_p^B} &= \frac{2}{T} \int_0^T \left\{ S_0 + \sum_{k=1}^n [S_k^A \cos k\omega t + S_k^B \sin k\omega t] - s(t) \right\} \sin p\omega t dt.\end{aligned}$$

Abban az esetben, ha ezen parciális deriváltak az (S_0, S_k^A, S_k^B) konfigurációban mind nullát adnak, akkor azon a helyen a H_n hibának szélsőértéke van (szükséges feltétel). Itt $p = 1, \dots, n$, azaz $2n + 1$ számú egyenletet kapunk és pontosan $2n + 1$ számú ismeretlen van, ugyanis S_0 , S_k^A és S_k^B ($k = 1, \dots, n$) az ismeretlen együtthatók. Az első egyenletből S_0 , a másodikból S_k^A , a harmadikból pedig S_k^B határozható meg.

Bontsuk fel tehát a $\partial H_n / \partial S_0 = 0$ egyenletben szereplő integrált. Mivel a parciális deriváltat egyenlővé tesszük nullával, a $2/T$ tényező elhagyható, a konstans paraméterek pedig kiemelhetők az integrál elé:

$$S_0 \int_0^T dt + \sum_{k=1}^n \left(S_k^A \int_0^T \cos k\omega t dt + S_k^B \int_0^T \sin k\omega t dt \right) - \int_0^T s(t) dt = 0.$$

A szummában szereplő két integrál értéke nulla és az első integrál értéke T , ahonnan S_0 értéke közvetlenül adódik:

$$T S_0 - \int_0^T s(t) dt = 0 \quad \Rightarrow \quad S_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt.$$

A $\partial H_n / \partial S_k^A = 0$ egyenlet esetében hasonlóan járunk el. Bont-

suk fel a benne szereplő integrált:

$$S_0 \int_0^T \cos p\omega t \, dt + \sum_{k=1}^n \left(S_k^A \int_0^T \cos k\omega t \cos p\omega t \, dt + S_k^B \int_0^T \sin k\omega t \cos p\omega t \, dt \right) - \int_0^T s(t) \cos p\omega t \, dt = 0.$$

Ebben az egyenletben az első integrál értéke nulla. A harmadik integrál értéke szintén nulla.²⁵ A második integrál értéke csak $p \neq k$ esetén nulla, egyébként $T/2$, ami miatt a szumma csak a $p = k$ tagra egyszerűsödik.²⁶ Ennek megfelelően:

$$\frac{T}{2} S_k^A - \int_0^T s(t) \cos k\omega t \, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad S_k^A = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos k\omega t \, dt.$$

A $\partial H_n / \partial S_k^B = 0$ egyenletben szereplő integrálok felbontása a következőt eredményezi:

$$S_0 \int_0^T \sin p\omega t \, dt + \sum_{k=1}^n \left(S_k^A \int_0^T \cos k\omega t \sin p\omega t \, dt + S_k^B \int_0^T \sin k\omega t \sin p\omega t \, dt \right) - \int_0^T s(t) \sin p\omega t \, dt = 0.$$

Ebben az egyenletben az első integrál értéke szintén nulla, a második integrál értéke az előzőek alapján lesz nulla. A harmadik

²⁵A $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$ azonosság alapján $\sin k\omega t \cos p\omega t = \frac{1}{2} [\sin(k - p)\omega t + \sin(k + p)\omega t]$, amelynek integrálja az adott intervallumon mindig nullát ad, hiszen szinuszos függvény integrálja egy periódusra nullát ad eredményül.

²⁶A $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ azonosság alapján $\cos k\omega t \cos p\omega t = \frac{1}{2} [\cos(k - p)\omega t + \cos(k + p)\omega t]$, amelynek integrálja az adott intervallumon $p \neq k$ esetén az előbbi lábjegyzetben leírtakhoz hasonlóan nullát ad. Ha $p = k$, akkor $\cos^2 k\omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2k\omega t$, melynek egy periódusra vett integrálja pontosan $\frac{T}{2}$.

integrál értéke csak $p \neq k$ esetén nulla, egyébként $T/2$.²⁷ Ennek megfelelően:

$$\frac{T}{2}S_k^B - \int_0^T s(t) \sin k\omega t \, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad S_k^B = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin k\omega t \, dt.$$

A levezetés során kihasználtuk (és lábjegyzetben röviden igazoltuk is) a trigonometrikus függvények ún. *ortogonalitását*. Két vektor akkor ortogonális, ha skaláris szorzatuk nullát ad eredményül. Az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények által alkotott térben a skaláris szorzat az $f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x) \, dx$ integrált jelenti. Ebben az esetben mindez a következőkre vezet:

$$\boxed{\int_0^T \sin k\omega t \cos p\omega t \, dt = 0, \quad \int_0^T \cos k\omega t \sin p\omega t \, dt = 0,} \quad (6.41)$$

továbbá $p \neq k$ esetén

$$\boxed{\int_0^T \sin k\omega t \sin p\omega t \, dt = 0, \quad \int_0^T \cos k\omega t \cos p\omega t \, dt = 0.} \quad (6.42)$$

Ezen két összefüggés eredményezte tehát azt, hogy a $k = 1, \dots, n$ szerinti összegzés egyetlen tagra redukálódott. Ezzel a kiindulásként szolgáló (6.40) összefüggéseket igazoltuk.

A Fourier-összeg egy másik *valós alakja* a következő:

$$\boxed{s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n S_k \cos(k\omega t + \rho_k).} \quad (6.43)$$

²⁷A $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$ azonosság alapján $\sin k\omega t \sin p\omega t = \frac{1}{2} [\cos(k - p)\omega t - \cos(k + p)\omega t]$, amelynek integrálja az adott intervallumon $p \neq k$ esetén nullát ad. Ha $p = k$, akkor $\sin^2 k\omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2k\omega t$, melynek egy periódusra vett integrálja pontosan $\frac{T}{2}$.

Erre a felírásra a következő elnevezések használatosak: S_0 az $s(t)$ jel *egyszerű középértéke*, vagy a Fourier-összeg *állandó tagja* (egyenáramú, vagy DC komponensnek is nevezik), a $k = 1$ sorszámú tag az *alapharmonikus*, a $k > 1$ (2ω , 3ω stb. körfrekvenciájú) összetevők pedig a *felharmonikusok*.

A két valós alak közötti kapcsolat a következő:²⁸

$$\boxed{S_k = \sqrt{(S_k^A)^2 + (S_k^B)^2}, \quad \rho_k = -\arctan \frac{S_k^B}{S_k^A}}, \quad (6.44)$$

és²⁹

$$\boxed{S_k^A = S_k \cos \rho_k, \quad S_k^B = -S_k \sin \rho_k}. \quad (6.45)$$

A Fourier-összegnek létezik egy *komplex alakja* is, ami a (6.38) valós alakból vezethető le a (6.40) összefüggések felhasználásával. Induljunk tehát ki a Fourier-összeg valós alakjából:

$$s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n [S_k^A \cos k\omega t + S_k^B \sin k\omega t],$$

és használjuk fel a következő Euler-formulákat:³⁰

$$\boxed{\cos k\omega t = \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2}, \quad \sin k\omega t = \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j}},$$

²⁸Az $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \arctan\{B/A\})$ összefüggés alapján. Mintha az $A - jB$ komplex számot átírnánk Euler-alakra (a szögre ügyeljünk).

²⁹A $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ azonosság alapján írhatjuk, hogy $S_k \cos(k\omega t + \rho_k) = S_k \cos k\omega t \cos \rho_k - S_k \sin k\omega t \sin \rho_k$, ahonnan a fenti eredmények következnek.

³⁰Az Euler-ralációt ismerjük: $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$, így:
 $\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \frac{\cos \varphi + j \sin \varphi + \cos \varphi - j \sin \varphi}{2} = \cos \varphi$, valamint
 $\frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = \frac{\cos \varphi + j \sin \varphi - \cos \varphi + j \sin \varphi}{2j} = \sin \varphi$.

s így írhatjuk, hogy

$$s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n \left[S_k^A \frac{e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}}{2} + S_k^B \frac{e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}}{2j} \right].$$

Bontsuk fel ezután a törteket:

$$s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2} S_k^A e^{jk\omega t} + \frac{1}{2} S_k^A e^{-jk\omega t} - \frac{1}{2} j S_k^B e^{jk\omega t} + \frac{1}{2} j S_k^B e^{-jk\omega t} \right],$$

majd vonjuk össze az $e^{jk\omega t}$ és az $e^{-jk\omega t}$ együtthatóit:

$$s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n \left[\frac{S_k^A - j S_k^B}{2} e^{jk\omega t} + \frac{S_k^A + j S_k^B}{2} e^{-jk\omega t} \right],$$

majd vezessük be a következő komplex együtthatókat:

$$\boxed{\overline{S}_k^C = \frac{S_k^A - j S_k^B}{2}, \quad \left(\overline{S}_k^C\right)^* = \frac{S_k^A + j S_k^B}{2}}, \quad (6.46)$$

azaz

$$s_n(t) = S_0 + \sum_{k=1}^n \left[\overline{S}_k^C e^{jk\omega t} + \left(\overline{S}_k^C\right)^* e^{-jk\omega t} \right]. \quad (6.47)$$

Esetünkben az $s(t)$ jel mindig valós függvény, amelyre igaz, hogy

$$\boxed{\overline{S}_{-k}^C = \left(\overline{S}_k^C\right)^*}. \quad (6.48)$$

Ebből következik, hogy S_0 egy valós szám.³¹ Ezen összefüggés felhasználásával a (6.47) összefüggéssel ekvivalens, de egyszerűbb alakra jutunk, ami a *komplex Fourier-összeg* alakja:

$$\boxed{s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \overline{S}_k^C e^{jk\omega t}}. \quad (6.49)$$

³¹Ha egy komplex szám és konjugáltja megegyezik, akkor az biztosan valós: $a + jb = a - jb$ csak $b = 0$ esetén lehetséges.

Hogy ezt belássuk, írjuk ki az összeget részletesen:

$$s_n(t) = \overline{S}_{-n}^C e^{-jn\omega t} + \dots + \overline{S}_{-1}^C e^{-j\omega t} + S_0 + \overline{S}_1^C e^{j\omega t} + \dots + \overline{S}_n^C e^{jn\omega t},$$

majd használjuk fel a (6.48) összefüggést:

$$s_n(t) = (\overline{S}_n^C)^* e^{-jn\omega t} + \dots + (\overline{S}_1^C)^* e^{-j\omega t} + S_0 + \overline{S}_1^C e^{j\omega t} + \dots + \overline{S}_n^C e^{jn\omega t},$$

ami pontosan a (6.47) formula.

Hátravan még a (6.49) szummában szereplő $\overline{S}_k^C$ komplex Fourier-együtthatók meghatározása. Felhasználjuk a komplex együttható (6.46) definícióját és a (6.40) összefüggéseket (az integrálban szereplő 2-es szorzóval rögtön egyszerűsíthetünk):

$$\begin{aligned} \overline{S}_k^C &= \frac{S_k^A - jS_k^B}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cos k\omega t \, dt - j \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \sin k\omega t \, dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) [\cos k\omega t - j \sin k\omega t] \, dt, \end{aligned}$$

és alkalmazzuk az integranduszban szereplő komplex kifejezésre az Euler-relációt. Így kapjuk a komplex Fourier-együttható formuláját:

$$\boxed{\overline{S}_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jk\omega t} \, dt,} \quad (6.50)$$

amely összefüggés $k > 0$ esetén érvényes, az S_0 együttható meghatározására ugyanúgy történik, mint a valós alak esetén (l. (6.40) S_0 -ra vonatkozó integrál).

Ha megvizsgáljuk ezt az összefüggést, észrevehetjük, hogy a (6.48) feltételezés valós időfüggvény esetén valóban helytálló volt, hiszen

$$\overline{S}_{-k}^C = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{jk\omega t} \, dt = \left(\frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jk\omega t} \, dt \right)^* = (\overline{S}_k^C)^*,$$

ami tehát megegyezik a komplex együttható konjugáltjával.

Ha összevetjük a (6.40) és a (6.50) összefüggéseket, azt vesszük észre, hogy utóbbi egyszerűbb, hiszen egyetlen integrált kell meghatározni a Fourier-összeg felírásához. Célszerű lehet tehát ezt alkalmazni a számítások során. A következő feltételezések mellett a valós alak is előnyösen alkalmazható:

- ha a jel *páros*, akkor a valós alakú összegben $S_k^B \equiv 0$ (csak koszinuszos tagokból áll³²), a komplex alakú összeg pedig valós értékű,
- ha a jel *páratlan*, akkor a valós alakú összegben $S_k^A \equiv 0$ (csak szinuszos tagokból áll³³), a komplex alakú összeg pedig képzetes értékű.

Ezen összefüggések a (6.40) összefüggésekből következnek. Ugyanis, ha a jel páros, akkor

$$\begin{aligned} S_k^B &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \sin k\omega t \, dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 s(t) \sin k\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \sin k\omega t \, dt = \\ &= -\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(-t) \sin k\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \sin k\omega t \, dt = 0. \end{aligned}$$

Ebben az esetben az $s(t)$ jel szimmetrikus az ordinátára, azaz $s(-t) = s(t)$, de ugyanakkor $\sin(-k\omega t) = -\sin(k\omega t)$, aminek következtében a két integrál egymást kiejti.

Ha a jel páratlan, akkor $s(-t) = -s(t)$, az S_k^A kifejezésében szereplő $\cos k\omega t$ viszont páros, így az előzőekhez hasonlóan

³²Ezt úgy könnyű megjegyezni, hogy a koszinuszos jel is páros.

³³Ezt úgy könnyű megjegyezni, hogy a szinuszos jel is páratlan.

felírható két integrál egymást kiejt:

$$\begin{aligned}
S_k^A &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cos k\omega t \, dt = \\
&= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 s(t) \cos k\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cos k\omega t \, dt = \\
&= -\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cos k\omega t \, dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} s(t) \cos k\omega t \, dt = 0.
\end{aligned}$$

Jegyezzük meg azt, hogy a valós Fourier-összeg együtt-
hatóinak számítása során az integrál 2-vel be van szorozva, a
komplex Fourier-együttható formulája pedig nincs.

Abban az esetben, ha a komplex Fourier-együtthatókat ha-
tározzuk meg és a valós Fourier-összeget akarjuk megkapni, ak-
kor a komplex Fourier-együtthatókból ki kell számolni a valós
Fourier-összeg együtthatóit. Ezeket a (6.46) átrendezéséből kap-
hatjuk meg:

$$\boxed{S_k^A = 2 \operatorname{Re} \left\{ \overline{S}_k^C \right\}, \quad S_k^B = -2 \operatorname{Im} \left\{ \overline{S}_k^C \right\}.} \quad (6.51)$$

Ezek segítségével a másik valós alak is meghatározható (6.44)
szerint.

A számítás menetét és az eredmények ábrázolási lehetőségét
lentebb példák illusztráljuk.

A Fourier-összeg segítségével egyszerűen meghatározható a
periodikus jel *teljesítménye*, másnéven *négyzetes középértéke*, a-
melynek definíciója és Fourier-összeggel meghatározva a követ-
kező:

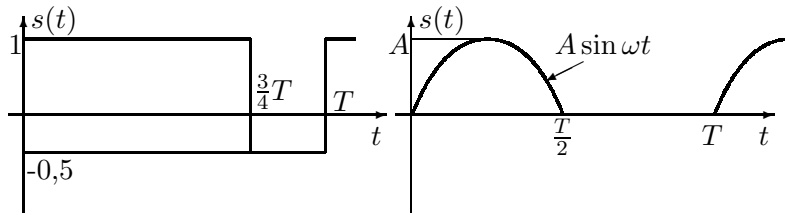
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) \, dt \simeq \frac{1}{T} \int_0^T \left(S_0 + \sum_{k=1}^n S_k \cos(k\omega t + \rho_k) \right)^2 \, dt. \quad (6.52)$$

Ha a zárójelet az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ azonosságnak megfelelően felbontjuk, akkor a következő összefüggéshez jutunk:

$$P = S_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k^2. \quad (6.53)$$

Fontos megjegyezni, hogy az így számított teljesítmény n növelésével alulról konvergál a pontos értékhez.

Példa. Jelek Fourier-összegének meghatározására kövessük végig a következő feladatot. Legyen a két Fourier-összeggel közelítendő jel az alábbi:



1. Példa megoldása. A feladat megoldása során a valós Fourier-összeg együtthatóit számítjuk ki. Induljunk ki a (6.40) definíciós összefüggésekből és kezeljük a T periódusidőt paraméterként. Az S_0 együttható a következőképp határozható meg:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{3}{4}T} dt - 0,5 \int_{\frac{3}{4}T}^T dt \right) = \\ &= \frac{1}{T} \left([t]_0^{\frac{3}{4}T} - 0,5 [t]_{\frac{3}{4}T}^T \right) = \frac{1}{T} \left(\frac{3}{4}T - 0,5 \frac{1}{4}T \right) = 0,625. \end{aligned}$$

A periódusidő mindig ki kell essen a levezetés során, hiszen attól, hogy mekkora a jel periódusideje nem függhet az együttható

értéke. Az S_0 a jel egyszerű középértéke, amely mindig egy konstans szám kell legyen.

Az S_k^A együttható kifejezése szintén a definícióból kiindulva határozható meg:³⁴

$$\begin{aligned} S_k^A &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{3}{4}T} \cos k\omega t \, dt - 0,5 \int_{\frac{3}{4}T}^T \cos k\omega t \, dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \left(\left[\frac{\sin k\omega t}{k\omega} \right]_0^{\frac{3}{4}T} - 0,5 \left[\frac{\sin k\omega t}{k\omega} \right]_{\frac{3}{4}T}^T \right). \end{aligned}$$

Emeljük ki a nevezőkből a $k\omega$ tagot, és vegyük figyelembe, hogy $\omega = \frac{2\pi}{T}$, így írhatjuk, hogy

$$S_k^A = \frac{2T}{Tk2\pi} \left[\sin \left(k \frac{2\pi}{T} \frac{3}{4}T \right) - 0 - 0,5 \sin \left(k \frac{2\pi}{T} T \right) + 0,5 \sin \left(k \frac{2\pi}{T} \frac{3}{4}T \right) \right].$$

Látható, hogy a periódusidő minden helyen kiesik. Az egyszerűsítések után vonjunk össze³⁵, s megkapjuk a végeredményt:

$$S_k^A = \frac{1,5}{k\pi} \sin \left(k \frac{3}{2}\pi \right), \quad \text{ha } k > 0.$$

Az S_k^B együttható kifejezése hasonlóképp kapható meg:³⁶

$$\begin{aligned} S_k^B &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{3}{4}T} \sin k\omega t \, dt - 0,5 \int_{\frac{3}{4}T}^T \sin k\omega t \, dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \left(\left[-\frac{\cos k\omega t}{k\omega} \right]_0^{\frac{3}{4}T} - 0,5 \left[-\frac{\cos k\omega t}{k\omega} \right]_{\frac{3}{4}T}^T \right). \end{aligned}$$

Emeljük ki a nevezőkből a $k\omega$ tagot, és vegyük figyelembe, hogy $\omega = \frac{2\pi}{T}$, így írhatjuk, hogy

$$S_k^B = \frac{2T}{Tk2\pi} \left[-\cos \left(k \frac{2\pi}{T} \frac{3}{4}T \right) + 1 + 0,5 \cos \left(k \frac{2\pi}{T} T \right) - 0,5 \cos \left(k \frac{2\pi}{T} \frac{3}{4}T \right) \right].$$

³⁴A $\cos k\omega t$ függvény primitív függvény $\frac{\sin k\omega t}{k\omega}$.

³⁵Vegyük figyelembe, hogy $\sin k2\pi = 0$.

³⁶A $\sin k\omega t$ függvény primitív függvénye: $-\frac{\cos k\omega t}{k\omega}$.

A periódusidő ismét kiesik. Az egyszerűsítések után³⁷ kapjuk az együttható kifejezését:

$$S_k^B = \frac{1,5}{k\pi} \left[1 - \cos \left(k \frac{3}{2} \pi \right) \right], \quad \text{ha } k > 0.$$

Fontos megjegyezni, hogy az együtthatók csak k értékétől függenek, továbbá, hogy a k (vagy annak hatványa) mindig a nevezőben szerepel. Ez azt jelenti, hogy k növekedésével egyre kisebb amplitúdójú szinuszos és koszinuszos jelek egyre nagyobb frekvenciával, azaz egyre finomabb módosításokkal járulnak hozzá a közelítéshez.

A közelítés tehát a következő összefüggés szerint lehetséges:

$$s(t) \simeq \underbrace{0,625}_{S_0} + \sum_{k=1}^n \left\{ \underbrace{\frac{1,5}{k\pi} \sin \left(k \frac{3}{2} \pi \right)}_{S_k^A} \cos k\omega t + \underbrace{\frac{1,5}{k\pi} \left[1 - \cos \left(k \frac{3}{2} \pi \right) \right]}_{S_k^B} \sin k\omega t \right\}.$$

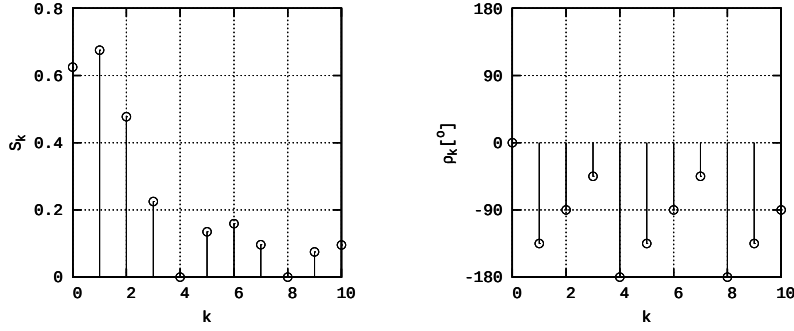
A valós Fourier-együtthatók két alakját a következő táblázatban foglaljuk össze $k = 0, 1, 2, 3$ esetekre (ezt a következő szakaszban felhasználjuk³⁸):

k	S_k^A	S_k^B	S_k	ρ_k
0	0,625	0	0,625	0°
1	-0,478	0,478	0,676	-135°
2	0	0,478	0,478	-90°
3	0,159	0,159	0,225	-45°

A jel Fourier-együtthatóit un. *vonalas spektrummal* szokás ábrázolni, amelynek vízszintes tengelyén a körfrekvencia szerepel, de csak adott diszkrét értékeken $\omega_k = k\omega$, ahol ω az alapharmonikus körfrekvenciája, függőleges tengelyén pedig az adott harmonikus komponens csúcserőértéke és fázisa szerepel (6.8. ábra).

³⁷Vegyük figyelembe, hogy $\cos k2\pi = 1$.

³⁸A táblázatbeli értékeket gyakorlásképp érdemes lehet ellenőrizni.



6.8. ábra. *A jel vonalas spektruma*

A Fourier-összeggel közelített jel és az eredeti jel összehasonlítása látható a 6.10. ábrán. Az ábra elemzését a következő példa utánra halasztjuk.

2. Példa megoldása. A feladat megoldása során a komplex Fourier-összeg együtthatóit számítjuk ki. Az előző példában az $s(t)$ időfüggvénye egy-egy intervallumban konstans volt, ebben a feladatban azonban az $s(t)$ változik az intervallumon belül, ezért a levezetés kissé hosszadalmasabb. A végeredményeket $A = 2$ értékkel számítjuk.

Az S_0 egyszerű középérték meghatározása ugyanúgy történik, mint az előző esetben. Az integrálás felső határát $\frac{T}{2}$ -nek választjuk, mert a periódus második felében a jel nulla értékű, és az A konstans kiemeljük az integráljel elé:

$$S_0 = \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t \, dt = \frac{A}{T} \left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{AT}{T2\pi} \left[-\cos \left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \right) + 1 \right] = \frac{A}{\pi}.$$

Az $\overline{S}_k^C$ komplex Fourier-együtthatók meghatározása a következők szerint történik. Induljunk ki a (6.50) definíciós összefüggésből:

$$\overline{S}_k^C = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} A \sin \omega t e^{-jk\omega t} dt.$$

Az integrandusz primitív függvényét nem tudjuk közvetlenül meghatározni. Használjuk ezért a *parciális integrálás* szabályát.³⁹ A következő jelöléseket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} u' &= e^{-jk\omega t} & u &= \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega}, \\ v &= \sin \omega t & v' &= \omega \cos \omega t, \end{aligned}$$

így írhatjuk, hogy

$$\overline{S}_k^C = \frac{A}{T} \left\{ \left[\frac{\sin \omega t e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \omega \cos \omega t dt \right\}.$$

Az első tag értéke nulla. Vizsgáljuk meg csak a számlálót:

$$\sin \left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2} \right) e^{-jk \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}} - \sin \left(\frac{2\pi}{T} 0 \right) e^{-jk \frac{2\pi}{T} 0} = \sin \pi e^{-jk\pi} - 0 = 0.$$

Az integrálban ω -val lehet egyszerűsíteni, és emeljük ki a nevezőben szereplő jk tagot. A komplex Fourier-együttható kifejezése tehát a következőképp írható fel:

$$\overline{S}_k^C = \frac{A}{jkT} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \omega t e^{-jk\omega t} dt.$$

Ezen integrandusz primitív függvénye sem ismert. Alkalmazzuk hát még egyszer a parciális integrálás szabályát a következő jelölésekkel:

$$\begin{aligned} u' &= e^{-jk\omega t} & u &= \frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega}, \\ v &= \cos \omega t & v' &= -\omega \sin \omega t, \end{aligned}$$

azaz

$$\overline{S}_k^C = \frac{A}{jkT} \left\{ \left[\frac{\cos \omega t e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{-jk\omega t}}{jk\omega} \omega \sin \omega t dt \right\}.$$

³⁹ $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$

Határozzuk meg először az első tag értékét:

$$T \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) e^{-jk \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}}}{-jk2\pi} - T \frac{1}{-jk2\pi} = T \frac{-e^{-jk\pi} - 1}{-jk2\pi},$$

s így a kifejezés értéke a következő lesz:

$$\overline{S}_k^C = A \frac{-e^{-jk\pi} - 1}{2k^2\pi} + \frac{A}{k^2T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t e^{-jk\omega t} dt.$$

Ez a kifejezés tartalmazza a kiindulásban is szereplő integrált. Írjuk fel hát a kiindulási képletet és a parciális integrálás szabályát felhasználó utóbbi összefüggést és tegyük azokat egyenlővé:

$$\frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t e^{-jk\omega t} dt = A \frac{-e^{-jk\pi} - 1}{2k^2\pi} + \frac{A}{k^2T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t e^{-jk\omega t} dt.$$

Rendezzük ezt át a következőképp:

$$\frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t e^{-jk\omega t} dt \left[1 - \frac{1}{k^2} \right] = A \frac{-e^{-jk\pi} - 1}{2k^2\pi},$$

azaz

$$\overline{S}_k^C = \frac{A}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t e^{-jk\omega t} dt = A \frac{e^{-jk\pi} + 1}{2\pi(1 - k^2)}$$

lesz a komplex Fourier-együtthatók kifejezése. Az Euler-reláció segítségével ezt átírhatjuk algebrai alakra:

$$\overline{S}_k^C = A \frac{\cos(k\pi) + 1}{2\pi(1 - k^2)} - jA \frac{\sin(k\pi)}{2\pi(1 - k^2)},$$

amelyből

$$S_k^A = 2 \operatorname{Re} \left\{ \overline{S}_k^C \right\} = A \frac{\cos(k\pi) + 1}{\pi(1 - k^2)},$$

$$S_k^B = -2 \operatorname{Im} \left\{ \overline{S}_k^C \right\} = A \frac{\sin(k\pi)}{\pi(1 - k^2)}$$

következik. A Fourier-összeg valós alakja ezek segítségével már felírható. Vizsgáljuk meg előbb a kapott eredményeket. Látszik, hogy ha $k = 1$, akkor mindkét esetben a számláló is és a nevező is nullává válik, azaz egy $\frac{0}{0}$ alakú, határozatlan értékű hányadost kapnánk. Ebben az esetben a *L'Hospital-szabályt*⁴⁰ kell alkalmazni a tört értékének meghatározására:

$$S_1^A = A \lim_{k \rightarrow 1} \frac{(\cos(k\pi) + 1)'}{(\pi(1 - k^2))'} = A \lim_{k \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin k\pi}{-2k\pi} = 0,$$

$$S_1^B = A \lim_{k \rightarrow 1} \frac{(\sin(k\pi))'}{(\pi(1 - k^2))'} = A \lim_{k \rightarrow 1} \frac{\pi \cos k\pi}{-2k\pi} = \frac{A}{2}.$$

A $k > 1$ együtthatók számítása már nem jelent problémát. Vegyük szemügyre a kapott valós együtthatókat. Ezek tovább egyszerűsíthetők:

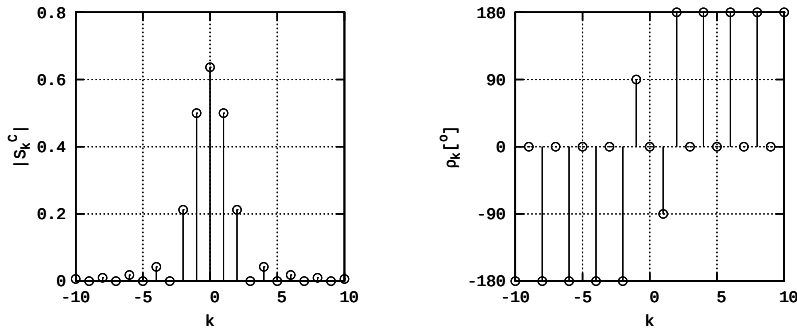
$$S_k^A = A \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1 - k^2)}, \quad S_k^B = A \frac{\sin(k\pi)}{\pi(1 - k^2)} = 0.$$

A közelítő Fourier-összeg tehát a következő lesz:

$$s(t) \simeq \underbrace{\frac{A}{\pi}}_{S_0} + \underbrace{\frac{A}{2}}_{S_1^B} \cos \omega t + \sum_{k=2}^n \left[\underbrace{A \frac{(-1)^k + 1}{\pi(1 - k^2)}}_{S_k^A} \cos k\omega t \right].$$

A Fourier-együtthatókat a következő táblázatokban foglaljuk össze $k = 0, 1, 2, 3, 4$ esetekre:

⁴⁰ Abban az esetben, ha egy törtfüggvény helyettesítési értéke $\frac{0}{0}$, vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú, akkor a számláló és a nevező deriválása után kapott törtfüggvény (jelen esetben $k \rightarrow 1$) határértékét kell meghatározni. A deriválást k szerint kell elvégezni.



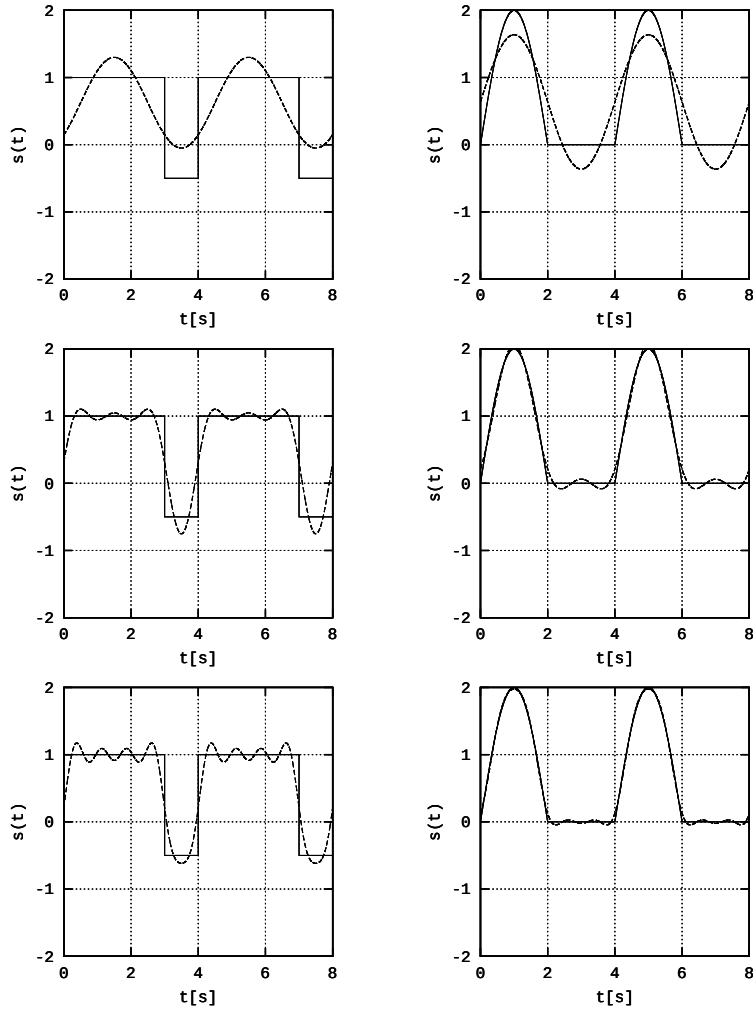
6.9. ábra. A jel komplex spektrumának ábrázolása

k	$\overline{S}_k^C$	$ \overline{S}_k^C $	$\text{arc}\overline{S}_k^C$	S_k^A	S_k^B	S_k	ρ_k
0	$2/\pi$	$2/\pi$	0°	$2/\pi$	0	$2/\pi$	0°
1	$-j0,5$	0,5	-90°	0	1	1	-90°
2	$-0,212$	0,212	180°	$-0,424$	0	0,424	180°
3	0	0	0°	0	0	0	0°
4	$-0,042$	0,042	180°	$-0,084$	0	0,084	180°

A komplex Fourier-együtthatók vonalas spektruma látható a 6.9. ábrán. A spektrumnak tehát a negatív k értékek mellett is van értéke, az amplitúdó-spektrum páros függvény, a fázisspektrum pedig páratlan függvény. Érdekes megfigyelni a komplex spektrum és a valós spektrum közötti összefüggést a két táblázat összehasonlításával: a $k = 0$ elem megegyezik, a $k > 0$ elemek esetében azonban a valós spektrum amplitúdókarakterisztikája pont 2-szerese a komplex spektrum amplitúdókarakterisztikájának ($S_k = 2|\overline{S}_k^C|$), a két fázisspektrum pedig megegyezik.

A Fourier-összeggel közelített jel és az eredeti jel összehasonlítása látható a 6.10. ábrán.

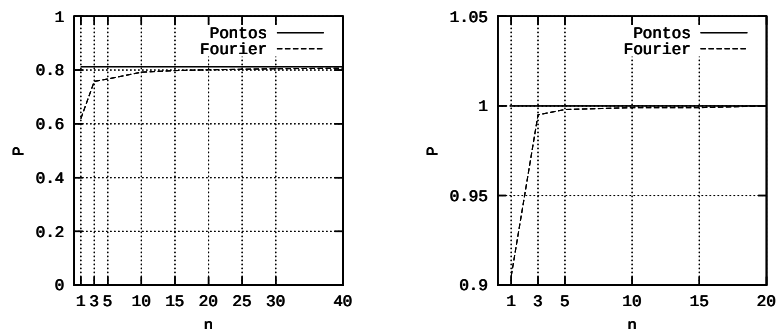
A 6.10. ábrából egy fontos konklúzió olvasható le. Az első négyzet alakú jel korlátos ugyan, de szakadása van egy perióduson belül. Ekkor a Fourier-közelítés a szakadási helyen a bal és



6.10. ábra. A példákban szereplő függvények és a Fourier-összeggel történt közelítésük összehasonlítása $n = 1, 3, 5$ esetekre

jobb oldali határértékek számtani közepéhez konvergál, ha $n \rightarrow \infty$:

$$s_n(t) \rightarrow \frac{s(t - \frac{3}{4}T - 0) + s(t - \frac{3}{4}T + 0)}{2} = 0,25,$$



6.11. ábra. A példákban szereplő függvények teljesítménye pontosan és a Fourier-összeggel számítva

továbbá ezen szakadási helyen nem csökkenthető tetszőleges érték alá a hiba, annak ellenére, hogy a (6.39) által definiált hiba értéke csökken. Ez az ún. *Gibbs-jelenség*. A másik jel folytonos, azaz nincs szakadása. Ez a jel tetszőlegesen kis hibával közelíthető Fourier-összeggel. Egy másik fontos észrevétel, hogy ha a jel folytonos, akkor a Fourier-összeg gyorsabban konvergál (az együtt-hatók nevezőjében k^2 szerepel). Az ábrán is látható, hogy pl. $n = 5$ együtt-hatóval a második jel jobban közelíthető.

A Fourier-összeg segítségével számított (6.53) teljesítmény értéke $n \rightarrow \infty$ esetén *mindig alulról konvergál* a (6.52) definíciós formula által adott értékhez. Ez látható a 6.11. ábrán. A második jel Fourier-közelítéssel számított teljesítményének konvergenciája gyorsabb. Az első jel teljesítményének pontos értéke 0,8125, ha pl. $n = 10$, akkor a Fourier-közelítéssel számított teljesítmény 0,792, ha $n = 10000$, akkor 0,81248. A második jel esetében azonban már $n = 20$ -ra megkapjuk a pontos értéket, ami 1.

6.2.2. A periodikus válasz számítása

Ha a folytonos idejű rendszer $s(t)$ gerjesztése egy periodikus jel, és ezen periodikus jel Fourier-felbontását elvégezzük, akkor a rendszer gerjesztett válasza Fourier-összeg alakjában meghatározható. A Fourier-összeggel adott gerjesztés adott számú szinuszos jel szuperpozíciója. Ha ismert a rendszer átviteli karakterisztikája, akkor az egyes harmonikusokra adott részválaszokat ki tudjuk számolni a komplex leírási módszer alapján. Ezután ezen részválaszokat kell szuperponálni, hiszen a rendszer lineáris. Arra kell csupán ügyelnünk, hogy az egyes harmonikus komponensek körfrekvenciája különböző: az alapharmonikus körfrekvenciájának egész számú többszöröse. A válaszjel egyes komponensei tehát a következő összefüggés szerint határozhatók meg:

$$\boxed{\bar{Y}_k = \bar{W}_k \bar{S}_k}, \quad (6.54)$$

ahol $\bar{S}_k$ jelöli a gerjesztés k -adik harmonikus komplex csúcsértékét, $\bar{W}_k = W(jk\omega)$ az átviteli együttható a $k\omega$ körfrekvencián és $\bar{Y}_k$ a válaszjel k -adik harmonikusának komplex csúcsértéke. Ezek számítására érdemes egy táblázatot készíteni. Ezután a válaszjel felírható a jól ismert alakban:

$$\boxed{y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^n Y_k \cos(k\omega t + \varphi_k)}. \quad (6.55)$$

Gyakorlatilag az előző részben ismertetett eljárást kell $n + 1$ -szer megismételni, majd a részeredményeket összeadni. Fontos megjegyezni, hogy a válasz periódusideje azonos a gerjesztés periódusidejével. Az eljárást szintén példával illusztráljuk.

Példa. Egy rendszer átviteli karakterisztikája adott. A rendszer bemenete a már vizsgált négyszög alakú periodikus jel

(181. oldal), melynek Fourier-közelítése ismert. Legyen a gerjesztés körfrekvenciája $\omega = 0,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Határozzuk meg a válaszjel időfüggvényét.

$$\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{5(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3},$$

$$s_2(t) = [0,625 + 0,676 \cos(\omega t - 135^\circ) + 0,478 \cos(2\omega t - 90^\circ)].$$

Megoldás. A $\overline{W}$ átviteli karakterisztika helyébe írjunk $\overline{W}_k$ -t:

$$\overline{W}_k = \frac{\overline{Y}_k}{\overline{S}_k} = \frac{5(jk\omega) + 1}{(jk\omega)^2 + 4(jk\omega) + 3},$$

majd számítsuk ki azt a $k = 0, 1, 2$ esetekre és foglaljuk táblázatba az eredményeket:

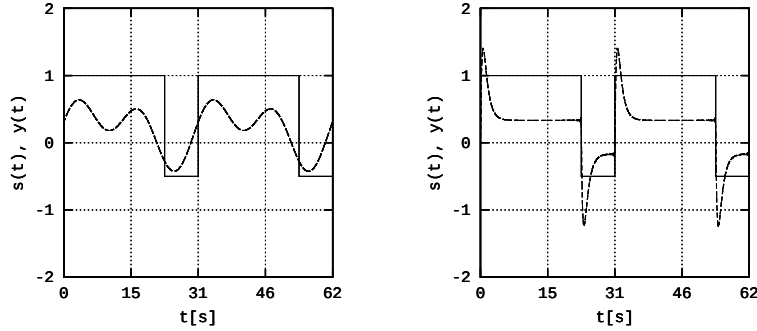
k	S_k	ρ_k	K_k	ϕ_k	$\overline{Y}_k$	φ_k
0	0,625	0°	1/3	0°	0,208	0°
1	0,676	-135°	0,461	29,85°	0,312	-105,15°
2	0,478	-90°	0,686	34,04°	0,328	-55,96°

A táblázat minden sora tartalmazza a gerjesztés k -adik harmonikusának amplitúdóját és fázisát, amely értékek a gerjesztés Fourier-közelítéséből kiolvashatók, továbbá az átviteli karakterisztika helyettesítési értékét adott k értékek mellett. A válaszjel amplitúdója a gerjesztés amplitúdójának és az átviteli együttható abszolút értékének szorzata, fázisa pedig a gerjesztés fázisának és az átviteli együttható fázisának az összege, hiszen minden sorban igaz, hogy $\overline{Y}_k = \overline{W}_k \overline{S}_k$. Ezért célszerű az Euler-alakot használni a számítások során. A táblázat utolsó két oszlopa tehát a gerjesztés k -adik harmonikusára adott gerjesztett válasz amplitúdóját és fázisát tartalmazza. A válaszjel időfüggvénye a komplex csúcserték fogalmának ismeretében tehát a következő:

$$y_2(t) = [0,208 + 0,312 \cos(\omega t - 105,15^\circ) + 0,328 \cos(2\omega t - 55,96^\circ)].$$

A válaszjel időfüggvénye a 6.12. ábrán látható. Minél több együtthatót használunk fel a számítás során, annál pontosabb válaszjelet

kapunk. Az ábrán példaképp felvázoltuk a válaszjelet $n = 100$ együtthatót is figyelembe véve. Látható, hogy az együtthatók számának növelésével egyre pontosabb megoldást kapunk. A számítást természetesen számítógép segítségével végeztük el.



6.12. ábra. A példában szereplő válaszjel időfüggvénye $n = 2$ és $n = 100$ együtthatót figyelembe véve

6.3. Jelek és rendszerek spektrális leírása

Az előző részben láttuk, hogy tetszőleges periodikus jel előállítható szinuszos jelek szuperpozíciójaként, és az egyes harmonikusok un. vonalas spektrummal reprezentálhatók. A vonalas spektrum csak az alapharmonikus körfrekvenciájának egész számú többszöröseit tartalmazza.

Ezt az eljárást nem periodikus jelekre is alkalmazhatjuk. Ha egy periodikus jel periódusát minden határon túl növeljük, akkor eljuthatunk a nem periodikus függvényekhez. Ennek az lesz a következménye, hogy míg a periodikus jelek diszkrét körfrekvenciájú szinuszos jelek összegeként állíthatók elő, addig a nem periodikus jelek végtelen sok szinuszos jel összegeként írhatók le, vagyis a (6.49) összefüggésben szereplő összegzés integrálásba megy át. A levezetés során a (6.49) összefüggésből indulunk ki. Ez a *Fourier-transzformáció*.

6.3.1. A Fourier-transzformáció és a spektrum

Induljunk ki tehát a (6.49) és a (6.50) összefüggésekből. A Fourier-összeg helyett vegyünk Fourier-sort, azaz $n \rightarrow \infty$, és az integrálási határokat 0 és T helyett vegyük $-T/2$ -nek és $T/2$ -nek:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{S}_k^C e^{jk\omega t}, \quad \bar{S}_k^C = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau,$$

majd helyettesítsük be az $\bar{S}_k^C$ kifejezését az időfüggvénybe:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) e^{jk\omega(t-\tau)} d\tau.$$

Ez az összefüggés csak periodikus jelekre érvényes. Ha azonban a periodikus jel T periódusidejét minden határon túl növeljük, akkor az alapharmonikus körfrekvencia ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) minden határon túl csökken. Jelöljük ezért ezt $d\omega$ -val (alkalmazzuk közben az $\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ átrendezést is):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{jk d\omega(t-\tau)} d\tau.$$

Az exponenciális függvény argumentumában szerepel a $k d\omega$ tag. Ha az összegzés k szerint $-\infty$ -től ∞ -ig fut, miközben $d\omega$ nagyon kicsi lesz, akkor a szummázást átírhatjuk integrállá a következőképp:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \right] d\omega,$$

ami tovább alakítható:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega,$$

és az ezen összefüggésben szereplő belső integrált nevezzük az $s(t)$ jel $S(j\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}$ (írott F betűvel) *Fourier-transzformáltjának*, vagy a jel *spektrumának*:

$$S(j\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.56)$$

Az $S(j\omega)$ spektrum ismeretében az $s(t)$ jel időfüggvénye előállítható a következő *komplex* alakban:

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.57)$$

Ez az $s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S(j\omega)\}$ szimbólummal jelölt művelet az *inverz Fourier-transzformáció*. A jel spektruma egy komplex értékű és az ω körfrekvenciától függő függvény ($\bar{S}(\omega) = S(j\omega)$), amelynek abszolút értéke a jel un. *amplitúdóspektruma*, fázisa pedig a jel *fázisspektruma*. Általános jel spektruma tehát végtelen sok szinuszos jel összegéből áll, ahogy a (6.57) előállításából látszik (a (6.49) előállításban k szerinti összegzés, itt pedig minden körfrekvenciát összegző integrál szerepel). Írjuk át a (6.57) összefüggést az alábbi alakra:

$$s(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(jk\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega,$$

amelyben jól látszik, hogy $s(t)$ végtelen számú $k\Delta\omega$ körfrekvenciájú szinuszos jel összege, ahol az $S(jk\Delta\omega)\Delta\omega/2\pi$ mennyiség az egyes szinuszos jelek komplex csúcértékét jelenti. Ez az un. *amplitúdósűrűség*.

Hasonlóképp vezethető be a Fourier-transzformáció és inverze, ha az f frekvenciát alkalmazzuk:

$$\bar{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (6.58)$$

A (6.56) alkalmazhatóságának feltétele, hogy az $s(t)$ jel *abszolút integrálható* legyen:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.} \quad (6.59)$$

Egyébként a jel spektruma a (6.56) definíciós integrállal nem határozható meg, mert az improprius integrál nem véges.

Ahogy a Fourier-közelítés, úgy a Fourier-transzformáció is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a (6.57) összefüggéssel visszaállított időfüggvény nem minden esetben egyezik meg az eredeti $s(t)$ jellel. Ha a jel folytonos, akkor az egyenlőség fennáll, ha azonban véges szakadással rendelkezik a jel, akkor a szakadási helyeken szintén a számtani középértékhez tart a visszaállított jel.

A Fourier-transzformációnak létezik *valós* alakja is. Ezzel foglalkozunk a következőkben, de főként a komplex alakot fogjuk alkalmazni. Bontsuk ketté a (6.57) összefüggésben szereplő integrált, majd az első tagban ω helyébe írjunk $-\omega$ -t, melynek eredményeképp az integrálási határok felcserélhetők:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Valós $s(t)$ függvények esetében (mi csak ilyenekkel foglalkozunk) az $S(j\omega)$ komplex spektrum amplitúdóspektruma páros, fázisspektruma pedig páratlan függvénye az ω körfrekvenciának. Írjuk fel ugyanis (6.56) alakját úgy, hogy az $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ Euler-relációt figyelembe vesszük:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt,$$

valamint

$$S(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt + j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt.$$

Ezen két összefüggésből látható, hogy $S(j\omega)$ és $S(-j\omega)$ valós része megegyezik, képzetes része azonban egymás -1 -szerese, azaz

$$\boxed{|S(-j\omega)| = |S(j\omega)|, \quad \arg S(-j\omega) = -\arg S(j\omega),} \quad (6.60)$$

vagy

$$\boxed{(S(j\omega))^* = S(-j\omega),} \quad (6.61)$$

azaz

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (S(j\omega))^* e^{-j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Írjuk fel ezután az $S(j\omega)$ komplex spektrumot és konjugáltját algebrai alakban:

$$S(j\omega) = S_{\text{re}}(\omega) + jS_{\text{im}}(\omega), \quad (S(j\omega))^* = S_{\text{re}}(\omega) - jS_{\text{im}}(\omega),$$

majd írjuk be ezeket az előző integrálba:

$$\begin{aligned} s(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [S_{\text{re}}(\omega) - jS_{\text{im}}(\omega)] e^{-j\omega t} d\omega + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [S_{\text{re}}(\omega) + jS_{\text{im}}(\omega)] e^{j\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

majd bontsuk fel a zárójeleket, csoportosítsuk a valós és a képzetes részeket, és vigyünk be egy 2-es osztót is. A kifejezést az azonos integrálási határok miatt egyetlen integrállal kifejezhetjük:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[2S_{\text{re}}(\omega) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} - 2S_{\text{im}}(\omega) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right] d\omega,$$

és vezessük be a következő jelöléseket:

$$S^A(\omega) = 2 \operatorname{Re} \{S(j\omega)\}, \quad S^B(\omega) = -2 \operatorname{Im} \{S(j\omega)\}, \quad (6.62)$$

azaz (6.60) miatt $S^A(\omega)$ páros, $S^B(\omega)$ pedig páratlan függvény. Az Euler-reláció értelmében mindezt a következőképp írhatjuk fel:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty [S^A(\omega) \cos \omega t + S^B(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Hátravan még $S^A(\omega)$ és $S^B(\omega)$ valós spektrumok meghatározása. Írjuk fel ezek meghatározásához a (6.56) összefüggését és írjuk át az exponenciális tényezőt algebrai alakra:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^\infty s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^\infty s(t) \sin \omega t dt.$$

A komplex $S(j\omega)$ spektrumot (6.62) alapján a következőképp írhatjuk fel:

$$S(j\omega) = \operatorname{Re} \{S(j\omega)\} + j \operatorname{Im} \{S(j\omega)\} = \frac{S^A(\omega)}{2} - j \frac{S^B(\omega)}{2},$$

azaz

$$S^A(\omega) = 2 \int_{-\infty}^\infty s(t) \cos \omega t dt, \quad S^B(\omega) = 2 \int_{-\infty}^\infty s(t) \sin \omega t dt. \quad (6.63)$$

Ezen alakok hasonlóak a Fourier-együtthatók meghatározása során kapott eredményekhez. Itt jegyezzük meg, hogy a Fourier-közelítéshez hasonlóan a Fourier-transzformáltra is igaz, hogy *páros függvény spektruma valós, azaz $S^B(\omega) = 0$ páratlan függvény spektruma pedig képzetes, azaz $S^A(\omega) = 0$.*

Ha az $s(t)$ jel négyzetesen integrálható, akkor a véges értékű E_s energiája a következőképp számítható:

$$E_s \equiv \int_{-\infty}^\infty |s(t)|^2 dt. \quad (6.64)$$

Célunk most ezen energia meghatározása a jel spektrumának ismeretében. Ha a jel valós értékű (mi csak ilyenekkel foglalkozunk),

akkor az abszolút érték képzése el is hagyható. Helyettesítsük be $s(t)$ helyébe az inverz Fourier-transzformáció (6.57) összefüggését:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt.$$

Az $1/2\pi$ konstans emeljük ki, és az integrálok sorrendjét cseréljük meg:

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega.$$

A spektrum definíciójából következően a belső integrál pontosan az $S(j\omega)$ spektrum konjugáltja:

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* d\omega,$$

amely a következő eredményre vezet:⁴¹

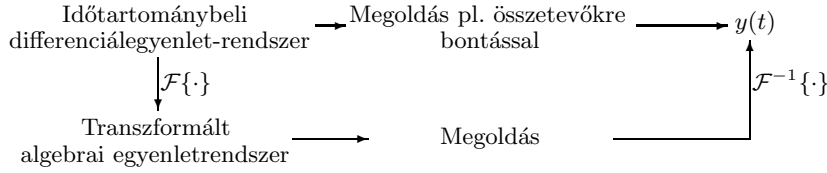
$$\boxed{E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega.} \quad (6.65)$$

Ez *Parseval tétele*, $|S(j\omega)|^2$ pedig a jel ún. *energiaspektruma*, amit úgy is értelmezhetünk, hogy a jel energiája el van osztva a frekvenciák mentén.

A Fourier-transzformáció egy ún. integráltranszformáció. Az integráltranszformációk lényege abban áll, hogy az időtartományban megfogalmazott differenciálegyenlet-rendszereket transzformáljuk algebrai egyenletekké. Ezek megoldása a válaszjel transzformáltja, amit aztán vissza kell transzformálni az időtartományba, hiszen a kérdés az

⁴¹Mivel $\overline{z} \overline{z}^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 - (jb)^2 = a^2 + b^2 = |\overline{z}|^2$.

időfüggvény:



6.3.2. A Fourier-transzformáció tételei

A következőkben a Fourier-transzformáció néhány tételével és bizonyításával foglalkozunk, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

Linearitás

A Fourier-transzformáció és inverze egy-egy integrál. Az integrálás pedig *lineáris operátor*, azaz bármely C_1 , C_2 konstans esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)\} &= C_1 \mathcal{F}\{s_1(t)\} + C_2 \mathcal{F}\{s_2(t)\}, \\ \mathcal{F}^{-1}\{C_1 S_1(j\omega) + C_2 S_2(j\omega)\} &= C_1 \mathcal{F}^{-1}\{S_1(j\omega)\} + C_2 \mathcal{F}^{-1}\{S_2(j\omega)\}. \end{aligned} \quad (6.66)$$

Általánosan ez a következőt jelenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\sum_{i=1}^n C_i s_i(t)\right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{F}\{s_i(t)\}, \\ \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n C_i S_i(j\omega)\right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{F}^{-1}\{S_i(j\omega)\}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Ez a *szuperpozíció elve*, ami tehát annyit jelent, hogy a *transzformáció és inverze tagonként elvégezhető*.

Eltolási tétel

Ha létezik az $s(t)$ jel $S(j\omega)$ spektruma, akkor a τ idővel eltolt $s(t - \tau)$ jel spektruma az *eltolási tétel* értelmében a következő:

$$\boxed{\mathcal{F}\{s(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau} S(j\omega),} \quad (6.68)$$

azaz az $s(t)$ jel spektrumát be kell szorozni $e^{-j\omega\tau}$ -val, amely $-\omega\tau$ értékű fázisforgatást végez az $S(j\omega)$ spektrumon, de az amplitúdóspektrumot és az energiaspektrumot nem módosítja, mivel $|e^{-j\omega\tau}| = 1$. A tétel bizonyítására a (6.57) összefüggésben írjuk minden t helyébe $(t - \tau)$ -t:

$$s(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S(j\omega) e^{-j\omega\tau}}_{\mathcal{F}\{s(t-\tau)\}} e^{j\omega t} d\omega.$$

A konvolúció spektruma

Utóbbi tételt alkalmazzuk a *konvolúció spektrumának* meghatározása során. Az időtartományban végzett $y(t) = w(t) * s(t)$ konvolúció a frekvenciatartományban *szorzattá egyszerűsödik*:

$$\boxed{Y(j\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\} \mathcal{F}\{s(t)\} = W(j\omega) S(j\omega),} \quad (6.69)$$

ahol $S(j\omega)$ és $Y(j\omega)$ a gerjesztés és a válaszeljel spektruma, $W(j\omega)$ pedig a rendszer átviteli karakterisztikája. Az összefüggés természetesen más, Fourier-transzformálható jelekre is érvényes.

A (6.69) igazolását az inverz Fourier-transzformáció segítségével tesszük meg, és feltételezzük, hogy $s(t)$ és $w(t)$ abszolút integrálható:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{S(j\omega) W(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right)}_{S(j\omega)} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Cseréljük fel most a τ és az ω szerinti integrálásokat és alkalmazzuk az eltolási tételt:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right)}_{w(t-\tau)} d\tau,$$

ami pontosan a konvolúció kifejezése. A válaszjel spektruma tehát az impulzusválasz spektrumának és a gerjesztés spektrumának a szorzata.

Kövessük végig ezután a következő gondolatmenetet, melynek kapcsán eljutunk a Fourier-transzformáció formális megadásához. Legyen egy rendszer nem belépő gerjesztése az $s(t) = e^{j\omega t}$ jel, amely az Euler-formulának megfelelően egy *szinuszos jel*. Vegyük ezen jel és a rendszer impulzusválaszának konvolúcióját:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) s(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau,$$

majd bontsuk fel a kitevőben szereplő zárójelet. Ekkor $e^{j\omega t}$ kiemelhető, hiszen az integrálás a τ változó szerint történik:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Az összefüggésben szereplő integrálban τ helyett t -t írva a $w(t)$ impulzusválasz Fourier-transzformáltjához, vagy a rendszer átviteli karakterisztikájához jutunk (ezt a 211. oldalon igazoljuk):

$$\boxed{W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt.} \quad (6.70)$$

Így a rendszer válasza a következő:

$$y(t) = W(j\omega) e^{j\omega t},$$

azaz állandósult állapotban a lineáris rendszer szinuszos gerjesztésre adott válasza is szinuszos lesz, melynek amplitúdóját és fázisát a $W(j\omega)$ átviteli karakterisztika határozza meg. Az átviteli karakterisztikát ezért a *rendszer sajátértékének* is szokás nevezni, az $e^{j\omega t}$ gerjesztés pedig az un. *sajátfüggvény*.

Ez tehát a Fourier-transzformáció formális bevezetése, amikor is a konvolúcióból indultunk ki és egyben eljutottunk a rendszer átviteli karakterisztikájának definíciójához is. Az integrálban szereplő $w(\tau)$ helyébe tetszőleges (de abszolút integrálható) $s(t)$ függvényt írva definiálhatjuk az $s(t)$ jel Fourier-transzformáltját is, ha ez az improprius integrál létezik.

Derivált jel spektruma

Ha létezik az $s(t)$ jel $S(j\omega)$ spektruma, akkor az $\dot{s}(t)$ *derivált jel spektruma* a következő:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\dot{s}(t)\} = j\omega S(j\omega)}, \quad (6.71)$$

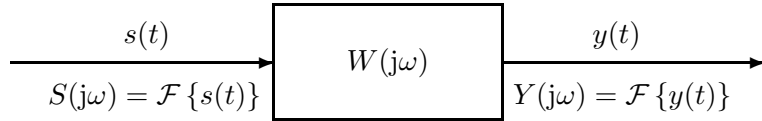
vagyis az időtartományban végzett deriválás a frekvenciatartományban $j\omega$ -val végzett szorzásnak felel meg, amely az eredeti jel $S(j\omega)$ amplitúdóspektrumát ω -val szorozza, fázisspektrumát pedig a j -vel való szorzás miatt 90° -kal elforgatja. Ez az inverz Fourier-transzformáció összefüggése alapján látható be. Deriváljuk a (6.57) összefüggés mindkét oldalát idő szerint:

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{S(j\omega) j\omega}_{\mathcal{F}\{s'(t)\}} e^{j\omega t} d\omega.$$

Az összefüggés általánosítható: $\mathcal{F}\{s^{(n)}(t)\} = (j\omega)^n S(j\omega)$. Ugyanazon eredményre jutottunk, mint a komplex csúcsértékek alkalmazása során (l. (6.13) és (6.14) összefüggések).

Az átviteli karakterisztika meghatározása. Alkalmazzuk ezen összefüggést az állapotváltozós leírásra. Ezúton a már bevezetett *átviteli karakterisztikához* jutunk. A levezetést nem ismételjük meg, hiszen az teljes mértékben megegyezik a 151. oldalon bemutatottakkal. Az átviteli karakterisztika tehát nemcsak a szinuszos gerjesztés és szinuszos válasz esetén határozható meg, hanem tetszőleges gerjesztés és a rá adott válasz spektrumának segítségével is, hiszen tetszőleges jel spektrumát végtelen sok szinuszos jel összegeként állítottuk elő. Láttuk, hogy a deriválás a frekvenciatartományban $j\omega$ -val történő szorzássá egyszerűsödik ugyanúgy, ahogy a komplex csúcértékek alkalmazása során. Ezen oknál fogva ugyanez érvényes a rendszeregyenletre is. Az átviteli karakterisztika tehát a következőt jelenti:

$$\boxed{W(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{s(t)\}} = \frac{Y(j\omega)}{S(j\omega)}}. \quad (6.72)$$



Fontos ismét kiemelni, hogy csak *gerjesztés-válasz stabilis* rendszer esetén értelmezett az átviteli karakterisztika.

Szimmetriatulajdonság

Néhány esetben nagyon hasznos a Fourier-transzformáció *szimmetriatulajdonsága*. Ha egy $g(t)$ időfüggvény spektruma *valós* értékű, azaz a j elhagyható, akkor:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

majd t helyébe $-\omega$ -t, ω helyébe pedig t -t írva, az inverz összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$2\pi g(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{-j\omega t} dt,$$

azaz, ha ismert egy $g(t)$ függvény $G(\omega)$ valós spektruma, akkor az új $f(t) = G(t)$ időfüggvény spektruma az $F(\omega) = 2\pi g(-\omega)$ lesz (a $g(t)$ időfüggvényben kell minden t helyébe $-\omega$ -t írni). Ha a transzformációs összefüggéseket nem az ω , hanem az f változóval használjuk, akkor a 2π szorzó elmarad. Ennek illusztrálását később látni fogjuk.

Eltolás a frekvenciatartományban, a modulációs tétel

A *modulációs tétel* kimondja, hogy a frekvenciatartományban ω_0 körfrekvenciával való eltolás az időtartományban $e^{j\omega_0 t}$ függvénnyel végzett szorzást jelent:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt,$$

azaz az $S(j\omega)$ spektrumban minden ω helyébe $(\omega - \omega_0)$ -t kell írni:

$$\mathcal{F}\{s(t) e^{j\omega_0 t}\} = S(j[\omega - \omega_0]). \quad (6.73)$$

Az $e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$ azonosság alapján ez a tétel tehát szinuszos jellel történő szorzásra ad összefüggést. A tétel fontos következménye, hogy az $s(t) \cos \omega_0 t$ jel spektruma az Euler-reláció alkalmazásával a következő:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} e^{-j\omega t} dt.$$

Felbontva a törtet kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{s(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} \{S(j[\omega - \omega_0]) + S(j[\omega + \omega_0])\}, \quad (6.74)$$

azaz az $s(t)$ jel $S(j\omega)$ spektruma az $\omega = \omega_0$ és az $\omega = -\omega_0$ körfrekvenciákon jelenik meg fele akkora amplitúdóval.

Hasonlóképp, az $s(t) \sin \omega_0 t$ jel spektruma az Euler-reláció alkalmazásával a következő:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} e^{-j\omega t} dt.$$

Felbontva a törtet kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{s(t) \sin \omega_0 t\} = \frac{1}{2j} \{S(j[\omega - \omega_0]) - S(j[\omega + \omega_0])\}. \quad (6.75)$$

A tétel gyakorlati jelentősége az *amplitúdómoduláció*ban van: a kisfrekvenciás $s(t)$ jel áttehető a nagyfrekvenciás vivőjel segítségével az ω_0 körfrekvencia környezetébe. Különböző ω_0 körfrekvenciájú vivőjelek segítségével több kisfrekvenciás jel is átvihető ugyanazon csatornán anélkül, hogy egymást zavarnák. A vételi oldalon aztán az egyes kisfrekvenciás jeleket un. demodulációval lehet visszanyerni. Az amplitúdómodulációt egy példával illusztráljuk.

Példa. Legyen a belépőjel $s(t) = \varepsilon(t)Ae^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$, $A > 0$), amelyet a $\cos \omega_0 t$ jellel beszorzunk. Határozzuk meg az szorzat amplitúdóspektrumát.

Megoldás. A jel abszolút integrálható, hiszen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} dt = \frac{A}{\alpha},$$

ami véges érték (belépő és korlátos jelek mindig abszolút integrálhatók).⁴² A spektrum meghatározására tehát alkalmazhat-

⁴²Az integrálás alsó határa nullának választható, mert a $t < 0$ intervallumon a jel értéke és így az integrál értéke is nulla. Az $e^{-\alpha t}$ jel primitív függvénye $\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}$. Megjegyezzük, hogy $\alpha \leq 0$ esetén a jel nem abszolút integrálható. Az A értékére csupán annyit kell kikötni, hogy értéke korlátos legyen.

jük a Fourier-transzformáció (6.56) összefüggését:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= \int_0^\infty A e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = A \int_0^\infty e^{-(\alpha+j\omega)t} dt = \\ &= A \left[\frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{-(\alpha+j\omega)} \right]_0^\infty = \frac{A}{\alpha+j\omega}. \end{aligned}$$

Ezen jel amplitúdóspektruma és fázisspektruma a következő⁴³:

$$|S(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \arg S(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}.$$

Az $s_{AM}(t) = \varepsilon(t) A e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ amplitúdómodulált jel spektruma a modulációs tétel értelmében tehát a következő:

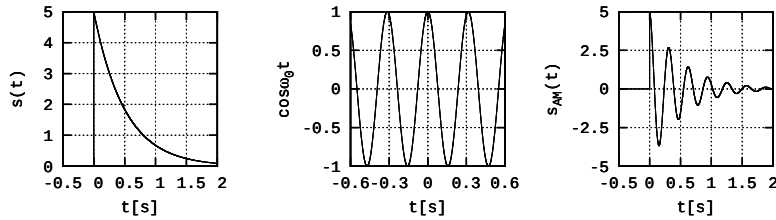
$$S_{AM}(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{A}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{2} \frac{A}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}.$$

Az $s(t)$ jel, a $\cos \omega_0 t$ jel és a kettő szorzata látható a 6.13. ábrán ($A = 5$, $\alpha = 2$). Az $s(t)$ jelhez rendelt amplitúdóspektrumot és az amplitúdómodulált jel spektrumát a 6.14. ábrán vázoltuk fel ($\omega_0 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$). A modulált jelben a két spektrum egymásra kis mértékben ugyan, de hatást gyakorol. Ha a jel *sávkorlátozott* (l. 222. oldal), azaz adott Ω körfrekvencia felett amplitúdóspektruma elhanyagolható és $\omega_0 \geq \Omega$, akkor ez az *átlapolódás* és egymásrahatás nem jön létre.

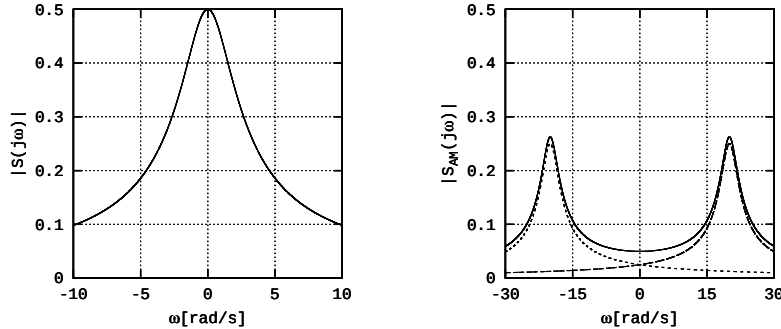
A modulációs tétel alkalmazásával nem kell tehát meghatározni a (6.56) integrált:

$$S_{AM}(j\omega) = \int_{-\infty}^\infty \varepsilon(t) A e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt.$$

⁴³Az amplitúdóspektrum is és a fázisspektrum is ω függvénye. Ha a spektrum egy tört, akkor annak abszolút értéke a számláló és a nevező abszolút értékeinek a hányadosa, fázisa pedig a számláló és a nevező fázisainak a különbsége.



6.13. ábra. Az $s(t)$ jel, a $\cos \omega_0 t$ jel és a két jel szorzatának időfüggvénye



6.14. ábra. Az $s(t)$ jel és az $s_{AM}(t)$ jel amplitúdóspektruma

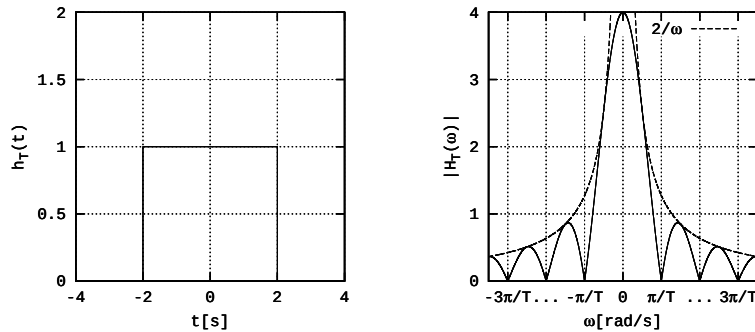
6.3.3. Folytonos idejű jelek spektruma

A következőkben néhány fontos jel Fourier-transzformáltját és újabb tételeket fogunk meghatározni illetve bemutatni.

1.) Szükségünk lesz a következő *egységnyi magasságú szimmetrikus (azaz páros) négyszögjel* (6.15. ábra) Fourier-transzformáltjára, mert segítségével a Dirac-impulzus spektruma meghatározható:

$$h_T(t) = \varepsilon(t + T) - \varepsilon(t - T). \quad (6.76)$$

A spektrum a (6.56) definícióból kiindulva meghatározható, *mivel a jel abszolút integrálható* (ablakozott véges értékű jelek mindig abszolút integrálhatók). Az integrálási határok $-T$ és T lehet a



6.15. ábra. A $2T$ hosszúságú négyzetgimpulzus és amplitúdóspektruma (itt $T = 2$ s)

$-\infty$ és ∞ helyett, hiszen ezen intervallumon kívül a jel értéke nulla, egyébként pedig $h_T(t) = 1$:

$$H_T(j\omega) = \int_{-T}^T e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T}^T = \frac{2}{\omega} \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j},$$

ahol felismerhető a $\sin \omega T$ jel Euler-formulával felírva:

$$\mathcal{F}\{h_T(t)\} = 2 \frac{\sin \omega T}{\omega} = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}, \quad (6.77)$$

ami egy $\sin x/x$ jellegű valós spektrum (páros jel spektruma mindig valós). A jel és amplitúdóspektruma látható a 6.15. ábrán.

Látható, hogy a jel amplitúdóspektruma páros függvény. A fázisspektrum a $[0, \pi/T]$ intervallumban nulla, a $[\pi/T, 2\pi/T]$ intervallumban pedig $\pm 180^\circ$, és ez ismétlődik, ahogy a $\sin \omega T$ jel előjele adja, továbbá páratlan függvény, hiszen $\sin(-\omega T) = -\sin \omega T$. A nulla értékű helyek az $\omega T = k\pi$ egyenlet alapján az $\omega = k\frac{\pi}{T}$ értékeknél vannak ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ ⁴⁴).

⁴⁴A $\sin x/x$ függvény $x = 0$ helyen vett határértéke a L'Hospital-szabály alapján 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

2.) Ezen eredmény segítségével állítjuk elő a *Dirac-impulzus spektrumát*. Legyen ugyanis a $h_T(t)$ jel magassága $1/2T$. Ebben az esetben az impulzus területe mindig egységnyi, hiszen hossza $2T$. Közelítsük ezután a T értékét nullához, így a $h_T(t)/2T$ jel a Dirac-impulzushoz közelít, hiszen magassága T csökkenésével nő miközben intenzitása egységnyi.⁴⁵ Ezen jel spektruma (6.77) alapján a következő:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2T} h_T(t) \right\} = \frac{\sin \omega T}{\omega T},$$

melynek $T \rightarrow 0$ határértéke a L'Hospital-szabály értelmében a Dirac-impulzus spektruma:

$$\mathcal{F} \{ \delta(t) \} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\sin \omega T}{\omega T} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\omega \cos \omega T}{\omega} = 1. \quad (6.78)$$

Mivel a Dirac-impulzus abszolút integrálható jel, ezért spektruma meghatározható a definíció alapján is⁴⁶:

$$\boxed{\mathcal{F} \{ \delta(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.}$$

A Dirac-impulzus spektruma tehát minden körfrekvenciát azonosan egységnyi értékkel (súllyal) tartalmaz.

A Dirac-impulzus eltolja az eltolási tétel értelmében a következő:

$$\boxed{\mathcal{F} \{ \delta(t - \tau) \} = e^{-j\omega \tau},}$$

ami a definícióból is adódik:

$$\mathcal{F} \{ \delta(t - \tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt,$$

⁴⁵Így vezettük be a Dirac-impulzust.

⁴⁶Emlékezzünk vissza, hogy a $\delta(t)$ jel a $t = 0$ helyen kívül mindenütt nulla értékű. Ezért minden olyan jel $t = 0$ -ban vett helyettesítési értékét ki kell számolni, amit Dirac-impulzussal szorzunk.

ahol az integrál értéke definíció szerint egységnyi, és a végeredmény így $e^{-j\omega\tau}$ lesz.

A Dirac-impulzus Fourier-transzformáltját helyettesítsük be a (6.69) konvolúciós összefüggésbe:

$$Y(j\omega) = W(j\omega) 1,$$

ami annyit jelent, hogy a Dirac-impulzusra adott válasz (az impulzusválasz) spektruma megegyezik az átviteli karakterisztikával, azaz az *impulzusválasz Fourier-transzformáltja (spektruma) pontosan az átviteli karakterisztika*, és megfordítva *az átviteli karakterisztika inverz Fourier-transzformáltja az impulzusválasz*:

$$\boxed{W(j\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}, \quad w(t) = \mathcal{F}^{-1}\{W(j\omega)\}.} \quad (6.79)$$

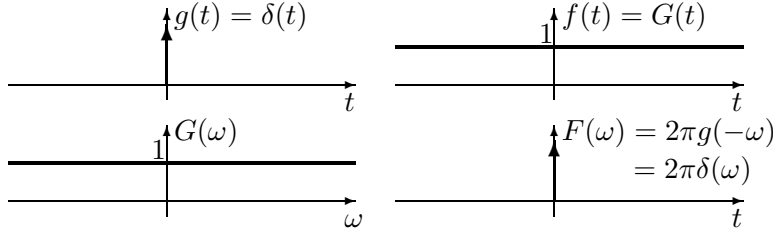
Ezzel igazoltuk a (6.70) összefüggést is.

A következő két jel spektrumának meghatározása a nem abszolút integrálható $\varepsilon(t)$ egységugrásjel spektrumának meghatározását célozza meg.

3.) Határozzuk meg először a *nem belépő, egysényi értékű jel spektrumát*. Ez a jel nem abszolút integrálható, tehát a (6.56) összefüggés nem alkalmazható. A szimmetriatulajdonság alapján határozzuk meg a spektrumot, mivel így a legegyszerűbb. Láttuk, hogy a Dirac-impulzus spektruma valós értékű és egységnyi, most pedig pontosan az egysényi jel spektrumát keressük. Használhatjuk tehát a szimmetriatulajdonságot. Maradjunk az ott leírt jelölések mellett: $g(t) = \delta(t)$ és $G(\omega) = 1$. Legyen hát $f(t) = G(t) = 1$, amelynek spektruma $F(\omega) = 2\pi\delta(-\omega)$. Mivel a $\delta(\omega)$ függvény páros, ezért $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$. Az egysényi jel spektruma tehát csak az $\omega = 0$ körfrekvenciából áll, ami várható is volt, hiszen ez pl. egy egyenáramú jel.⁴⁷

⁴⁷Az összefüggés ellenőrizhető úgy, hogy a kapott spektrumot visszahelyettesítjük a (6.57) összefüggésbe: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega$, ami pontosan 1.

Mindez grafikusán a következőt jelenti:

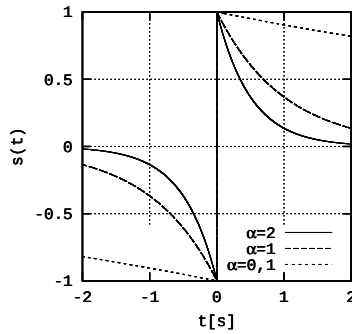


Az egyéni jel páros függvény és spektruma tisztán valós értékű, ahogy annak lennie kell.

4.) Határozzuk meg ezután az (l. 6.16. ábra)

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = -[1 - \varepsilon(t)]e^{\alpha t} + \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$$

jel Fourier-transzformáltját, ha $\alpha > 0$. Ez a jel alkalmas lesz a nem abszolút integrálható előjelfüggvény spektrumának meghatározására, ugyanis $\alpha \rightarrow 0$ esetén $s(t)$ az előjelfüggvényhez tart. Az $[1 - \varepsilon(t)]$ jel a $t > 0$ tartományon nulla értékű és a $-e^{\alpha t}$ jel $\alpha > 0$ mellett abszolút integrálható a $[-\infty, 0]$ intervallumon. Az $\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ jelet már vizsgáltuk, ez szintén abszolút integrálható, így a spektrum számítható a (6.56) definíció alapján.



6.16. ábra. A $-[1 - \varepsilon(t)]e^{\alpha t} + \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ függvény alakulása α különböző értékei mellett

A jel első tagjának spektruma a következőképp határozható meg:

$$S_1(j\omega) = - \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - j\omega)t} dt = - \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{\alpha - j\omega} \right]_{-\infty}^0 = - \frac{1}{\alpha - j\omega}.$$

A jel második tagjának spektrumát már ismerjük: $S_2(j\omega) = 1/(\alpha + j\omega)$. A Fourier-transzformáció lineáris művelet, ezért a külön-külön meghatározott spektrumok összege adja az eredő időfüggvény spektrumát:

$$S(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega) = -\frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Ennek határértéke $\alpha \rightarrow 0$ esetén a következő:

$$\frac{-j2\omega}{\omega^2} = \frac{-j2\omega}{-(j\omega)^2} = \frac{-j2\omega}{-j\omega j\omega} = \frac{2}{j\omega},$$

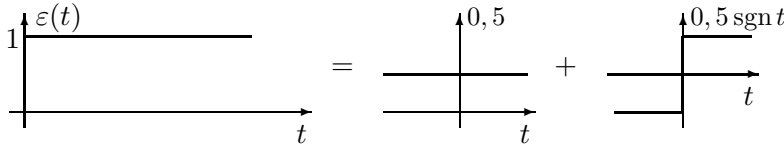
azaz

$$\boxed{\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} t\} = \frac{2}{j\omega}.} \quad (6.80)$$

Az előjelfüggvény páratlan, s következésképp spektruma tisztán képzetes.

5.) Utóbbi két jel spektrumának ismeretében most már meghatározhatjuk az egységugrásjel Fourier-transzformáltját is, hiszen

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn} t,} \quad (6.81)$$



azaz a jelet felbontottuk egy páros és egy páratlan jel összegére, és a két jel spektrumának összege adja az $\varepsilon(t)$ jel spektrumát:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.} \quad (6.82)$$

Az $\varepsilon(t)$ jel nem páros és nem is páratlan, következésképp spektruma valós és képzetes részt is kell, hogy tartalmazzon. A $\pi\delta(\omega)$

tag az egyenszintnek megfelelő spektrum, az $1/j\omega$ tag pedig az ugrásnak megfelelő spektrum. Gyors változások spektruma ugyanis nagyon széles frekvencia intervallumot ölel fel egyre kisebb amplitúdóval.

Az $\varepsilon(t)$ jel spektruma kis odafigyeléssel meghatározható a következő jel spektrumának ismeretében is:

$$\boxed{s(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t} \Rightarrow S(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Ha $\alpha \rightarrow 0$, akkor $s(t) \rightarrow \varepsilon(t)$. A spektrumban azonban nem képezhetjük közvetlenül ezt a határátmenetet, ugyanis akkor $1/j\omega$ -t kapnánk, ami azonban a $0,5 \operatorname{sgn} t$ páratlan jel spektruma. Az $\varepsilon(t)$ jel azonban nem páratlan. Alakítsuk át ezen spektrumot a következőképp:

$$S(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} \frac{\alpha - j\omega}{\alpha - j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

A képzetes rész $\alpha \rightarrow 0$ esetén a $-\frac{j\omega}{\omega^2} = \frac{1}{j\omega}$ -hoz tart, ami a helyes eredmény. A valós rész azonban kis magyarázatot igényel. A Dirac-impulzus vizsgálata során megemlítettük a $\delta_1(t, \tau) = \frac{\tau}{\pi(t^2 + \tau^2)}$ alakú függvényt (l. 12. oldal), melynek a görbe alatti területe egységnyi és így a Dirac-impulzus egy lehetséges megvalósításaként fogtuk fel. A valós rész ehhez nagyon hasonló alakú, ugyanis helyettesítsünk a t változó helyébe ω -t, a τ helyébe pedig α -t. Egyetlen különbség, hogy a nevezőben nem szerepel a π . Integráljuk a valós részt az ω változó szerint $-\infty$ -tól ∞ -ig:⁴⁸

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \left[\arctg \frac{\omega}{\alpha} \right]_{-\infty}^{\infty} = \pi \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \Big|_{\alpha \rightarrow 0} = \pi \delta(\omega).$$

Mivel a valós rész ezen improprius integrálja konstans, ezért a Dirac-impulzus definíciója szerint felfoghatjuk úgy is, hogy

⁴⁸ $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x.$

ez a $\delta(\omega)$ Dirac-impulzus π -szerese. Így az előbbivel megegyező eredményre jutottunk.

Az $\varepsilon(t)$ jel spektrumának ismeretében meghatározhatjuk egy $s(t)$ jel *integrált jelének* spektrumát, ha $s(t)$ spektruma $S(j\omega)$:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}S(j\omega) + \pi S(j0)\delta(\omega)}, \quad (6.83)$$

azaz az integrálás nemcsak $j\omega$ -val való osztást jelent, hanem van egy additív tag is benne, amely eltűnik, ha $S(j0) = 0$ (pl. páratlan függvény esetén). Ekkor $S(j0)$ értelmezett kell legyen, aminek értéke a Fourier-transzformáció szerint $\omega = 0$ helyettesítéssel a következő:

$$S(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt, \quad (6.84)$$

ha az $s(t)$ jel abszolút integrálható. Ennek egy lehetséges bizonyításához fel kell használnunk a konvolúció-tételt. Az integrál felső határa t , azaz, ha vesszük $s(\tau)$ és az egységugrásjel a konvolúcióját, akkor az integrál értéke nem változik meg:

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t s(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau \Rightarrow \mathcal{F}\{s(t)\} \mathcal{F}\{\varepsilon(t)\},$$

ahonnan a tétel már következik:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right\} = S(j\omega) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \pi S(j0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}S(j\omega).$$

Az egységugrásjel spektrumát ezen tételből is meghatározhatjuk, ugyanis a Dirac-impulzus és az egységugrás jelek jól ismert összefüggése a következő:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau,$$

és a (6.83) összefüggés alapján írhatjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}, \quad (6.85)$$

hiszen a Dirac-impulzus spektruma 1.

Ha az $s(t)$ jel *belépő*, akkor az alsó integrálási határ -0 lesz. Az alsó határ akkor lehet 0, ha $s(t)$ nem tartalmaz Dirac-impulzust.

6.3.4. A válasz spektruma és időfüggvénye

Az $s(t)$ gerjesztés $S(j\omega)$ spektrumának meghatározása után a rendszer $W(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját felhasználva felírhatjuk a rendszer válaszána spektrumát:

$$\boxed{Y(j\omega) = W(j\omega) S(j\omega),} \quad (6.86)$$

amelynek inverz Fourier-transzformáltja szolgáltatja a válaszjel időfüggvényét:

$$\boxed{y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.} \quad (6.87)$$

Ezen integrál csak nagyon speciális és egyszerű esetekben alkalmas az időfüggvény képletszerű megadására. Legtöbb esetben csak numerikusan oldható meg. A gyakorlatban azonban a spektrumból sok lényeges jellemzőre lehet következtetni. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy alkalmazható a spektrum módszer lineáris, invariáns és kauzális rendszerek tulajdonságainak meghatározására.

Az alakhű jelátvitel

Az alakhű jelátvitel (torzításmentes jelátvitel) azt jelenti, hogy az $y(t)$ válasz csak egy állandó K szorzóval és egy τ időkéscleltetéssel térhet el az $s(t)$ gerjesztéstől:

$$\boxed{y(t) = Ks(t - \tau), \quad \tau > 0.} \quad (6.88)$$

Felhasználva az eltolási tételt, a válaszjel és a gerjesztés spektrumának kapcsolata a következő:

$$Y(j\omega) = K S(j\omega)e^{-j\omega\tau}, \quad (6.89)$$

azaz az alakhú jelátvitelt biztosító rendszer ideális átviteli karakterisztikája a következő:

$$\boxed{W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{S(j\omega)} = Ke^{-j\omega\tau}}, \quad (6.90)$$

melynek amplitúdókarakterisztikája tehát konstans: $|W(j\omega)| = K$, fáziskarakterisztikája pedig lineáris, azaz egy negatív meredekségű egyenes: $\arg W(j\omega) = -\omega\tau$.

Ilyen rendszer a gyakorlatban nem valósítható meg minden ω körfrekvencián. De erre nincs is szükség, elegendő ugyanis csak egy adott intervallumban (közelítőleg) biztosítani azt, amely intervallumot a gerjesztés spektrumának ún. *sávszélessége* határoz meg. Természetesen a rendszer átviteli karakterisztikája is rendelkezik sávszélességgel. Ezekről lesz szó a következőkben, majd egy egyszerű példán illusztráljuk a leírtakat.

A jel sávszélessége

Olyan gerjesztésekre szorítkozunk, amelyek spektruma egy frekvenciasávon kívül elhanyagolható. Ez természetes, hiszen ha nem így lenne, akkor a jel nem lenne abszolút integrálható, azaz véges energiájú (l. Parseval-tétel, a (6.65) összefüggés).

Egy jel sávszélességén azt a körfrekvencia-intervallumot értjük, amelyen kívül a jel amplitúdóspektruma elhanyagolható, s így nullának tekinthető:

$$\boxed{\epsilon |S(j\omega)|_{\max} \leq |S(j\omega)| \leq |S(j\omega)|_{\max}}, \quad (6.91)$$

azaz elhanyagolhatónak tekintjük a jel amplitúdóspektrumát, ha értéke a maximum ϵ -szorosánál kisebb. Az ϵ egy adott kis

értékű pozitív szám. Ezen feltételhez határozandó meg a jel sávszélessége, amelyet $\Delta\omega_S$ -sel fogunk jelölni. Meg szokás adni a sávszélesség intervallumának ω_a alsó és ω_f felső határát is, ilyenkor $\Delta\omega_S = \omega_f - \omega_a$.

Az átviteli karakterisztika sávszélessége

Az átviteli karakterisztika amplitúdókarakterisztikájának két tartománya van. Az egyik az un. *áteresztőtartomány*, a másik az un. *zárótartomány*. Az áteresztőtartomány a körfrekvenciában az az intervallum, ahol az amplitúdókarakterisztika nem kisebb egy adott értéknél. A zárótartomány a körfrekvenciában az az intervallum, ahol az amplitúdókarakterisztika nem nagyobb egy adott értéknél. A viszonyítást mindig az amplitúdókarakterisztika maximumához képest szokás megtenni. Áteresztőtartományban tehát:

$$\boxed{\eta_1 |W(j\omega)|_{\max} \leq |W(j\omega)| \leq |W(j\omega)|_{\max}}, \quad (6.92)$$

zárótartományban pedig

$$\boxed{0 \leq |W(j\omega)| \leq \eta_2 |W(j\omega)|_{\max}}. \quad (6.93)$$

Az η_1 és η_2 értékek mindig adottak. Általában ezek értéke $\eta = \eta_1 = \eta_2 = 1/\sqrt{2}$, ami a -3dB -nek felel meg (3dB -es csillapítás).⁴⁹ Ismét ezen feltételhez határozandó meg az átviteli karakterisztika (vagyis a rendszer) sávszélessége, amelyet $\Delta\omega_W$ -vel fogunk jelölni. Meg szokás adni a sávszélesség intervallumának ω_a alsó és ω_f felső határát is, ilyenkor $\Delta\omega_W = \omega_f - \omega_a$.

Az *alakhű jelátvitel feltétele* az, hogy a rendszer átviteli karakterisztikájának sávszélessége foglalja magába a jel sávszélességét, azaz a rendszer sávszélessége legyen nagyobb a jel sávszélességénél:

$$\boxed{\Delta\omega_W \geq \Delta\omega_S}. \quad (6.94)$$

⁴⁹Megjegyezzük, hogy ez a -3dB -es határ a $|W(j\omega)|^2$ un. energiaátviteli karakterisztika maximumának a felét jelenti.

Ez az alakhű jelátvitel egyike feltétele. Ha teljesül még, hogy a rendszer fáziskarakterisztikája közel lineáris a $\Delta\omega_S$ tartományban, akkor az átvitel jó közelítéssel alakhű.

Példa. Egy rendszer átviteli karakterisztikája és gerjesztése adott. A paraméterek legyenek a gyakorlatban is alkalmazott értékek: $\epsilon = 0,1$, $\eta = 1/\sqrt{2}$. A mennyiségek SI-ben értendők.

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega 0,1}, \quad s(t) = \varepsilon(t + T) - \varepsilon(t - T).$$

Megoldás. Határozzuk meg először a jel sáv szélességét. A jel spektrumát és amplitúdóspektrumát már korábban, a (6.77) levezetésben meghatároztuk:

$$S(j\omega) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} \Rightarrow |S(j\omega)| = 2T \left| \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right|.$$

Abban az esetben, ha a jel amplitúdóspektruma sűrűn változik, célszerű a jel burkológörbét alapul venni a sáv szélesség meghatározása során. A burkológörbe most $2/\omega$ (l. 6.15. ábra). Az amplitúdóspektrum maximum értéke az $\omega = 0$ körfrekvencián van, $|S(j\omega)|_{\max} = |S(0)| = 2T$, így a jel sáv szélessége meghatározható a következő egyenlőtlenség alapján:

$$\epsilon |S(j\omega)|_{\max} \leq |S(j\omega)| \Rightarrow 0,1 \cdot 2T \leq \frac{2}{\omega},$$

ahonnan $\omega \leq \frac{10}{T}$ adódik, azaz a jel sáv szélessége $\Delta\omega_S = \frac{10}{T}$.

Határozzuk meg ezután a rendszer átviteli karakterisztikájának sáv szélességét. Az amplitúdókarakterisztika a következő:

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,01 \omega^2}},$$

melynek maximuma az $\omega = 0$ helyen van, és ez a maximum $|W(j\omega)|_{\max} = |W(0)| = 1$. Az átviteli karakterisztika sávszélessége meghatározható a következő egyenlőtlenség alapján:

$$\eta|W(j\omega)|_{\max} \leq |W(j\omega)| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 0,01\omega^2}},$$

ahonnan $\omega \leq 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ adódik, azaz a rendszer sávszélessége $\Delta\omega_W = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

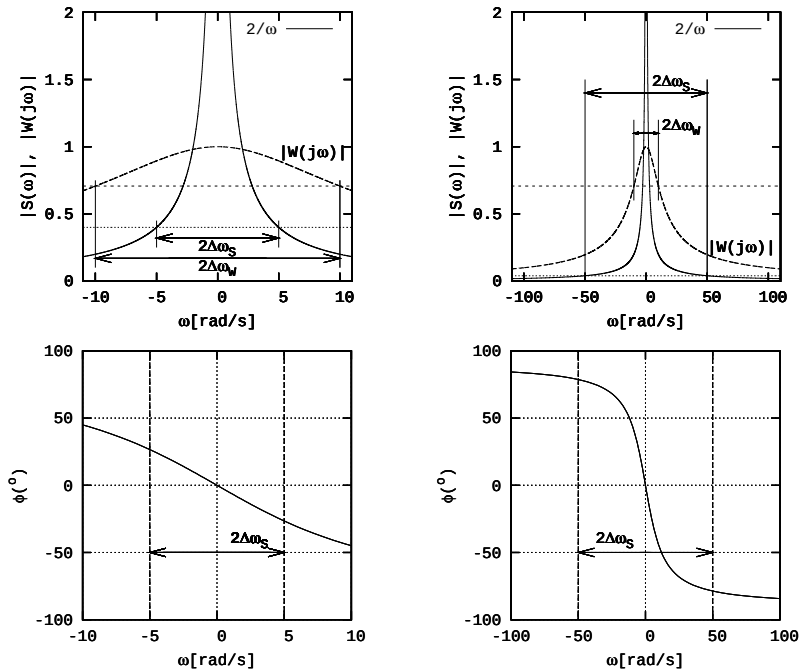
Azt kell megvizsgálnunk, vajon milyen szélességű impulzusokat képes ez a rendszer alakhűen átvinni, azaz vizsgálni kell a következő egyenlőtlenséget:

$$\Delta\omega_W \geq \Delta\omega_S \Rightarrow 10 \geq \frac{10}{T} \Rightarrow T \geq 1\text{s}.$$

A 6.17. ábrán két eset látható. Az ábrákon berajzoltuk a $2/\omega$ burkológörbét, valamint az amplitúdóspektrumot és bejelöltük a sávszélességeket is. A spektrumok abszolút értéke páros függvény, ezért áll az ábrán a sávszélességek kétszerese, definíció szerint a sávszélesség az $\omega = 0$ körfrekvenciától mérendő. Az első esetben a $T = 2\text{s}$, ami kielégíti a $T \geq 1\text{s}$ feltételt, azaz a jel sávszélessége kisebb, mint a rendszer sávszélessége: $\Delta\omega_S = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\Delta\omega_W = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Az rendszer amplitúdókarakterisztikája ekkor közelítőleg konstansnak tekinthető. A második esetben $T = 0,2\text{s}$, ami nem biztosítja az alakhű jelátvitelt, ekkor a jel sávszélessége ugyanis nagyobb, mint a rendszer sávszélessége: $\Delta\omega_S = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\Delta\omega_W = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, és látható, hogy a rendszer amplitúdókarakterisztikája nem tekinthető konstansnak. Az első esetben a fáziskarakterisztika a bejelölt $\Delta\omega_S$ intervallumon nagyon jól közelíti a lineáris egyenest, a második esetben azonban ez sem teljesül. Látható továbbá, hogy a fáziskarakterisztika páratlan függvény.

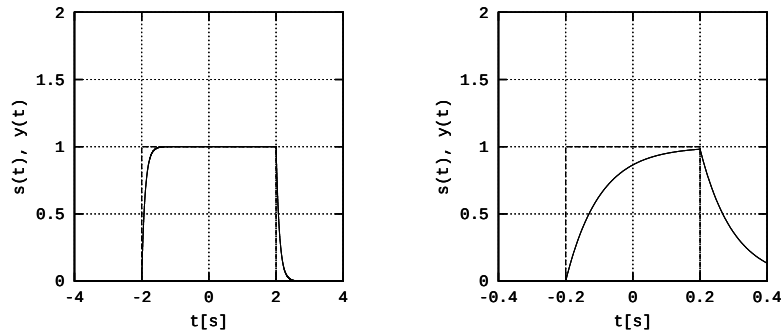
Vizsgáljuk meg ezután a rendszer kimeneti jelét ezen két esetben. A kimeneti jel kifejezése a következő:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2T \frac{\sin \omega T}{\omega T} \frac{1}{1 + j\omega 0,1} \right) e^{j\omega t} d\omega.$$



6.17. ábra. A példában szereplő jel amplitúdóspektrumának burkológörbéje, az átviteli karakterisztika amplitúdókarakterisztikája, fáziskarakterisztikája és a sávszélességek $T = 2\text{ s}$ és $T = 0,2\text{ s}$ esetekben

Ezen integrál kiértékelését numerikusan végeztük el (egy programot lehet írni a meghatározására). A rendszer kimeneti jelének időfüggvénye látható a 6.18. ábrán $T = 2\text{ s}$ és $T = 0,2\text{ s}$ esetekre. Az első esetben az alakhű jelátvitel közelítőleg biztosított, hiszen a kimeneti jel alakja hasonlít a bemeneti jel alakjához, értékét pedig kis késleltetéssel eléri. A második esetben az alakhű jelátvitel közelítőleg sem biztosított, hiszen a kimeneti jel meg sem közelíti a bemeneti jel alakját. Az alakhű jelátvitel tehát függ a rendszertől (annak időállandóitól) és a gerjesztéstől.



6.18. ábra. A példában szereplő rendszer $s(t)$ gerjesztésre adott válasza $T = 2s$ és $T = 0,2s$ esetekben

Sávkorlátozott jelek

Az előző példákban (l. pl. a 6.15. ábrán) láttuk, hogy egy $s(t)$ jel $S(j\omega)$ spektrumának $|S(j\omega)|$ amplitúdóspektruma az ω körfrekvencia növekedésével *általában* csökken. Ha a jel abszolút integrálható (véges energiájú), akkor ez biztosan igaz.⁵⁰ Nem követünk el nagy hibát, ha egy bizonyos Ω körfrekvencia felett a jel amplitúdóspektrumát nullának tekintjük, elhanyagoljuk:

$$\boxed{|S(j\omega)| = 0, \quad \text{ha} \quad |\omega| > \Omega.} \quad (6.95)$$

Az ilyen típusú jeleket nevezzük *sávkorlátozott jeleknek*. Fontos megjegyezni, hogy az Ω sávkorlát és a jel $\Delta\omega_s$ sáv szélessége nem egyenlőek, előbbi ugyanis általában nagyobb,

$$\Omega > \Delta\omega_s. \quad (6.96)$$

Ha az így előálló, ω -tól függő jelet periodikusnak képzeljük 2Ω periódushosszal⁵¹, akkor az Fourier-sorba fejthető, de a sort csak

⁵⁰Parseval tétele értelmében abszolút integrálható jelek amplitúdóspektruma nullához tart, ha a körfrekvencia végtelenhez tart (l. (6.65) összefüggés).

⁵¹Azért 2Ω , mert az amplitúdóspektrum páros függvény. Ezt így jelölték a 6.17. és 6.18. ábrákon is.

az $|\omega| < \Omega$ tartományban használjuk. Az alap „körfrekvenciája” ezen amplitúdóspektrumnak az idődimenziójú $\frac{2\pi}{2\Omega} = \frac{\pi}{\Omega}$ mennyiség, mivel a periódushossz 2Ω .

A levezetés mellőzésével mondjuk ki a következő, gyakorlat számára is lényeges un. *mintavételi tételt*: *bármely folytonos idejű, sávkorlátozott jel időfüggvénye (elméletileg) tetszőleges pontossággal meghatározható, ha ismert a jel nagysága adott diszkrét (mintavételi) időpillanatokban, és a minták legfeljebb $T_s = \frac{\pi}{\Omega}$ távolságra vannak egymástól.*⁵² A mintavételezés periódusideje és frekvenciája tehát

$$\boxed{T_s \leq \frac{\pi}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad f_s \geq \frac{\Omega}{\pi}.} \quad (6.97)$$

Ezt a frekvenciát *Nyquist-frekvenciának* is szokták nevezni és f_N -nel jelölni. A mintavételezés tehát erősen összefügg a jel spektrumával. Fontos megjegyezni, hogy ez csak közelítőleg teljesülhet, mert pl. a jelek valójában nem sávkorlátozottak.

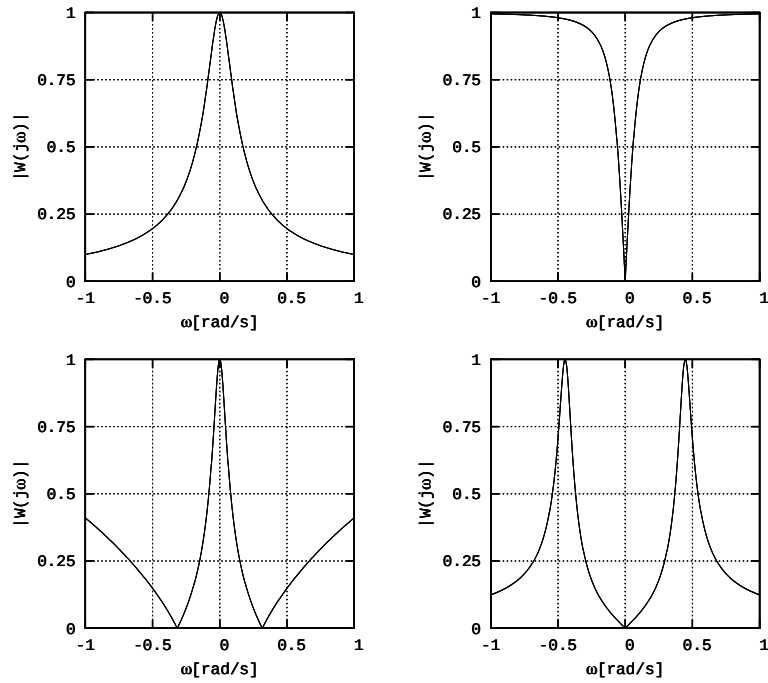
A mintavételezéssel a 10. fejezetben fogunk foglalkozni, mert ehhez szükségünk lesz a következő fejezetben tárgyalt ismeretekre is. Itt csak megemlítettük a spektrum és a mintavételezés kapcsolatát.

Szűrők

A négy alapvető szűrőkarakterisztika látható a 6.19. ábrán. Az *aluláteresztő-szűrő* a jel kisfrekvenciás komponenseit átengedi, a magasfrekvenciás komponenseket pedig elnyomja. A *felüláteresztő-szűrő* ennek pontosan a fordítottja. A *sáváteresztő-szűrő* egy bizonyos intervallumon kívül minden komponenset elnyom, a *sávzáró-szűrő* pedig egy bizonyos intervallumot elnyom, a többi pedig átengedi. A szűrők viselkedése nevükből tehát következik.

⁵²Az s index az angol *sampling* (mintavételi) szóra utal.

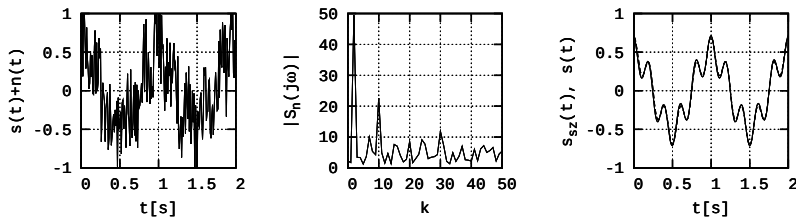
Ha pl. egy aluláteresztő szűrő bemeneti jele egy periodikus négyszögjel, amelynek nagy az amplitúdósűrűsége a magasfrekvencián is, akkor a szűrő ezen komponenseket elnyomja, következésképp a kimeneti jelben nem lesznek érzékelhetők a hirtelen ugrások. Ez a jelet „simítja”.



6.19. ábra. Tipikus szűrőkarakterisztikák: aluláteresztő, feluláteresztő, sáváteresztő, sávzáró

Zajszűrés

A zajos jelek szűrése a Fourier-analízis egyik fontos gyakorlati alkalmazása. Példaképp (6.20. ábra) vegyünk egy zajjal terhelt $s_n(t) = s(t) + n(t)$ jelet, ahol $s(t)$ -t akarjuk meghatározni és $n(t)$ egy additív véletlenszerű zaj. Határozzuk meg ennek $|S_n(j\omega)|$ amplitúdóspektrumát. Az amplitúdóspektrumból válasszuk ki a két legnagyobb értékű összetevőt, azaz egy adott szint alatt hagyjunk el (szűrjünk) minden komponenst, majd inverz Fourier-transzformációval állítsuk elő az $s_{sz}(t)$ szűrt jel időfüggvényét. Mindezt numerikus az ún. *gyors Fourier-transzformációval* végeztük (FFT, Fast Fourier Transform). A szűrt jel csak kis mértékben tér el az eredeti $s(t)$ jeltől.



6.20. ábra. A zajos jel, annak amplitúdóspektruma, valamint a Fourier-analízissel szűrt és az eredeti jel összehasonlítása

7. fejezet

DI rendszerek analízise a frekvenciatartományban

7.1. Szinuszos állandósult válasz számítása

7.1.1. A szinuszos jel

A diszkrét idejű szinuszos jel az $\omega = \frac{2\pi}{T}$ körfrekvenciájú folytonos idejű szinuszos jelből (l. előző fejezet) származtatható, ha abból T_s időközönként mintákat veszünk.

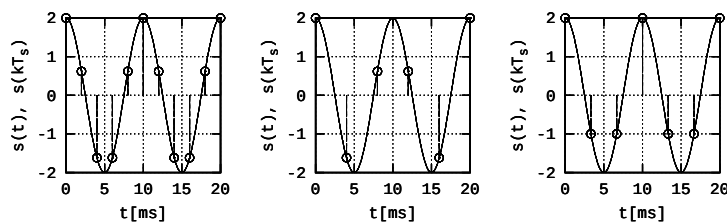
Válasszuk először a mintavételi periódusidőt $T_s = \frac{T}{K}$ ($K > 0$ és $K \in \mathbb{Z}$) értékűnek. Ekkor egy periódusból pontosan K számú mintát veszünk, ami egy diszkrét idejű szinuszos jelet eredményez. Abban az esetben, ha a mintavételi periódusidőt a kétszeresére növeljük, akkor két periódusból veszünk K számú mintát, ami szintén egy diszkrét idejű szinuszos jel lesz. Ezt legfeljebb $K - 1$ számú periódusra végezhetjük el, az eredmény pedig mindig egy diszkrét idejű szinuszos jel. Ha ugyanis K számú mintát vennénk egyetlen K számú periódusból, akkor minden mintavétellel a jel ugyanazon értékét kapnánk, ami pedig egy konstans értékű jel lenne. Jelöljük a minták számát K -val, és M -mel a folytonos idejű

jel figyelembe vett periódusainak a számát.

Nem szükségszerű tehát az, hogy a mintavételezés T_s periódusidejének egész számú többszöröse egyenlő legyen a folytonos idejű jel T periódusidejével, azonban a mintavételezési idő egész számú többszöröse egyenlő kell legyen a folytonos idejű jel periódusidejének egész számú többszörösével. Az előbbi jelölések alapján tehát

$$MT = KT_s \Rightarrow \frac{M}{K} = \frac{T_s}{T}. \quad (7.1)$$

Ellenkező esetben a kapott diszkrét idejű jel nem lesz periodikus. Az elmondottak illusztrálása céljából vegyük szemügyre a 7.1. ábrát. Itt egy folytonos idejű szinuszos jel látható ($T = 10$ ms), amelyből három módon mintákat vettünk. Az első ábrán $T_s = 2$ ms. Ebben az esetben 5 mintavételi periódus után pontosan elérünk egy periódus végére, azaz $M = 1$ és $K = 5$. A második ábrán $T_s = 4$ ms, s látható, hogy 2 periódus szükséges ahhoz, hogy a mintavett jel ismétlődjék, azaz $M = 2$ periódus szükséges a $K = 5$ mintához. A harmadik ábrán $T_s = \frac{10}{3}$ ms, s itt $M = 1$ és $K = 3$. A lényeg tehát az, hogy az $\frac{M}{K}$ hányados két pozitív egész szám hányadosa, azaz egy racionális szám legyen. Ekkor a mintavételezéssel kapott diszkrét idejű jel is periodikus. Az ábrákból kitűnik, hogy ha $M = 1$, akkor egy $\vartheta = \frac{2\pi}{K}$ körfrekvenciájú szinuszos jelet kapunk, ugyanis ekkor a folytonos idejű



7.1. ábra. Folytonos idejű periodikus jelből mintavételezéssel kapott diszkrét idejű periodikus jelek

szinuszos jel egyetlen periódusából veszünk K számú mintát.

Egy folytonos idejű szinuszos jel időfüggvénye a (6.1) összefüggés szerint a következő:

$$s(t) = S \cos(\omega t + \rho),$$

ahol $S > 0$ a jel *csúcsértéke*, vagy *amplitúdója*, ρ pedig a jel *kezdőfázisa* ($0 \leq \rho < 2\pi$, vagy $-\pi \leq \rho < \pi$). A mintavételezés során a folytonos idejű jelből $t = kT_s$ időpillanatokban veszünk mintát:

$$s[k] = s(t)|_{t=kT_s} = S \cos(\omega kT_s + \rho),$$

ahol $\vartheta = \omega T_s$ az un. *diszkrét idejű körfrekvencia*. A diszkrét idejű szinuszos jel időfüggvénye tehát a következő:

$$\boxed{s[k] = S \cos(\vartheta k + \rho).} \quad (7.2)$$

Láttuk, hogy ez csak akkor periodikus, ha a

$$\vartheta = \omega T_s = \frac{2\pi}{T} T_s = 2\pi \frac{T_s}{T}$$

körfrekvenciában szereplő $\frac{T_s}{T}$ hányados (7.1) szerint egy racionális szám, s mint ilyen felírható két (jelen esetben pozitív, hiszen csak pozitív körfrekvenciáról beszélünk) egész szám hányadosaként, azaz $\vartheta = 2\pi \frac{M}{K}$, ahol $M \in \mathbb{N}$ és $K \in \mathbb{N}$ és egyik sem nulla. Ezt úgy is mondhatnánk, hogy a diszkrét idejű jel akkor periodikus, ha a $\frac{\vartheta}{2\pi}$ hányados egy racionális számot ad eredményül:

$$\boxed{\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{T_s}{T} = \frac{M}{K} \in \mathbb{Q}.} \quad (7.3)$$

Például az $s[k] = 2 \cos(3k)$ diszkrét idejű jel nem periodikus, hiszen $\vartheta = 3$, s így a $\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{1.5}{\pi}$ hányados irracionális szám. Ugyan-csak nem periodikus az $s[k] = 3 \cos\left(\sqrt{2}\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{2}\right)$ jel sem, hiszen a

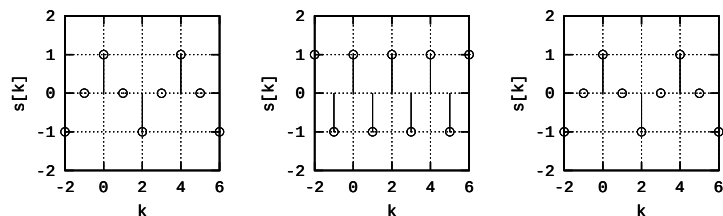
$\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{6}$, ami szintén irracionális. Az $s[k] = 2 \cos(\frac{2}{3}\pi k)$ jel viszont periodikus, hiszen a $\frac{\vartheta}{2\pi} = \frac{1}{3}$ egy racionális szám.

A diszkrét idejű jel periódusa (diszkrét idejű periódusideje) K , ami egy mértékegység nélküli pozitív egész szám, a ϑ körfrekvencia SI mértékegysége pedig radián.

A diszkrét idejű szinuszos jel természetesen értelmezhető a folytonos idejű jeltől függetlenül is:

$$s[k] = S \cos(\vartheta k + \rho) = S \cos\left(2\pi \frac{M}{K} k + \rho\right), \quad (7.4)$$

Diszkrét idejű szinuszos jelekre példákat láthatunk a 7.2. ábrán. Látható, hogy különböző K és M értékek ugyanazon diszkrét idejű jelet eredményezhetik.



7.2. ábra. Diszkrét idejű szinuszos jelek $K = 4$ periódussal, $M = 1$, $M = 2$ és $M = 3$ értékek mellett

7.1.2. A szinuszos jel komplex leírása

A diszkrét idejű szinuszos jelek leírására ugyanolyan módon alkalmazzuk a *komplex leírást*¹, mint ahogy a folytonos idejű jelek

¹A komplex számok bevezetését itt nem ismételjük meg, a részleteket l. 142. oldalon.

esetében, azaz:

$$\boxed{s[k] = S \cos(\vartheta k + \rho) = \mathcal{R}e \left\{ S e^{j(\vartheta k + \rho)} \right\} = \mathcal{R}e \left\{ S e^{j\vartheta k} e^{j\rho} \right\},} \quad (7.5)$$

ahonnan

$$\boxed{\overline{S} = S e^{j\rho} \quad \Rightarrow \quad s[k] = \mathcal{R}e \left\{ \overline{S} e^{j\vartheta k} \right\} = \mathcal{R}e \left\{ \overline{s}[k] \right\}.} \quad (7.6)$$

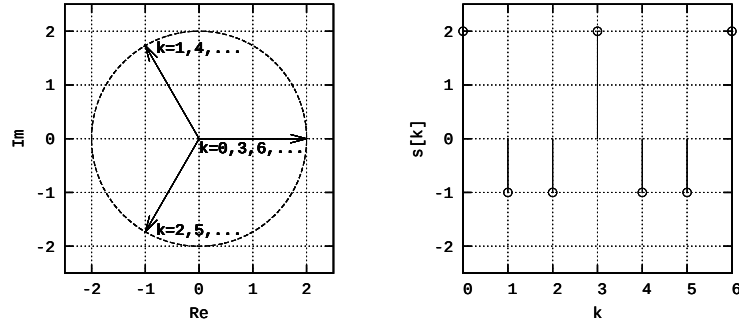
Az $\overline{S}$ neve ebben az esetben is *komplex amplitúdó*, vagy *komplex csúcsérték*, amely két információt hordoz: a jel S csúcsértékét és ρ kezdőfázisát. A diszkrét idejű jel *komplex pillanatértéke* pedig az $\overline{s}[k] = \overline{S} e^{j\vartheta k}$ kifejezés, amely egy forgó fázor: abszolút értékét és kezdőfázisát az S csúcsérték és a ρ szög adja, helyzete, azaz ahova a vektor mutat az $e^{j\vartheta k}$ fázor határozza meg minden egyes k időpillanatban. A fázor minden egyes k ütemben a ϑk szög irányába mutat. Ez a fázor az óramutató járásával ellentétes irányban ϑ körfrekvenciával forog, és a valós tengelyre vett vetülete, azaz a komplex pillanatérték valós része adja a (7.2) időfüggvényt. A képzetes tengelyre vett vetülete, azaz a komplex pillanatérték képzetes része egy ugyanilyen amplitúdójú, fázisszögű és körfrekvenciájú szinuszos jel.

Az elmondottak illusztrálása céljából az $s[k] = 2 \cos(\frac{2\pi}{3}k)$ jel fázorját és időfüggvényét vázoltuk fel a 7.3. ábrán.

Ha a gerjesztőjel körfrekvenciája ϑ és a rendszer *lineáris*, akkor a rendszer kimeneti jelének a körfrekvenciája is ϑ lesz. Azaz a gerjesztés és a válasz körfrekvenciája megegyezik. Ezért az $e^{j\vartheta k}$ tényezővel nem is kell foglalkoznunk, mert az csak a körfrekvenciát tartalmazza.

A következő összefüggéseket a későbbiekben többször is alkalmazni fogjuk.

1.) Diszkrét idejű jelek esetében is igaz, hogy az $s_1[k]$ és $s_2[k]$ szinuszos jelek összege és különbsége a jelek komplex



7.3. ábra. Egy diszkrét idejű szinuszos jel komplex pillanatértékének és időfüggvényének illusztrációja

csúcsértékének meghatározása után a következőképp képezhető:

$$\boxed{s[k] = s_1[k] \pm s_2[k] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{S} = \overline{S}_1 \pm \overline{S}_2.} \quad (7.7)$$

2.) Egy K valós számmal végzett szorzás a vektor hosszát, azaz a csúcsértéket változtatja meg:

$$\boxed{y[k] = K s[k] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Y} = K \overline{S}.} \quad (7.8)$$

Ha $K > 0$, akkor $y[k]$ és $s[k]$ fázisban vannak, ha $K < 0$, akkor egymáshoz képest 180° -kal vannak eltolva.

3.) Szükségünk lesz a késleltetett jel komplex csúcsértékére. Írjuk fel tehát az $s[k]$ jel késleltetett megfelelőjének időfüggvényét, felhasználva a komplex csúcsérték és a komplex pillanatérték (7.6) definícióját:

$$s[k-1] = \mathcal{R}e \left\{ \overline{S} e^{j\vartheta(k-1)} \right\} = \mathcal{R}e \left\{ \overline{S} e^{j\vartheta k} e^{-j\vartheta} \right\}. \quad (7.9)$$

Ezen összefüggésből látható, hogy az időbeli késleltetés a komplex csúcsértékekre áttérve $e^{-j\vartheta}$ tényezővel történő szorzást jelent, azaz

$$\boxed{y[k] = s[k-1] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Y} = \overline{S} e^{-j\vartheta},} \quad (7.10)$$

azaz a késleltetett $y[k]$ jel fázisban ϑ szöggel késik az $s[k]$ jelhez képest. Általánosan, K ütemmel történő eltolásra a következő összefüggés áll fenn:

$$\boxed{y[k] = s[k - K] \Leftrightarrow \overline{Y} = \overline{S}e^{-j\vartheta K}.} \quad (7.11)$$

Az állapotváltozós leírás alkalmazása során pedig szükségünk lesz az 1 ütemmel siettetett jel komplex csúcértékére, ami az előzőekből már következik:

$$\boxed{y[k] = x[k + 1] \Leftrightarrow \overline{Y} = \overline{X}e^{j\vartheta}.} \quad (7.12)$$

7.1.3. Az átviteli karakterisztika

Az átviteli karakterisztika és az átviteli együttható fogalma, a válaszjel számítása

Ha egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns és kauzális rendszer *gerjesztés-válasz stabilis*, akkor a teljes válasz tranziens összetevője nullához tart és a válasz egy idő után megegyezik a stacionárius összetevővel. Ha a gerjesztés szinuszos lefutású, akkor a válaszjel is szinuszos lesz ugyanazon körfrekvenciával. Ez a próbafüggvény-módszerből is következik. Legyen hát a gerjesztés (a vizsgálójel) is és a válasz is szinuszos:

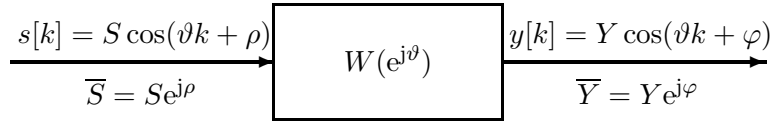
$$s[k] = S \cos(\vartheta k + \rho), \quad y[k] = Y \cos(\vartheta k + \varphi). \quad (7.13)$$

Írjuk fel ezen jelek komplex csúcértékét:

$$\overline{S} = Se^{j\rho}, \quad \overline{Y} = Ye^{j\varphi}, \quad (7.14)$$

majd képezzük ezek hányadosát, ami az un. *átviteli karakterisztika*:

$$\boxed{\overline{W} = W(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}}.} \quad (7.15)$$



Az átviteli karakterisztika a ϑ körfrekvencia függvénye és adott körfrekvencián (ami pl. a gerjesztés körfrekvenciája) megadja a válaszjel komplex csúcsértékét a gerjesztés komplex csúcsértékének függvényében:

$$\boxed{\bar{Y} = \bar{W} \bar{S}}, \quad (7.16)$$

amelyből a válasz $y[k]$ időfüggvénye meghatározható a komplex csúcsérték definíciója alapján. Az átviteli karakterisztika egy adott körfrekvencián egy komplex szám, amit *átviteli együttható*-nak hívunk. Az átviteli együttható megadja azt, hogy a gerjesztés által megszabott körfrekvencián a rendszer hatására mennyivel fog különbözni a válaszjel amplitúdója és fázisa a gerjesztés amplitúdójától és fázisától. Megfordítva tehát azt mondhatjuk, hogy ha az átviteli együtthatót több frekvencián meghatározzuk, akkor előállíthatjuk az átviteli karakterisztikát. Adott körfrekvencián tehát az átviteli karakterisztika az átviteli együtthatót adja: $\bar{W} = K e^{j\phi}$, ahol $K = |\bar{W}|$, az átviteli együttható abszolút értéke, $\phi = \arg \bar{W}$ pedig az átviteli együttható szöge a vizsgált körfrekvencián. A válaszjel ezen a körfrekvencián tehát az alábbiak szerint számítható:

$$\boxed{\bar{Y} = \bar{W} \bar{S} = K e^{j\phi} S e^{j\rho} = K S e^{j(\phi+\rho)},} \quad (7.17)$$

s így a válaszjel időfüggvénye a következő:

$$\boxed{y[k] = \underbrace{KS}_Y \cos(\vartheta k + \underbrace{(\phi + \rho)}_\varphi) = Y \cos(\vartheta k + \varphi).} \quad (7.18)$$

Megadtuk tehát az átviteli karakterisztika definícióját és azt, hogy hogyan lehet alkalmazni a szinuszosan gerjesztett válasz

számításában. A következőkben megvizsgáljuk, hogy milyen kapcsolat áll fenn az időtartománybeli analízis során megismert rendszeregyenlet, valamint az állapotváltozós leírás és az átviteli karakterisztika között.

Az átviteli karakterisztika meghatározása a rendszeregyenlet alapján

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns és *gerjesztés-válasz stabilis* rendszer rendszeregyenletének alakja a következő:

$$y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^m b_i s[k-i]. \quad (7.19)$$

A gerjesztés is és a válasz is időben szinuszosan változik. A cél a rendszeregyenlet ismeretében a (7.15) összefüggésnek megfelelő átviteli karakterisztika meghatározása. *Ha a rendszer nem gerjesztés-válasz stabilis, akkor ezen levezetés eredményeképp kapott átviteli karakterisztikával számított gerjesztett válasznak nincs fizikai tartalma.*

Most egyszerűen térjünk át a komplex leírási módra, azaz használjuk fel a komplex csúcserő fogalmát valamint a (7.10) és a (7.11) összefüggéseket:

$$\bar{Y} + \sum_{i=1}^n a_i \bar{Y} e^{-j\vartheta i} = \sum_{i=0}^m b_i \bar{S} e^{-j\vartheta i}. \quad (7.20)$$

Ezt megtehetjük, ugyanis, ha ezen egyenletben szereplő összes komplex csúcserőket szorozzuk $e^{j\vartheta k}$ -val, akkor a komplex pillanatértékeket kapjuk, majd ha ezeknek vesszük a valós részét, akkor pontosan az időtartománybeli analízisből ismert rendszeregyenlethez jutunk. Ebből a $\bar{W} = \frac{\bar{Y}}{\bar{S}}$ átviteli karakterisztika kifejezhető:

$$\boxed{\bar{W} = \frac{\bar{Y}}{\bar{S}} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i e^{-j\vartheta i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-j\vartheta i}},} \quad (7.21)$$

vagy részletesen kiírva

$$\boxed{\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + b_m e^{-jm\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta} + a_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + a_n e^{-jn\vartheta}},} \quad (7.22)$$

azaz az átviteli karakterisztika az $e^{j\vartheta}$ változó racionális függvénye valós együtthatókkal, vagyis az átviteli karakterisztika egy polinom per polinom alakú kifejezés.

Egy adott ϑ körfrekvencián ez a tört számítható (átviteli együttható), és a (7.16) összefüggésnek megfelelően a válaszjel komplex csúcértéke meghatározható.

Ezen műveletsor természetesen visszafelé is elvégezhető. Ha tehát ismert egy rendszer átviteli karakterisztikája, akkor annak rendszeregynlete meghatározható, hiszen az átviteli karakterisztika számlálójában és nevezőjében szereplő b_i és a_i együtthatók megegyeznek a rendszeregynlet jobb- és bal oldalán szereplő együtthatókkal. Az átviteli karakterisztika nevezője tehát pontosan a rendszeregynlet ismeretében felírható karakterisztikus polinom, amelynek ismeretében a rendszer gerjesztés-válasz stabilitása eldönthető (l. 113. oldal).

Példa. Határozzuk meg az alábbi rendszeregynlettel leírt rendszer átviteli karakterisztikáját és adjuk meg a gerjesztett válasz időfüggvényét, ha $s[k] = 5 \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$y[k] - y[k-1] + 0,24y[k-2] = s[k] - s[k-2].$$

Megoldás. A rendszeregynlet a komplex csúcérték definícióját felhasználva a következőképp írható át:

$$\overline{Y} - \overline{Y}e^{-j\vartheta} + 0,24\overline{Y}e^{-j2\vartheta} = \overline{S} - \overline{S}e^{-j2\vartheta},$$

amiből az átviteli karakterisztika közvetlenül felírható:

$$\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{1 - e^{-j2\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24e^{-j2\vartheta}} = \frac{e^{j2\vartheta} - 1}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,24}.$$

A rendszer tehát gerjesztés válasz-stabilis, mivel két sajátértéke egységsugarú körön belül van: $\lambda_1 = 0,6$, és $\lambda_2 = 0,4$.

A gerjesztés által megszabott $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ rad körfrekvencián az átviteli együtthatót kapjuk meg:

$$\begin{aligned}\overline{W}|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &= \frac{e^{j2\frac{\pi}{2}} - 1}{e^{j2\frac{\pi}{2}} - e^{j\frac{\pi}{2}} + 0,24} = \\ &= \frac{\cos \pi + j \sin \pi - 1}{\cos \pi + j \sin \pi - (\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}) + 0,24} = \\ &= \frac{-2}{-0,76 - j} = \frac{2e^{j\pi}}{1,256e^{-j2,22}} = 1,592e^{j5,36} = 1,592e^{-j0,92}.\end{aligned}$$

Az átviteli együttható tehát egy komplex szám, melynek értéke a gerjesztés körfrekvenciájától és természetesen a rendszertől függ. Ennek és a gerjesztés komplex csúcserkének ($\overline{S} = 5e^{j\frac{\pi}{4}}$) segítségével a rendszer válaszjelének komplex csúcserké felírható:

$$\overline{Y} = \overline{W}|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \overline{S} = 1,592e^{-j0,92} 5e^{j\frac{\pi}{4}} = 7,96e^{-j0,13},$$

melynek a következő időfüggvény felel meg:

$$y[k] = 7,96 \cos\left(\frac{\pi}{2}k - 0,13\right).$$

Az átviteli karakterisztika meghatározása az állapotváltozós leírás alapján

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns és *gerjesztés-válasz stabilis* SISO-rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja a következő:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}s[k], \\ y[k] &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}[k] + Ds[k],\end{aligned}\tag{7.23}$$

ahol $\mathbf{x}[k]$ és $\mathbf{x}[k+1]$ az *állapotvektor* k -adik és $(k+1)$ -edik ütembeli értéke, $s[k]$ és $y[k]$ a rendszer szinuszos gerjesztése és válasza, $\mathbf{A}$ a *rendszermátrix*, a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}^T$ vektorok, valamint

a D skálár pedig a normálalakban szereplő megfelelő együtt-hatásokat tartalmazza. Ha a rendszer nem gerjesztés-válasz stabilis, akkor ezen levezetés eredményeképp kapott átviteli karakterisztikával számított gerjesztett válasznak nincs fizikai tartalma. Először SISO-rendszerekkel foglalkozunk, majd a kapott eredményt általánosítjuk.

Térjünk ismét át a komplex leírási módra a komplex csúcsérték fogalmának, valamint a (7.12) összefüggésnek megfelelően:

$$\begin{aligned} e^{j\vartheta} \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{b} \bar{S}, \\ \bar{Y} &= \mathbf{c}^T \bar{\mathbf{X}} + D \bar{S}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Az első egyenletből $\bar{\mathbf{X}}$ kifejezhető:

$$e^{j\vartheta} \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{b} \bar{S} \quad \Rightarrow \quad \left(e^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A} \right) \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{b} \bar{S},$$

azaz

$$\bar{\mathbf{X}} = \left(e^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{b} \bar{S}, \quad (7.25)$$

ahol $\mathbf{E}$ az N -edrendű egységmátrix. A válaszjel komplex csúcsértékét megkapjuk, ha a kapott eredményt $\bar{Y}$ kifejezésébe visszahelyettesítjük:

$$\bar{Y} = \left[\mathbf{c}^T \left(e^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{b} + D \right] \bar{S}. \quad (7.26)$$

Utóbbiból az átviteli karakterisztika kifejezhető:

$$\boxed{\bar{W} = \frac{\bar{Y}}{\bar{S}} = \mathbf{c}^T \left(e^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{b} + D,} \quad (7.27)$$

azaz egy komplex elemű mátrixot kell invertálni. Az inverz mátrix kifejezésébe helyettesítsük be a már ismert összefüggést:

$$\bar{W} = \frac{\bar{Y}}{\bar{S}} = \mathbf{c}^T \frac{\text{adj} \left(e^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A} \right)}{|e^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}|} \mathbf{b} + D,$$

majd hozzunk közös nevezőre:

$$\overline{W} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + |\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}| D}{|\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}|}. \quad (7.28)$$

Az így kapott átviteli karakterisztika is az $\mathbf{e}^{j\vartheta}$ változó racionális függvénye valós együtthatókkal, ami egy polinom per polinom alakú kifejezés. A nevező polinomja alakilag megegyezik a $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|$ determinánsból képzett polinommal. Ha ezen rendszer aszimptotikusan stabil, akkor gerjesztés-válasz stabil is (a feltételeket l. 113. oldalon).

Mindez MIMO-rendszerekre a következőképp írható fel:

$$\overline{\mathbf{W}} = \mathbf{C} \left(\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}, \quad (7.29)$$

ami az *átvitelikarakterisztika-mátrix*, melynek ij idnexű eleme megadja az i -edik kimenet és a j -edik bemenet között fennálló átviteli karakterisztikát, miközben más bemenetek jelmentesek:

$$\overline{W}_{ij} = \left. \frac{\overline{Y}_i}{\overline{S}_j} \right|_{\overline{S}_k=0, k \neq j}, \quad i = 1, \dots, N_y, j = 1, \dots, N_s. \quad (7.30)$$

Példa. Határozzuk meg az alábbi állapotváltozós leírás által megadott rendszer átviteli karakterisztikáját és adjuk meg a gerjesztett válasz időfüggvényét, ha $s[k] = 5 \cos(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{4})$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \begin{bmatrix} 0 & -0,24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + \begin{bmatrix} -1,24 \\ 1 \end{bmatrix} s[k], \\ y[k] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}[k] + s[k]. \end{aligned}$$

Megoldás. Ezt a feladatot kétféleképp is megoldhatjuk. Az (a) pontban az itt bemutatott módszert követjük, a (b) pontban az

állapotváltozós leírást mint egyenletrendszert kezeljük, és az $\overline{Y}/\overline{S}$ hányadost fejezzük ki belőle.

(a) A levezetés alapján írhatjuk, hogy

$$\overline{W} = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + |\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}| D}{|\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}|}.$$

Számítsuk ki először az ezen összefüggésben szereplő adjungáltat és determinánst:

$$\text{adj} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{j\vartheta} & 0,24 \\ -1 & \mathbf{e}^{j\vartheta} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{j\vartheta} - 1 & -0,24 \\ 1 & \mathbf{e}^{j\vartheta} \end{bmatrix},$$

és

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}^{j\vartheta} & 0,24 \\ -1 & \mathbf{e}^{j\vartheta} - 1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}^{j\vartheta} (\mathbf{e}^{j\vartheta} - 1) + 0,24 = \mathbf{e}^{j2\vartheta} - \mathbf{e}^{j\vartheta} + 0,24.$$

A számlálóban szereplő $\mathbf{c}^T \text{adj}(\mathbf{e}^{j\vartheta} \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b}$ szorzat így a következőképp alakul:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{j\vartheta} - 1 & -0,24 \\ 1 & \mathbf{e}^{j\vartheta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,24 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - 1,24\mathbf{e}^{j\vartheta} \\ -1,24 + \mathbf{e}^{j\vartheta} \end{bmatrix},$$

ami $-1,24 + \mathbf{e}^{j\vartheta}$. Ehhez még hozzá kell adni a determináns D -szeresét (ami most 1), s így az átviteli karakterisztika a következő lesz:

$$\overline{W} = \frac{\mathbf{e}^{j2\vartheta} - 1}{\mathbf{e}^{j2\vartheta} - \mathbf{e}^{j\vartheta} + 0,24}.$$

A végeredmény ugyanaz lett, mint az előző pontban, amikor a rendszeregyenletből indultunk ki. Ennek oka az, hogy a megadott rendszeregyenlet és a most vizsgált állapotváltozós leírás ugyanazon rendszert írják le.

Határozzuk meg ezután a gerjesztett választ is. A gerjesztés által megszabott $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ rad körfrekvencián az átviteli együtthatót

kapjuk meg:

$$\begin{aligned}\overline{W}|_{\vartheta=\frac{\pi}{3}} &= \frac{e^{j2\frac{\pi}{3}} - 1}{e^{j2\frac{\pi}{3}} - e^{j\frac{\pi}{3}} + 0,24} = \\ &= \frac{\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} - 1}{\cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} - (\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) + 0,24} = \\ &= \frac{-1,5 + j0,866}{-0,76} = \frac{1,732e^{j2,62}}{0,76e^{j\pi}} = 2,279e^{-j0,52}.\end{aligned}$$

Az átviteli együttható ezen értékének és a gerjesztés komplex csúcsértékének ($\overline{S} = 5e^{j\frac{\pi}{4}}$) segítségével a rendszer válaszjelének komplex csúcsértéke felírható:

$$\overline{Y} = \overline{W}|_{\vartheta=\frac{\pi}{3}} \overline{S} = 2,279e^{-j0,52} 5e^{j\frac{\pi}{4}} = 11,395e^{j0,27},$$

melynek a következő időfüggvény felel meg:

$$y[k] = 11,395 \cos\left(\frac{\pi}{3}k + 0,27\right).$$

Érdemes megfigyelni, hogy ugyanazon rendszer különböző körfrekvenciájú jelekre adott válasza különböző. A bemenet és a kimenet közti kapcsolatot ebben az esetben az átviteli karakterisztika biztosítja.

A példákból az is érzékelhető, hogy a nem belépő szinuszos gerjesztésre adott stacionárius válasz számítása a komplex számítási módszerrel sokkal egyszerűbb, mint az időtartományban. Ennek feltétele azonban az, hogy a rendszer gerjesztés-válasz stabilis legyen.

(b) Ezen példán keresztül bemutatjuk, hogy az állapotváltozós leírással adott rendszer átviteli karakteristikája nem csak a (7.27) vagy a (7.28) szerint határozható meg. A következőkben bemutatott módszer azonban egyenletrendszer megoldását igényli. Az állapotváltozós leírás normálalakja

időtartományban és komplex csúcértékekkel a következő:²

$$\begin{cases} x_1[k+1] = -0,24x_2[k] - 1,24s[k], \\ x_2[k+1] = x_1[k] + x_2[k] + s[k] \\ y[k] = x_2[k] + s[k]. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{j\vartheta} \bar{X}_1 = -0,24\bar{X}_2 - 1,24\bar{S}, \\ e^{j\vartheta} \bar{X}_2 = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \bar{S} \\ \bar{Y} = \bar{X}_2 + \bar{S}. \end{cases}$$

Ezen egyenletrendszer úgy kell alakítani, hogy abból az átviteli karakterisztika alakját kapjuk. A megoldás menete a következő. Fejezzük ki az első két egyenletből az ismeretlennek tekintett állapotváltozók komplex csúcértékét az ismertnek tekintett gerjesztés $\bar{S}$ komplex csúcértékével, majd helyettesítsük vissza azokat a válasz komplex csúcértékét megadó egyenletbe. Az állapotváltozókat tehát ki kell ejteni az egyenletekből. Ezáltal kapunk egy olyan egyenletet, amely csak az $\bar{Y}$ -t és az $\bar{S}$ -et tartalmazza. Jelen példánál maradva, fejezzük ki pl. az $\bar{X}_1$ változót az első egyenletből úgy, hogy $e^{j\vartheta}$ -val elosztjuk azt:

$$\bar{X}_1 = -0,24e^{-j\vartheta}\bar{X}_2 - 1,24e^{-j\vartheta}\bar{S},$$

majd helyettesítsük vissza ezt a második egyenletbe:

$$e^{j\vartheta}\bar{X}_2 = -0,24e^{-j\vartheta}\bar{X}_2 - 1,24e^{-j\vartheta}\bar{S} + \bar{X}_2 + \bar{S}.$$

Szorozzuk be ezen egyenletet $e^{j\vartheta}$ -val, s rendezzük a kapott egyenletet, majd fejezzük ki ebből $\bar{X}_2$ -öt:

$$(e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,24)\bar{X}_2 = (e^{j\vartheta} - 1,24)\bar{S} \Rightarrow \bar{X}_2 = \frac{e^{j\vartheta} - 1,24}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,24}\bar{S},$$

majd helyettesítsük ezt be $\bar{Y}$ egyenletébe:

$$\bar{Y} = \frac{e^{j\vartheta} - 1,24}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,24}\bar{S} + \bar{S} = \frac{e^{j2\vartheta} - 1}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,24}\bar{S},$$

amelyben az (a) pontban is meghatározott átviteli karakterisztika felismerhető.

²Egy késleltető bemenete tehát az állapotváltozó komplex csúcértéke szorozva $e^{j\vartheta}$ -val, kimenete pedig az állapotváltozó komplex csúcértéke.

A (b) pontban közölt megoldás alacsony rendszám esetén nagyon egyszerű: egy egyenletrendszert kell a kívánt alakra hozni, amelyben a gerjesztés komplex csúcserőértékét ismertnek tekintjük, s minden más változót ismeretlennek, de értelemszerűen csak a válasz komplex csúcserőértékére kell koncentrálnunk. Az (a) pontban közölt megoldás csak alacsony fokszám ($N = 2$ esetleg $N = 3$) esetén végezhető el kényelmesen papíron.

Az átviteli karakterisztika ábrázolása

Az átviteli karakterisztika ábrázolására diszkrét idejű rendszerek esetében is két módszer áll rendelkezésre: a *Nyquist-diagram* és az *amplitúdó-karakterisztika*, valamint a *fáziskarakterisztika* görbéjének ábrázolása (esetenként a *Bode-diagram*). Mindkettő a $\overline{W}$ átviteli karakterisztika

$$\boxed{\overline{W} = W(e^{j\vartheta}) = K(\vartheta)e^{j\phi(\vartheta)}} \quad (7.31)$$

alakjában található $K(\vartheta)$ un. *amplitúdó-karakterisztika* és $\phi(\vartheta)$ un. *fáziskarakterisztika* ábrázolását realizálja eltérő módon. Ezek ϑ különböző értékeire más és más értékeket adnak. A diagramok hasonlóan vehetők fel, mint ahogy azt a folytonos idejű rendszereknél tárgyaltuk, de az amplitúdó-karakterisztikát nem számítjuk át decibel egységbe, ezért nem is hívjuk Bode-diagramnak. Ha azonban az amplitúdó-karakterisztika értéke nagy tartományt ölel fel, akkor célszerű lehet decibel egységben ábrázolni.

A diagramok tulajdonságait a korábbi példa kapcsán mutatjuk be:

$$\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{e^{j2\vartheta} - 1}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,24}.$$

Írjuk át az $e^{j\vartheta}$ tényezőt az Euler-alaknak megfelelően, azaz $e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta$, majd helyettesítsük ezt be az átviteli karakterisz-

tikába és csoportosítsuk a valós és képzetes részeket:

$$\begin{aligned}\overline{W} &= \frac{\cos 2\vartheta + j \sin 2\vartheta - 1}{\cos 2\vartheta + j \sin 2\vartheta - \cos \vartheta - j \sin \vartheta + 0,24} = \\ &= \frac{(\cos 2\vartheta - 1) + j \sin 2\vartheta}{(\cos 2\vartheta - \cos \vartheta + 0,24) + j(\sin 2\vartheta - \sin \vartheta)}.\end{aligned}$$

Látható, hogy mind a számlálóban, mind a nevezőben a valós rész csak a ϑ körfrekvencia (és többszöröseinek) koszinusz függvényét és egy konstans, a képzetes rész pedig csak a ϑ körfrekvencia (és többszöröseinek) szinuszos függvényét tartalmazza. Ez általánosan is így van, ami az Euler-alakból következik.

Az amplitúdókarakterisztika a kapott komplex függvény abszolút értéke, s mivel ez egy tört, ezért a számláló abszolút értékét el kell osztani a nevező abszolút értékével:

$$K(\vartheta) = \sqrt{\frac{(\cos 2\vartheta - 1)^2 + (\sin 2\vartheta)^2}{(\cos 2\vartheta - \cos \vartheta + 0,24)^2 + (\sin 2\vartheta - \sin \vartheta)^2}}.$$

A fáziskarakterisztika úgy számítható, hogy a számláló fázisából levonjuk a nevező fázisát:

$$\varphi(\vartheta) = \arctg \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta - 1} - \arctg \frac{\sin 2\vartheta - \sin \vartheta}{\cos 2\vartheta - \cos \vartheta + 0,24}.$$

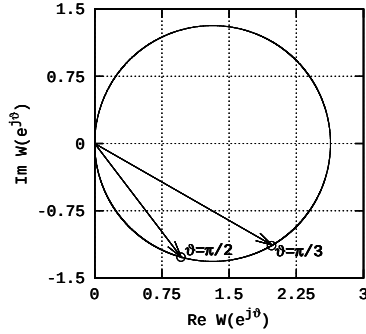
Az amplitúdókarakterisztika is és a fáziskarakterisztika is koszinuszos és szinuszos tényezőkből áll, amelyek 2π szerint periodikus függvények.

Ennek következtében a két karakterisztika is 2π szerint periodikus a ϑ változóban.

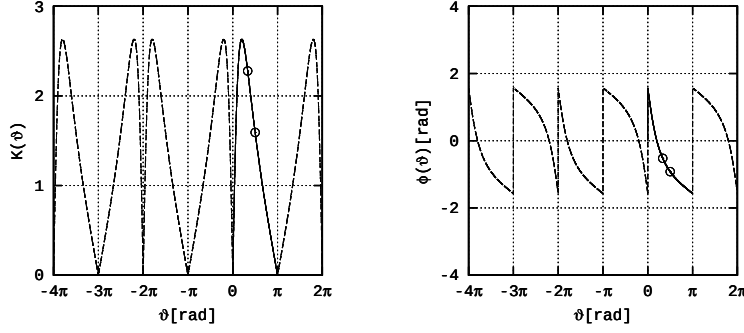
Az amplitúdókarakterisztika ezen túlmenően páros függvény, a fáziskarakterisztika pedig páratlan függvény. A két karakterisztikát elegendő tehát pl. a $\vartheta \in [0, \dots, \pi]$, vagy a $\vartheta \in [-\pi/2, \dots, \pi/2]$ tartományban ismerni.

A diagramok felvétele során tehát ki kell számolni az átviteli együtthatót különböző frekvenciákon a $\vartheta \in [0, \dots, \pi]$ (vagy a

$\vartheta \in [-\pi/2, \dots, \pi/2]$) zárt intervallumban (pár pontban általában elegendő), majd a kapott átviteli együtthatóknak megfelelő pontokat össze kell kötni. A példában szereplő átviteli karakterisztika Nyquist-diagramja és amplitúdókarakterisztikája, valamint fáziskarakterisztikája látható a 7.4. és a 7.5. ábrákon, ahol jól megfigyelhetők az említett páros és páratlan tulajdonságok, valamint a periodicitás. Ezen tulajdonságok felhasználásával az amplitúdókarakterisztika és a fáziskarakterisztika tetszőleges intervallumban megrajzolható a folytonos vonallal rajzolt görbe ismeretében. Mivel az amplitúdókarakterisztika páros függvény és a fáziskarakterisztika páratlan függvény, ezért a Nyquist-diagram a valós tengelyre szimmetrikus, azaz a $\vartheta \in [0, \dots, \pi]$ intervallumnak megfelelő Nyquist-diagram ismeretében a $\vartheta \in [-\pi, \dots, 0]$ intervallumnak megfelelő diagram tükrözéssel meghatározható. A kapott görbe pedig 2π szerint periodikus. Mindkét diagramon bejelöltük a $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ rad és $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ rad körfrekvenciákon számított átviteli együtthatókat.



7.4. ábra. A példában szereplő átviteli karakterisztika Nyquist-diagramja



7.5. ábra. A példában szereplő átviteli karakterisztika amplitúdó- és fáziskarakteristikája

7.2. Periodikus állandósult válasz számítása

Diszkrét idejű jelek esetében is beszélhetünk általános periodikus jelekről (pl. négyszögjel, fűrészfogjel stb.). Ebben a részben az ilyen típusú gerjesztésre adott válasz meghatározásával foglalkozunk. Szükségünk lesz az előző részben megismert átviteli karakterisztika fogalmára, és a szinuszos gerjesztett válasz meghatározására, ugyanis az általános periodikus gerjesztésre adott válasz számítását visszavezetjük a szinuszos gerjesztett válasz számítására. Első lépésben az $s[k]$ periodikus gerjesztés időfüggvényét szinuszos jelek összegére bontjuk a Fourier-felbontásnak megfelelően, majd az átviteli karakterisztika segítségével minden egyes szinuszos összetevőre adott válasz meghatározása után a részválaszokat összegezzük, azaz szuperponáljuk. Ezt a rendszer *linearitása* miatt tehetjük meg.

Egy időben változó diszkrét idejű $s[k]$ jel akkor periodikus a K periódussal (diszkrét idejű periódusidővel), ha

$$\boxed{s[k + K] = s[k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}.} \quad (7.32)$$

A diszkrét idejű jel *alap-körfrekvenciája* a $\vartheta = \frac{2\pi}{K}$ mennyiség.

7.2.1. Diszkrét idejű periodikus jel Fourier-felbontása

A folytonos idejű rendszerek analízise során megismertük a folytonos idejű jelek felbontásának technikáját a Fourier-összeg segítségével, ami egy közelítő eljárás. Diszkrét idejű jelek esetében szintén alkalmazhatjuk a Fourier-felbontást, s látni fogjuk, hogy ez nem közelítés, hanem a periodikus jelek pontos felbontása.

Először az elméleti ismereteket foglaljuk össze, majd az elmondottakat példával illusztráljuk.

A diszkrét idejű jelek Fourier-összeggel történő leírásának bevezetését a folytonos idejű Fourier-összeg segítségével tesszük szemléletessé. Diszkrét idejű jelek esetében főként a Fourier-összeg komplex alakját használjuk, induljunk ki tehát a folytonos idejű jelek Fourier-összegének (6.49) és (6.50) komplex alakjából:

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \overline{S}_k^C e^{jk\omega t}, \quad \text{ahol} \quad \overline{S}_k^C = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jk\omega t} dt.$$

A diszkrét idejű szinuszos jel bevezetéséhez hasonlóan vegyünk T_s időközönként mintákat az $s(t)$ periodikus jelből úgy, hogy annak egyetlen periódusából K számú mintát veszünk. Ezáltal egy olyan $s[k]$ diszkrét idejű periodikus jelet kapunk, amelynek k -adik ütembeli értéke az $s(kT_s)$ értékkel egyezik meg: $s[k] = s(kT_s)$. Így tehát a T periódusidejű folytonos idejű jel egy periódusát K számú mintával reprezentáljuk, ami pontosan az $s[k]$ diszkrét idejű periodikus jel K periódussal. Az $s(t)$ periodicitásából ugyanis következik, hogy $s[k + K] = s[k]$. Közelítsük ezután téglányösszeggel az $\overline{S}_k^C$ komplex Fourier-együtthatót definiáló integrált. Osszuk fel tehát az integrálás intervallumát K számú T_s hosszúságú részre és a k index helyett használjuk a p indexet, mivel k a diszkrét

időt jelöli:

$$\overline{S}_p^C = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-jp\omega t} dt \simeq \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{K-1} s(kT_s) e^{-jp\omega kT_s} T_s.$$

Tudjuk azonban, hogy

$$\frac{M}{K} = \frac{T_s}{T},$$

és ebben az esetben $M = 1$, továbbá $\vartheta = \omega T_s$. Ezen összefüggések felhasználásával kapjuk a diszkrét idejű jel komplex Fourier-együtthatóit definiáló összefüggést:

$$\boxed{\overline{S}_p^C = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-jp\vartheta k}.} \quad (7.33)$$

Ebből adódik, hogy S_0 valós szám:

$$\boxed{S_0 = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k],}$$

ami az $s[k]$ jel átlaga (számtani közepe), s ezt a jel *közéértékének* nevezzük. Egy diszkrét idejű periodikus jel egy periódusa K számú mintából áll. Ez meghatározza a felhasználandó Fourier-együtthatók számát is, ugyanis fennáll a következő összefüggés:

$$\boxed{\overline{S}_{p+K}^C = \overline{S}_p^C.} \quad (7.34)$$

Ezt a (7.33) definíció alapján láthatjuk be, ugyanis:

$$\overline{S}_{p+K}^C = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-j(p+K)\vartheta k} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-jp\vartheta k} e^{-jK\vartheta k},$$

ahol azonban $e^{-jK\vartheta k} = e^{-jK\frac{2\pi}{K}k} = e^{-j2\pi k}$. Írjuk át ezen tényezőt az Euler-alaknak megfelelően:³

$$e^{-j2\pi k} = \cos 2\pi k - j \sin 2\pi k = 1 - j0 = 1,$$

azaz a Fourier-együtthatók is K szerint periodikusak: $\overline{S}_{p+K}^C = \overline{S}_p^C$. Ez azt jelenti, hogy a diszkrét idejű periodikus jel Fourier-összege pontosan K számú együttható lineáris kombinációjaként állítható elő, s mivel ez egy véges szám, ezért a közelítés minden k ütemben pontos ($p = 0, \dots, K-1$).

Írjuk fel ezután az $s[k]$ diszkrét idejű periodikus jel Fourier-összegét az $s_n(t)$ folytonos idejű jel Fourier-összegéből:

$$s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \overline{S}_k^C e^{jk\omega t} \Rightarrow s(kT_s) = \sum_{p=0}^{K-1} \overline{S}_p^C e^{jp\omega k T_s},$$

azaz a Fourier-összeg *komplex alakja* a következő:

$$\boxed{s[k] = \sum_{p=0}^{K-1} \overline{S}_p^C e^{jp\vartheta k}}. \quad (7.35)$$

Esetünkben az $s[k]$ jel *valós*, azaz $(s[k])^* = s[k]$, aminek következménye, hogy

$$\boxed{\overline{S}_{K-p}^C = (\overline{S}_p^C)^*}. \quad (7.36)$$

Ezen összefüggés bizonyítása érdekében képezzük először a komplex Fourier-együtthatókat definiáló (7.33) összeg konjugáltját:⁴

$$(\overline{S}_p^C)^* = \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-jp\vartheta k} \right)^* = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{jp\vartheta k}.$$

³Ugyanez igaz az $e^{j2\pi k}$ tényezőre is, hiszen $e^{j2\pi k} = \cos 2\pi k + j \sin 2\pi k = 1$.

⁴Összeg konjugáltját úgy képezzük, hogy az egyes tagok konjugáltjának vesszük az összegét. Használjuk ki azonban, hogy $s[k]$ valós.

Ebból az is következik, hogy

$$\boxed{\overline{S}_{-p}^C = \left(\overline{S}_p^C\right)^*}, \quad (7.37)$$

ugyanis

$$\overline{S}_{-p}^C = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{jp\vartheta k} = \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-jp\vartheta k} \right)^* = \left(\overline{S}_p^C\right)^*.$$

Ezután határozzuk meg az $\overline{S}_{K-p}^C$ értékét szintén a (7.33) definícióból kiindulva:

$$\begin{aligned} \overline{S}_{K-p}^C &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-j(K-p)\vartheta k} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-jK\vartheta k} e^{jp\vartheta k} = \\ &= \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{jp\vartheta k} = \left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-jp\vartheta k} \right)^* = \left(\overline{S}_p^C\right)^*, \end{aligned}$$

hiszen $e^{-jK\vartheta k} = 1$. Ez azt jelenti, hogy valós $s[k]$ esetén nem kell K számú együtthatót meghatároznunk, hanem elegendő csak a Fourier-együtthatók felét kiszámítani. Vizsgáljuk meg ezt az összefüggést egy egyszerű példán keresztül.

A $K \in \mathbb{Z}$ ($K > 0$) értéke lehet páros és páratlan. Ez a későbbiekben fontos szerepet fog játszani, ezért hasznos lehet a következő táblázatok és magyarázatok megértése. Ha K páros, pl. $K = 6$:

p	0	1	2	3	4	5	6	...
$K - p = 6 - p$	6	5	4	3	2	1	0	...

Fontos észrevenni, hogy $K = 6$, ami annyit jelent, hogy az $s[k]$ jel a $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (általánosan $k = 0, \dots, K - 1$) ütemekben adott értékű és a $k = 6$ ütembeli érték megegyezik a $k = 0$ ütembeli értékkel, azaz $s[6] = s[0]$ (általánosan $s[k + K] = s[k]$).

A „középső” elem az $\overline{S}_{K/2}^C = \overline{S}_3^C$ ezek szerint egyenlő a konjugáltjával: $\overline{S}_3^C = (\overline{S}_3^C)^*$, ami annyit jelent, hogy ez egy valós szám. A $p = 4$ indexű elem megegyezik a $K - p = 6 - 4 = 2$ indexű elem konjugáltjával és így tovább. Elegendő tehát a $p = 0, 1, 2, 3$ indexű együtthatókat meghatározni, mert a $p = 4, 5$ indexű elemek a $p = 2, 1$ indexű együtthatók konjugáltja. Általánosan elegendő a $p = 0, \dots, \frac{K}{2}$ indexű elemeket kiszámolni. A $p = K = 6$ indexű elem megegyezik a $p = 0$ indexű elem konjugáltjával, azonban a nulladik indexű együttható valós szám, a komplex Fourier-együtthatók tehát láthatóan K szerint periodikusak: $\overline{S}_{p+K}^C = \overline{S}_p^C$.

Ha K páratlan, pl. $K = 5$:

p	0	1	2	3	4	5	...
$K - p = 5 - p$	5	4	3	2	1	0	...

Ebben az esetben tehát a $p = 3, 4$ indexű együtthatók meghatározhatók a $p = 2, 1$ indexű együtthatók konjugáltjaként, s nincs „középső” elem. A $p = K = 5$ indexű elem jelen esetben is megegyezik a $p = 0$ indexű elem konjugáltjával, ami azonban valós szám, a Fourier-együtthatók tehát ebben az esetben is periodikusan ismétlődnek. Ha tehát K páratlan szám, akkor elegendő a $p = 0, \dots, \frac{K-1}{2}$ indexű Fourier-együtthatókat meghatározni.

A folytonos idejű jelek Fourier-összegének felírása során megismertük a Fourier-összeg valós alakját is. Diszkrét idejű jelek esetében is létezik a Fourier-összeg valós alakja. A következőkben ezt vezetjük be, s kihasználjuk az előbb elmondottakat. Induljunk ki hát a Fourier-összeg már ismertetett komplex alakjából és fejtsük ki az összefüggésben szereplő szummát, ha K páros:

$$s[k] = \sum_{p=0}^{K-1} \overline{S}_p^C e^{jp\vartheta k} = S_0 + \overline{S}_1^C e^{j\vartheta k} + \overline{S}_2^C e^{j2\vartheta k} + \dots + S_{K/2} e^{j\frac{K}{2}\vartheta k} + \dots + \overline{S}_{K-2}^C e^{j(K-2)\vartheta k} + \overline{S}_{K-1}^C e^{j(K-1)\vartheta k}.$$

Az $S_{K/2}e^{j\frac{K}{2}\vartheta k}$ tényező csak akkor szerepel, ha K páros, egyébként értéke nulla, azaz, ha K páratlan, akkor ez a következő alakot ölti:

$$s[k] = \sum_{p=0}^{K-1} \overline{S}_p^C e^{jp\vartheta k} = S_0 + \overline{S}_1^C e^{j\vartheta k} + \overline{S}_2^C e^{j2\vartheta k} + \dots + \\ + \overline{S}_{K-2}^C e^{j(K-2)\vartheta k} + \overline{S}_{K-1}^C e^{j(K-1)\vartheta k}.$$

Mindez a fentebb ismertetett táblázatokból és magyarázatokból következik. A K páros esetet vezetjük végig, de tartsuk szem előtt, hogy a K páratlan eset csak annyiban különbözik az itt leírtaktól, hogy az $S_{K/2}e^{j\frac{K}{2}\vartheta k}$ tényező nem szerepel az összegben. Használjuk fel a (7.36) összefüggést, továbbá, hogy

$$e^{j\frac{K}{2}\vartheta k} = e^{j\frac{K}{2}\frac{2\pi}{K}k} = e^{j\pi k} = \cos \pi k + j \sin \pi k = \cos \pi k = (-1)^k,$$

és $e^{j(K-p)\vartheta k} = e^{jK\frac{2\pi}{K}k} e^{-jp\vartheta k} = e^{j2\pi k} e^{-jp\vartheta k} = e^{-jp\vartheta k}$ azaz

$$s[k] = \sum_{p=0}^{K-1} \overline{S}_p^C e^{jp\vartheta k} = S_0 + \overline{S}_1^C e^{j\vartheta k} + \overline{S}_2^C e^{j2\vartheta k} + \dots + (-1)^k S_{K/2} + \\ + \dots + \left(\overline{S}_2^C\right)^* e^{-j2\vartheta k} + \left(\overline{S}_1^C\right)^* e^{-j\vartheta k}.$$

A fentiek értelmében az $S_{K/2}$ együttható a következőképp határozható meg, ha K páros (egyébként ez a tag nem szerepel):

$$\boxed{S_{K/2} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-j\frac{K}{2}\frac{2\pi}{K}k} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] (-1)^k.} \quad (7.38)$$

A komplex Fourier-együtthatókat és konjugáltját írjuk fel algebrai alakban:

$$\overline{S}_p^C = S_{p,\text{re}} + jS_{p,\text{im}}, \quad \left(\overline{S}_p^C\right)^* = S_{p,\text{re}} - jS_{p,\text{im}},$$

majd helyettesítsük ezeket vissza a fenti összegbe:

$$s[k] = S_0 + (S_{1,\text{re}} + \text{j}S_{1,\text{im}}) e^{\text{j}\vartheta k} + (S_{2,\text{re}} + \text{j}S_{2,\text{im}}) e^{\text{j}2\vartheta k} + \dots + (-1)^k S_{K/2} + (S_{1,\text{re}} - \text{j}S_{1,\text{im}}) e^{-\text{j}\vartheta k} + (S_{2,\text{re}} - \text{j}S_{2,\text{im}}) e^{-\text{j}2\vartheta k}.$$

Bontsuk fel ezután a zárójeleket és csoportosítsuk úgy a valós és a képzetes részeket, hogy azok megfeleljenek a koszinusz és a szinusz függvények már ismert azonosságainak (az előbbi összefüggésben az egyes tagok pontosan egymás alatt vannak, így azokat könnyű észrevenni):

$$s[k] = S_0 + 2S_{1,\text{re}} \frac{e^{\text{j}\vartheta k} + e^{-\text{j}\vartheta k}}{2} + 2S_{2,\text{re}} \frac{e^{\text{j}2\vartheta k} + e^{-\text{j}2\vartheta k}}{2} + \dots + (-1)^k S_{K/2} - 2S_{1,\text{im}} \frac{e^{\text{j}\vartheta k} - e^{-\text{j}\vartheta k}}{2\text{j}} - 2S_{2,\text{im}} \frac{e^{\text{j}2\vartheta k} - e^{-\text{j}2\vartheta k}}{2\text{j}},$$

s vezessük be a következő jelöléseket:

$$\boxed{S_p^{\text{A}} = 2 \operatorname{Re} \{ S_p^{\text{C}} \}, \quad S_p^{\text{B}} = -2 \operatorname{Im} \{ S_p^{\text{C}} \},} \quad (7.39)$$

azaz páros K esetén a Fourier-összeg következő *valós alakú kifejezését* kapjuk:

$$\boxed{s[k] = S_0 + \sum_{p=1}^{\frac{K}{2}-1} [S_p^{\text{A}} \cos p\vartheta k + S_p^{\text{B}} \sin p\vartheta k] + (-1)^k S_{K/2},} \quad (7.40)$$

páratlan K esetén pedig a következőt:

$$\boxed{s[k] = S_0 + \sum_{p=1}^{\frac{K-1}{2}} [S_p^{\text{A}} \cos p\vartheta k + S_p^{\text{B}} \sin p\vartheta k].} \quad (7.41)$$

Az ezen összefüggésekben szereplő S_p^A és S_p^B együtthatók a (7.33) összefüggésből kiindulva a következőképp határozhatók meg:

$$\boxed{\begin{aligned} S_p^A &= 2 \operatorname{Re} \{ S_p^C \} \Rightarrow S_p^A = \frac{2}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] \cos p\vartheta k, \\ S_p^B &= -2 \operatorname{Im} \{ S_p^C \} \Rightarrow S_p^B = \frac{2}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] \sin p\vartheta k. \end{aligned}} \quad (7.42)$$

Ebben az esetben is igaz, hogy ha a jel *páros*, akkor a valós alakú összegben $S_p^B \equiv 0$ (csak koszinuszos tagokból áll), a komplex alakú összeg pedig valós értékű. Ha pedig a jel *páratlan*, akkor a valós alakú összegben $S_p^A \equiv 0$ (csak szinuszos tagokból áll), a komplex alakú összeg pedig képzetes értékű.

A valós alaknak egy másik formája is ismeretes. Páros K esetén ez a következő:

$$\boxed{s[k] = S_0 + \sum_{p=1}^{\frac{K}{2}-1} S_p \cos(p\vartheta k + \rho_p) + (-1)^k S_{K/2},} \quad (7.43)$$

páratlan K esetén pedig

$$\boxed{s[k] = S_0 + \sum_{p=1}^{\frac{K-1}{2}} S_p \cos(p\vartheta k + \rho_p).} \quad (7.44)$$

A két valós alak között a kapcsolat a következő:

$$\boxed{S_p = \sqrt{(S_p^A)^2 + (S_p^B)^2}, \quad \rho_p = -\arctan \frac{S_p^B}{S_p^A},} \quad (7.45)$$

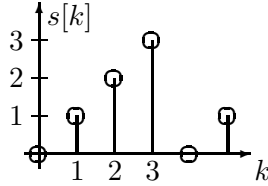
és

$$\boxed{S_p^A = S_p \cos \rho_p, \quad S_p^B = -S_p \sin \rho_p.} \quad (7.46)$$

A valós alak és a komplex alak között pedig a következő kapcsolat áll fenn:

$$\boxed{S_p = 2 \left| \overline{S}_p^C \right|, \quad \rho_p = \arg S_p, \quad \text{azaz} \quad \overline{S}_p^C = 0,5 S_p e^{j\rho_p}. \quad (7.47)}$$

Példa. Egy diszkrét idejű periodikus jel időfüggvénye az alábbi. Határozzuk meg a diszkrét Fourier-együtthatókat és állítsuk elő a jelet a Fourier-összeg mindhárom alakjában.



Megoldás. A jel értéke az egyes ütemekben tehát a következő: $s[0] = 0$, $s[1] = 1$, $s[2] = 2$, $s[3] = 3$, $s[4] = s[0] = 0$, $s[5] = s[1] = 1$, és így tovább. A jel periódusa tehát $K = 4$, ami páros szám. A jel alapkörfrekvenciája $\vartheta = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Számítsuk ki először a $K = 4$ számú Fourier együtthatót ($p = 0, 1, 2, 3$) a (7.33) definíció szerint és használjuk fel a (7.36) összefüggést is:

$$S_0 = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} s[k] e^{-j0 \frac{\pi}{2} k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 s[k] = \frac{1}{4} (0 + 1 + 2 + 3) = 1,5,$$

ami tehát az $s[k]$ jel átlaga,

$$\begin{aligned} \overline{S}_1^C &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 s[k] e^{-j1 \frac{\pi}{2} k} = \frac{1}{4} \left(1e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 1} + 2e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 2} + 3e^{-j\frac{\pi}{2} \cdot 3} \right) = \\ &= \frac{1}{4} [(0 - j) + (-2 + j0) + (0 + j3)] = \frac{1}{4} (-2 + j2) = \\ &= -0,5 + j0,5 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{3}{4}\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_2^C &= (\overline{S}_2^C)^* = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 s[k] e^{-j2\frac{\pi}{2}k} = \frac{1}{4} (1e^{-j\pi^1} + 2e^{-j\pi^2} + 3e^{-j\pi^3}) = \\ &= \frac{1}{4} [(-1 + j0) + (2 + j0) + (-3 + j0)] = \frac{1}{4} (-2) = -0,5, \\ \overline{S}_3^C &= (\overline{S}_{4-3}^C)^* = (\overline{S}_1^C)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{3}{4}\pi}.\end{aligned}$$

Az $\overline{S}_3^C$ együttthatót tehát nem kell külön meghatározni. Az $\overline{S}_2^C$ együtttható számítható a következőképp is:

$$\overline{S}_2^C = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 s[k] (-1)^k = \frac{1}{4} [1(-1) + 2(1) + 3(-1)] = -0,5.$$

Határozzuk meg ezután a periodikus jelet előállító Fourier-összeg komplex alakját a (7.35) összefüggésnek megfelelően:

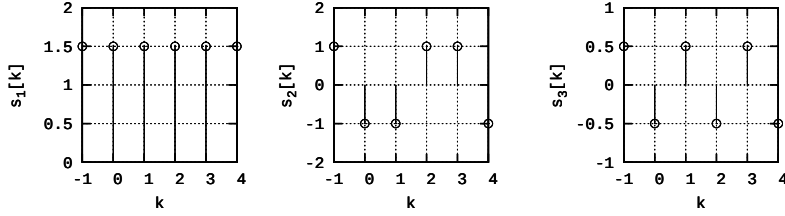
$$\begin{aligned}s[k] &= \sum_{p=0}^3 \overline{S}_p^C e^{jp\frac{\pi}{2}k} = S_0 + \overline{S}_1^C e^{j\frac{\pi}{2}k} + \overline{S}_2^C e^{j2\frac{\pi}{2}k} + \overline{S}_3^C e^{j3\frac{\pi}{2}k} = \\ &= \underbrace{1,5}_{S_0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{3}{4}\pi}}_{\overline{S}_1^C} e^{j\frac{\pi}{2}k} + \underbrace{(-0,5)}_{S_2} e^{j2\frac{\pi}{2}k} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{3}{4}\pi}}_{\overline{S}_3^C} e^{j3\frac{\pi}{2}k}.\end{aligned}$$

Ebben az összefüggésben az utolsó tényező átírható: $e^{j3\frac{\pi}{2}k} = e^{-j\frac{\pi}{2}k}$, azaz

$$s[k] = 1,5 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{3}{4}\pi} e^{j\frac{\pi}{2}k} - 0,5 e^{j2\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{3}{4}\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}k}.$$

Itt a második és az utolsó tag átírható valós koszinuszos alakra, a középső tag pedig az Euler-formulának megfelelően koszinuszos függvényt eredményez (ezen függvények láthatók a 7.6. ábrán):

$$s[k] = \underbrace{1,5}_{s_1[k]} + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{3}{4}\pi\right)}_{s_2[k]} \underbrace{-0,5 \cos(\pi k)}_{s_3[k]}.$$



7.6. ábra. A szinuszos összetevők, melyek szuperpozíciója adja az $s[k]$ jel időfüggvényét

A periodikus jel Fourier-összegének egyik valós alakja a (7.40) alapján írható fel. Itt $\frac{K}{2} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1$, azaz csak S_1^A és S_1^B értékét kell meghatározni a komplex együtthatók ismeretében:

$$S_1^A = 2 \operatorname{Re} \left\{ \overline{S_1^C} \right\} = 2(-0, 5) = -1,$$

$$S_1^B = -2 \operatorname{Im} \left\{ \overline{S_1^C} \right\} = -2(0, 5) = -1,$$

s így

$$s[k] = 1, 5 - 1 \cos \left(\frac{\pi}{2} k \right) - 1 \sin \left(\frac{\pi}{2} k \right) + (-1)^k (-0, 5).$$

A másik valós alak a (7.43) alapján állítható elő, ahol a szumma ismét csak egy elemből áll, hiszen $\frac{K}{2} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 1$. Az S_1 csúcsérték a meghatározható akár a komplex alak, akár az előbbi valós alak alapján (l. (7.45) és (7.47) összefüggések):

$$S_1 = \sqrt{(S_1^A)^2 + (S_1^B)^2} = \sqrt{2}, \quad \text{vagy} \quad S_1 = 2 \left| \overline{S_1^C} \right| = 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

A ρ_1 fázis szintén meghatározható mindkét alakból:⁵

$$\rho_1 = -\arctg \frac{S_1^B}{S_1^A} = -\frac{5}{4}\pi, \quad \text{vagy} \quad \rho_1 = \arcs \overline{S_1^C} = \frac{3}{4}\pi.$$

⁵Az $\arctg$ függvény képzésekor ügyelni kell az előjelekre. Ilyenkor célszerű egy ábrát is rajzolni.

A két fázis természetesen egyenlő. A valós alak így a következőképp írható:

$$s[k] = 1,5 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{5}{4}\pi\right) + (-1)^k(-0,5).$$

Végeredményben tehát látszólag három különböző alakú időfüggvényt kaptunk, azonban behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy mindhárom időfüggvény az eredetileg adott $s[k]$ periodikus jelet adja. A gerjesztett válasz számítására az utóbbi alakot fogjuk alkalmazni, mert az jól illeszkedik a komplex számítási módszerhez, a Fourier-együtthatók meghatározására pedig a komplex alakot alkalmazzuk.

7.2.2. A periodikus válasz számítása

Ha a diszkrét idejű rendszer $s[k]$ gerjesztése egy periodikus jel, és ezen periodikus jel Fourier-felbontását elvégezzük, akkor a rendszer gerjesztett válasza Fourier-összeg alakjában meghatározható. A Fourier-összeggel adott gerjesztés $\frac{K}{2} - 1$, vagy $\frac{K-1}{2}$ számú szinuszos jel szuperpozíciója. Ha ismert a rendszer átviteli karakterisztikája, akkor az egyes harmonikusokra adott részválaszokat ki tudjuk számolni a komplex leírási módszer alapján. Ezután ezen részválaszokat kell szuperponálni, hiszen a rendszer lineáris. Arra kell csupán ügyelnünk, hogy az egyes harmonikus komponensek körfrekvenciája különböző: az alapharmonikus körfrekvenciájának egész számú többszöröse. A válaszjel egyes komponensei tehát a következő összefüggés szerint határozhatók meg:

$$\boxed{\overline{Y}_p = \overline{W}_p \overline{S}_p}, \quad (7.48)$$

ahol $\overline{S}_p$ jelöli a gerjesztés p -edik harmonikus komplex csúcsértékét, $\overline{W}_p = W(e^{jp\vartheta})$ az átviteli együttható a $p\vartheta$ körfrekvencián és $\overline{Y}_p$ a válaszjel p -edik harmonikusának komplex csúcsértéke. Ezek

számítására érdemes egy táblázatot készíteni. Ezután a válaszjel felírható a jól ismert alakban:

$$y[k] = Y_0 + \sum_{p=1}^{\frac{K}{2}-1} Y_p \cos(p\vartheta k + \varphi_p) + (-1)^k Y_{K/2}, \quad (7.49)$$

ha K páros, vagy

$$y[k] = Y_0 + \sum_{p=1}^{\frac{K-1}{2}} Y_p \cos(p\vartheta k + \varphi_p), \quad (7.50)$$

ha K páratlan. Gyakorlatilag az előző részben ismerttetett eljárást kell ismételni, majd a részeredményeket összeadni. Fontos megjegyezni, hogy a válasz periódusa azonos a gerjesztés periódusával.

Példa. Legyen egy rendszer gerjesztése az előzőekben vizsgált periodikus jel, melynek Fourier-felbontása ismert, átviteli karakterisztikája pedig az alábbi:

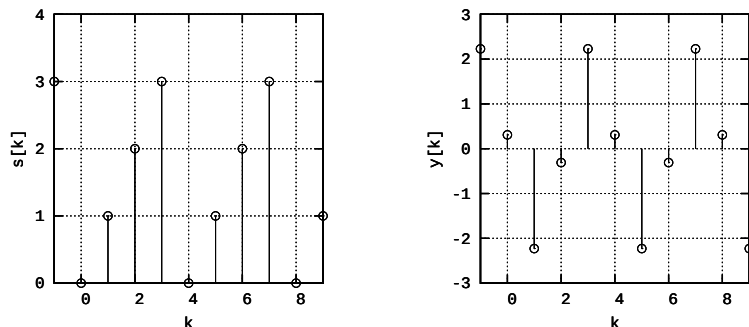
$$\overline{W} = \frac{\overline{Y}}{\overline{S}} = \frac{e^{j2\vartheta} - 1}{e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 0,24},$$

$$s[k] = 1,5 + \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{5}{4}\pi\right) + (-1)^k(-0,5).$$

Megoldás. A $\overline{W}$ átviteli karakterisztika helyébe először is írjunk $\overline{W}_p$ -t:

$$\overline{W}_p = W\left(e^{jp\vartheta}\right) = \frac{e^{j2p\vartheta} - 1}{e^{j2p\vartheta} - e^{jp\vartheta} + 0,24},$$

majd számítsuk ki azt a $p = 0, 1, 2$ esetekre és foglaljuk táblázatba az eredményeket:



7.7. ábra. A példában szereplő gerjesztés és a válaszjel stacionárius összetevőjének időfüggvénye

p	S_p	ρ_p	K_p	ϕ_p	$\overline{Y}_p$	φ_p
0	1,5	0	0	0	0	0
1	$\sqrt{2}$	$-\frac{5}{4}\pi$	1,592	-0,92	2,251	-4,85
2	0,5	π	0	0	0	π

A táblázat minden sora tartalmazza a gerjesztés p -edik harmonikusának amplitúdóját és fázisát, amely értékek a gerjesztés Fourier-közelítéséből kiolvashatók ($p = 0, \dots, \frac{K}{2} - 1$, ha K páros és $p = 0, \dots, \frac{K-1}{2}$, ha K páratlan), továbbá az átviteli karakterisztika helyettesítési értékét adott $p\vartheta$ körfrekvencián. A válaszjel amplitúdója a gerjesztés amplitúdójának és az átviteli együttható abszolút értékének szorzata, fázisa pedig a gerjesztés fázisának és az átviteli együttható fázisának az összege, hiszen minden sorban igaz, hogy $\overline{Y}_p = \overline{W}_p \overline{S}_p$. Ezért célszerű az Euler-alakot használni a számítások során. A táblázat utolsó két oszlopa tehát a gerjesztés p -edik harmonikusára adott gerjesztett válasz amplitúdóját és fázisát tartalmazza. A válaszjel időfüggvénye a komplex csúcserték fogalmának ismeretében tehát a következő:

$$y[k] = 2,251 \cos\left(\frac{\pi}{2}k - 4,85\right).$$

A gerjesztés és a válaszjel időfüggvénye a 7.7. ábrán látható. Érdeemes megfigyelni, hogy a válaszjel periódusa szintén $K = 4$.

7.3. Jelek és rendszerek spektrális leírása

Most már tudjuk, hogy a Fourier-összeg alkalmazásával tetszőleges periodikus jel előállítható szinuszos jelek szuperpozíciójaként. Az egyes harmonikusok diszkrét, ún. vonalas spektrummal reprezentálhatók, és a vonalas spektrum csak az alapharmonikus körfrekvenciájának egész számú többszöröseit tartalmazza.

Ezt az eljárást nem periodikus jelekre is alkalmazhatjuk, mivel azok végtelen sok szinuszos jel összegeként írhatók le.

Az eddigi vezérfonalat megtartva a diszkrét Fourier-transzformációt a diszkrét Fourier-felbontáshoz hasonlóan a folytonos idejű jeleknél megismert Fourier-transzformációból vezetjük le.

7.3.1. A Fourier-transzformáció és a spektrum

Induljunk ki tehát a folytonos idejű jelek komplex Fourier-transzformáltjából és annak inverzéből:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Vegyünk ismét T_s időközönként egyenletesen mintákat az $s(t)$ nem periodikus jelből. Ezáltal egy olyan $s[l]$ diszkrét idejű jelet kapunk, amelynek l -edik ütembeli értéke az $s(lT_s)$ értékkel egyezik meg: $s[l] = s(lT_s)$. Közelítsük ezután téglányösszeggel az $S(j\omega)$ komplex Fourier-transzformációt definiáló integrált. Osszuk fel az integrálás intervallumát végtelen sok T_s hosszúságú részre:

$$S(j\omega) \simeq \sum_{l=-\infty}^{\infty} s(lT_s) e^{-j\omega lT_s} T_s.$$

Vezessük be ismét a ϑ diszkrét idejű körfrekvenciát a $\vartheta = \omega T_s$ összefüggésnek megfelelően, azaz

$$S(j\omega) \simeq T_s \sum_{l=-\infty}^{\infty} s[l]e^{-j\vartheta l}.$$

Ez a kifejezés (és ebből következően a Fourier-transzformált is) 2π szerint periodikus, hiszen

$$T_s \sum_{l=-\infty}^{\infty} s[l]e^{-j(\vartheta+2\pi)l} = T_s \sum_{l=-\infty}^{\infty} s[l]e^{-j\vartheta l}e^{-j2\pi l} = T_s \sum_{l=-\infty}^{\infty} s[l]e^{-j\vartheta l},$$

ugyanis az $e^{-j2\pi l}$ tényező értéke 1, ahogy azt a Fourier-felbontás során már megmutattuk.

Helyettesítsük vissza a kapott eredményt az inverz Fourier-transzformáció összefüggésébe és használjuk ki a 2π szerinti periodicitást és azt, hogy

$$\omega = \frac{\vartheta}{T_s} \quad \Rightarrow \quad d\omega = \frac{d\vartheta}{T_s},$$

azaz

$$s(kT_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_s \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} s[l]e^{-j\vartheta l} \right) e^{j\omega k T_s} \frac{d\vartheta}{T_s},$$

amit T_s -sel történő egyszerűsítés és $\vartheta = \omega T_s$ helyettesítés után a következőképp írhatunk fel:

$$s[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} s[l]e^{-j\vartheta l} \right) e^{j\vartheta k} d\vartheta.$$

A kapott összefüggésben szereplő összegzést a diszkrét idejű jel *Fourier-transzformáltjának*, vagy *spektrumának* nevezzük. Az l index helyett k -t írva kapjuk, hogy:

$$\boxed{S(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{s[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]e^{-j\vartheta k}.} \quad (7.51)$$

A jel spektruma tehát komplex értékű, és az $e^{j\vartheta}$ kifejezés függvénye, $\overline{S}(\vartheta) = S(e^{j\vartheta})$. A Fourier-transzformált abszolút értéke a jel un. *amplitúdóspektruma*, fázisa pedig a jel *fázisspektruma*.

Ahogy egy folytonos idejű jel spektruma akkor létezik, ha a jel abszolút integrálható, úgy a diszkrét idejű jel akkor Fourier-transzformálható, ha a jel *abszolút összegezhető*:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |s[k]| < \infty.} \quad (7.52)$$

A jel időfüggvénye a *spektrum* ismeretében tehát a következő integrállal állítható elő:

$$\boxed{s[k] = \mathcal{F}^{-1}\{S(e^{j\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta.} \quad (7.53)$$

Az integrálási határ lehet pl. még $-\pi$ és π . Általános diszkrét idejű jel spektruma tehát végtelen sok $\frac{1}{2\pi} S(e^{j\vartheta}) d\vartheta$ komplex amplitúdójú ϑ körfrekvenciájú szinuszos jel összegéből áll.

A Fourier-transzformáció tehát egy összeg, hiszen a jel csak diszkrét időpillanatokban létezik, az inverz Fourier-transzformáció azonban egy integrál, hiszen a diszkrét idejű jel spektruma folytonos függvénye a ϑ változónak.

A diszkrét Fourier-transzformációnak is létezik valós alakja. A levezetés analóg a folytonos idejű jelek valós Fourier-transzformáltjának levezetésével. Ennek felírásához bontsuk ketté a (7.53) összefüggésben szereplő integrált a negatív és a pozitív körfrekvenciákra, majd az első tagban ϑ helyébe írjunk $-\vartheta$ -t, melynek eredményeképp az integrálási határok felcserélhetők:

$$\begin{aligned} s[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} S(e^{-j\vartheta}) e^{-j\vartheta k} d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta. \end{aligned}$$

Valós $s[k]$ függvények esetében (mi csak ilyenekkel foglalkozunk) az $S(e^{j\vartheta})$ komplex spektrum amplitúdóspektruma páros, fázisspektruma pedig páratlan függvénye a ϑ diszkrét körfrekvenciának. Ennek bizonyítása céljából írjuk fel (7.51) alakját úgy, hogy az $e^{-j\vartheta k} = \cos \vartheta k - j \sin \vartheta k$ Euler-relációt figyelembe vesszük:

$$S(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cos \vartheta k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \sin \vartheta k,$$

valamint

$$S(e^{-j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cos \vartheta k + j \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \sin \vartheta k,$$

azaz $S(e^{j\vartheta})$ és $S(e^{-j\vartheta})$ valós része megegyezik, képzetes része azonban egymás -1 -szerese, következésképp:

$$\boxed{|S(e^{-j\vartheta})| = |S(e^{j\vartheta})|, \quad \arg S(e^{-j\vartheta}) = -\arg S(e^{j\vartheta})}, \quad (7.54)$$

vagy

$$\boxed{\left(S(e^{j\vartheta})\right)^* = S(e^{-j\vartheta})}. \quad (7.55)$$

Ezek felhasználásával írhatjuk, hogy

$$s[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(S(e^{j\vartheta})\right)^* e^{-j\vartheta k} d\vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta.$$

Írjuk fel ezután az $S(e^{j\vartheta})$ komplex spektrumot és konjugáltját algebrai alakban:

$$S(e^{j\vartheta}) = S_{\text{re}}(\vartheta) + jS_{\text{im}}(\vartheta), \quad \left(S(e^{j\vartheta})\right)^* = S_{\text{re}}(\vartheta) - jS_{\text{im}}(\vartheta),$$

majd írjuk be ezeket a fenti integrálba:

$$\begin{aligned} s[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [S_{\text{re}}(\vartheta) - jS_{\text{im}}(\vartheta)] e^{-j\vartheta k} d\vartheta + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [S_{\text{re}}(\vartheta) + jS_{\text{im}}(\vartheta)] e^{j\vartheta k} d\vartheta, \end{aligned}$$

majd bontsuk fel a zárójeleket és csoportosítsuk a valós és a képzetes részeket és vigyünk be egy 2-es osztót is. A kifejezést az azonos integrálási határok miatt egyetlen integrállal kifejezhetjük:

$$s[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left[2S_{\text{re}}(\vartheta) \frac{e^{j\vartheta k} + e^{-j\vartheta k}}{2} - 2S_{\text{im}}(\vartheta) \frac{e^{j\vartheta k} - e^{-j\vartheta k}}{2j} \right] d\vartheta,$$

és a szokásos módon vezessük be a következő jelöléseket:

$$S^A(\vartheta) = 2 \mathcal{R}e \left\{ S(e^{j\vartheta}) \right\}, \quad S^B(\vartheta) = -2 \mathcal{I}m \left\{ S(e^{j\vartheta}) \right\}, \quad (7.56)$$

azaz (7.54) miatt $S^A(\vartheta)$ páros, $S^B(\vartheta)$ pedig páratlan függvény. Az Euler-reláció értelmében az utóbbi integrált a következőképp írhatjuk fel:

$$s[k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [S^A(\vartheta) \cos \vartheta k + S^B(\vartheta) \sin \vartheta k] d\vartheta.$$

Hátravan még $S^A(\vartheta)$ és $S^B(\vartheta)$ valós spektrumok meghatározása. Írjuk fel ezek meghatározásához a (7.51) összefüggését és írjuk át az exponenciális tényezőt algebrai alakra:

$$S(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cos \vartheta k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \sin \vartheta k.$$

A komplex $S(e^{j\vartheta})$ spektrumot azonban

$$S(e^{j\vartheta}) = \mathcal{R}e \left\{ S(e^{j\vartheta}) \right\} + j \mathcal{I}m \left\{ S(e^{j\vartheta}) \right\} = \frac{S^A(\vartheta)}{2} - j \frac{S^B(\vartheta)}{2}$$

alakban már felírtuk, s ezek figyelembevételével kapjuk, hogy:

$$S^A(\vartheta) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cos \vartheta k, \quad S^B(\vartheta) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \sin \vartheta k. \quad (7.57)$$

Páros függvény spektruma valós, azaz $S^B(\vartheta) = 0$ páratlan függvény spektruma pedig képzetes, azaz $S^A(\vartheta) = 0$.

A négyzetesen összegezhető $s[k]$ jel véges értékű

$$E_s \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} |s[k]|^2 \quad (7.58)$$

energiája a *Parseval-tétel* értelmében felírható a jel spektrumának ismeretében. Ha a jel valós értékű (mi csak ilyenekkel foglalkozunk), akkor az abszolút érték képzése el is hagyható. Helyettesítsük be $s[k]$ helyébe az inverz Fourier-transzformáció (7.53) összefüggését:

$$E_s \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k]s[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right).$$

Az $1/2\pi$ konstans emeljük ki és cseréljük fel az integrálás és az összegzés sorrendjét:

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\vartheta}) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{j\vartheta k} \right) d\vartheta.$$

A szumma az $S(e^{j\vartheta})$ spektrum konjugáltja, azaz:

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\vartheta}) S^*(e^{j\vartheta}) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta, \quad (7.59)$$

ahol, $|S(e^{j\vartheta})|^2$ pedig a jel ún. *energiaspektruma*.

7.3.2. A Fourier-transzformáció tételei

A következőkben a Fourier-transzformáció néhány, számunkra fontos tételével foglalkozunk. A tételek bizonyítását (ahol ez szükséges) az inverz Fourier-transzformáció segítségével végezzük el.

Linearitás

A Fourier-transzformáció egy összegzés, inverze pedig egy integrál. Ezen műveletek *lineáris operátorok*, azaz bármely C_1, C_2 konstans esetén fennáll, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{C_1 s_1[k] + C_2 s_2[k]\} &= C_1 \mathcal{F}\{s_1[k]\} + C_2 \mathcal{F}\{s_2[k]\}, \\ \mathcal{F}^{-1}\{C_1 S_1(e^{j\vartheta}) + C_2 S_2(e^{j\vartheta})\} &= C_1 \mathcal{F}^{-1}\{S_1(e^{j\vartheta})\} + C_2 \mathcal{F}^{-1}\{S_2(e^{j\vartheta})\}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Általánosan ez a következőt jelenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\sum_{i=1}^n C_i s_i[k]\right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{F}\{s_i[k]\}, \\ \mathcal{F}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n C_i S_i(e^{j\vartheta})\right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{F}^{-1}\{S_i(e^{j\vartheta})\}. \end{aligned} \quad (7.61)$$

Ez a *szuperpozíció elve*, ami tehát annyit jelent, hogy a *transzformáció és inverze tagonként elvégezhető*.

Eltolási tétel

Ha létezik az $s[k]$ jel $S(e^{j\vartheta})$ spektruma, akkor a K ütemmel eltolt $s[k - K]$ jel spektruma az *eltolási tétel* értelmében a következő:

$$\mathcal{F}\{s[k - K]\} = e^{-j\vartheta K} S(e^{j\vartheta}), \quad (7.62)$$

azaz az $s[k]$ jel spektrumát be kell szorozni $e^{-j\vartheta K}$ -val, amely $-\vartheta K$ értékű fázisforgatást végez az $S(e^{j\vartheta})$ spektrumon, de az amplitúdóspektrumot és az energiaspektrumot nem módosítja, mivel $|e^{-j\vartheta K}| = 1$. A tétel bizonyítására a (7.53) összefüggésben írjunk minden k helyébe $(k - K)$ -t:

$$s[k - K] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta(k-K)} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{S(e^{j\vartheta}) e^{-j\vartheta K}}_{\mathcal{F}\{s[k-K]\}} e^{j\vartheta k} d\vartheta.$$

Az átviteli karakterisztika meghatározása. Alkalmazzuk az eltolási tételt a rendszeregyenletre és az állapotváltozós leírásra, melynek kapcsán eljutunk a diszkrét idejű rendszer *átviteli karakterisztikájához*, amely egy *rendszerjellemező függvény*.

Induljunk ki tehát a diszkrét idejű SISO-rendszer rendszeregyenletéből:

$$y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^m b_i s[k-i].$$

Képezzük ezen egyenlet Fourier-transzformáltját és közben alkalmazzuk az eltolási tételt:

$$Y(e^{j\vartheta}) + \sum_{i=1}^n a_i Y(e^{j\vartheta})e^{-j\vartheta i} = \sum_{i=0}^m b_i S(e^{j\vartheta})e^{-j\vartheta i}.$$

Ezen egyenlet két oldalán egy $e^{-j\vartheta}$ -ban n -edfokú és egy m -edfokú polinomot kapunk. Emeljünk ki a bal oldalon $Y(e^{j\vartheta})$ -t, a jobb oldalon pedig $S(e^{j\vartheta})$ -t:

$$Y(e^{j\vartheta}) \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-j\vartheta i} \right) = S(e^{j\vartheta}) \sum_{i=0}^m b_i e^{-j\vartheta i}.$$

Ebből képezhetjük az un. $W(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztikát:

$$\boxed{W(e^{j\vartheta}) = \frac{Y(e^{j\vartheta})}{S(e^{j\vartheta})} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i e^{-j\vartheta i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-j\vartheta i}},} \quad (7.63)$$

vagy részletesen kiírva:

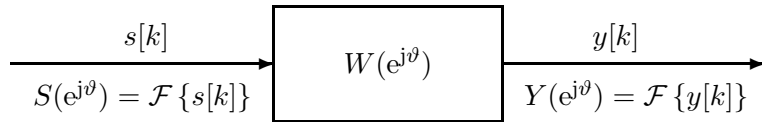
$$\boxed{W(e^{j\vartheta}) = \frac{Y(e^{j\vartheta})}{S(e^{j\vartheta})} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + b_m e^{-jm\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta} + a_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + a_n e^{-jn\vartheta}},} \quad (7.64)$$

azaz az átviteli karakterisztika az $e^{-j\vartheta}$ változó racionális függvénye valós együtthatókkal.⁶ Az átviteli karakterisztika tehát egy polinom per polinom alakú kifejezés, nevezőjének polinomja alakilag megegyezik a rendszeregyenlet karakterisztikus polinomjával.

Ezen művelet sor természetesen visszafelé is elvégezhető. Ha tehát ismert egy *gerjesztés-válasz stabilis* rendszer átviteli karakterisztikája, akkor annak rendszeregyenlete meghatározható, továbbá az átviteli karakterisztika számlálójában és nevezőjében szereplő b_i és a_i együtthatók megegyeznek a rendszeregyenlet jobb- és bal oldalán szereplő együtthatókkal.

Érdemes megfigyelni, hogy a levezetés nagyon hasonlít a komplex csúcsértékek alkalmazása során bemutatott levezetéshez. Ott a gerjesztés és a válasz komplex csúcsértékéből, ebben az esetben pedig azok Fourier-transzformáltjából indultunk ki. Az állapotváltozós leírás egyenleteinek Fourier-transzformálásával szintén az átviteli karakterisztikához juthatunk. A levezetést itt mellőzzük, mert az megegyezik a komplex csúcsértékek alkalmazása során bemutatottal.

Az átviteli karakterisztika tehát nemcsak szinuszos gerjesztés és szinuszos válasz esetén határozható meg, hanem tetszőleges gerjesztés és a rá adott válasz spektrumának segítségével is, hiszen a spektrum éppen a szinuszos komponenseket adja meg a körfrekvencia függvényében. Tehát *az átviteli karakterisztika a válasz és a gerjesztés spektrumának hányadosa*. Ezt illusztrálja a következő ábra:



⁶Az alkalmazások során azonban $e^{j\vartheta}$ pozitív kitevőire fogunk áttérni.

A konvolúció spektruma

Az eltolási tételt alkalmazzuk a *konvolúció spektrumának* meghatározása során. Az időtartományban végzett $y[k] = w[k] * s[k]$ konvolúció a frekvenciatartományban *szorzattá egyszerűsödik*:

$$\boxed{Y(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{w[k]\}\mathcal{F}\{s[k]\} = W(e^{j\vartheta}) S(e^{j\vartheta})}, \quad (7.65)$$

ahol $S(e^{j\vartheta})$ és $Y(e^{j\vartheta})$ a gerjesztés és a válaszjel spektruma, $W(e^{j\vartheta})$ pedig a rendszer átviteli karakterisztikája. Az összefüggés természetesen más jelekre is érvényes.

A (7.65) igazolását az inverz Fourier-transzformáció segítségével tesszük meg, feltételezzük továbbá, hogy $s[k]$ is és $w[k]$ is abszolút összegezhető:

$$\begin{aligned} y[k] &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ S(e^{j\vartheta}) W(e^{j\vartheta}) \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(e^{j\vartheta}) W(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] e^{-j\vartheta i} \right)}_{S(e^{j\vartheta})} W(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta. \end{aligned}$$

Cseréljük fel most az összegzés és az integrálás sorrendjét és alkalmazzuk az eltolási tételt:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s[i] \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(e^{j\vartheta}) e^{-j\vartheta i} e^{j\vartheta k} d\vartheta \right)}_{w[k-i]},$$

ami pontosan a konvolúció kifejezése. A válaszjel spektruma tehát az impulzusválasz spektrumának és a gerjesztés spektrumának a szorzata.

A következő szemléletes illusztráció kapcsán eljutunk a Fourier-transzformáció formális megadásához. Legyen egy rendszer nem belépő gerjesztése az $s[k] = e^{j\vartheta k}$ jel, amely az Euler-formulának megfelelően egy szinuszos jel. Vegyük ezen jel és a

rendszer impulzusválaszának konvolúcióját, ami a rendszer kimeneti jele:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]s[k-i] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]e^{j\vartheta(k-i)} = e^{j\vartheta k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} w[i]e^{-j\vartheta i}.$$

Az utóbbi összegben szerepel a $w[k]$ impulzusválasz Fourier-transzformáltja (írjunk i helyébe k -t), ami pontosan a rendszer átviteli függvénye (ezt a 272. oldalon igazolni is fogjuk):

$$\boxed{W(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k]e^{-j\vartheta k}.} \quad (7.66)$$

Így a rendszer válasza a következő:

$$y[k] = W(e^{j\vartheta})e^{j\vartheta k},$$

azaz állandósult állapotban a lineáris rendszer szinuszos gerjesztésre szinuszos választ ad, amely a $W(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztika által meghatározottan csak amplitúdóban és fázisban különbözik a gerjesztéstől. Az átviteli karakterisztikát a *rendszer sajátértékének* is szokás nevezni, az $e^{j\vartheta k}$ gerjesztés pedig az un. *sajátfüggvény*.

Így a konvolúció ismeretére támaszkodva jutottunk el a rendszer átviteli karakterisztikájának definíciójához, valamint a Fourier-transzformációhoz. Az összegben szereplő $w[i]$ helyébe tetszőleges $s[k]$ függvényt írva definiálhatjuk az $s[k]$ jel Fourier-transzformáltját is, ha ez a végtelen összeg létezik.

Eltolás a frekvenciatartományban, a modulációs tétel

A *modulációs tétel* kimondja, hogy a frekvenciatartományban ϑ_0 körfrekvenciával való eltolás az időtartományban $e^{j\vartheta_0 k}$ függvénynel végzett szorzást jelent:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{j\vartheta_0 k} e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-j(\vartheta - \vartheta_0)k},$$

azaz az $S(e^{j\vartheta})$ spektrumban minden ϑ helyébe $(\vartheta - \vartheta_0)$ -t kell írni:

$$\boxed{\mathcal{F}\{s[k] e^{j\vartheta_0 k}\} = S(e^{j(\vartheta - \vartheta_0)})}. \quad (7.67)$$

Az $e^{j\vartheta_0 k} = \cos \vartheta_0 k + j \sin \vartheta_0 k$ azonosság alapján ez a tétel tehát szinuszos jellel történő szorzásra ad összefüggést. A tétel fontos következménye, hogy az $s[k] \cos \vartheta_0 k$ jel spektruma az Euler-reláció alkalmazásával a következő:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \cos \vartheta_0 k e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \frac{e^{j\vartheta_0 k} + e^{-j\vartheta_0 k}}{2} e^{-j\vartheta k}.$$

Felbontva a törtet kapjuk, hogy

$$\boxed{\mathcal{F}\{s[k] \cos \vartheta_0 k\} = \frac{1}{2} \left[S(e^{j(\vartheta - \vartheta_0)}) + S(e^{j(\vartheta + \vartheta_0)}) \right]}, \quad (7.68)$$

azaz az $s[k]$ jel $S(e^{j\vartheta k})$ spektruma a $\vartheta = \vartheta_0$ és a $\vartheta = -\vartheta_0$ körfrekvenciákon jelenik meg fele akkora amplitúdóval.

Hasonlóképp, az $s[k] \sin \vartheta_0 k$ jel spektruma az Euler-reláció alkalmazásával a következő:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \sin \vartheta_0 k e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \frac{e^{j\vartheta_0 k} - e^{-j\vartheta_0 k}}{2j} e^{-j\vartheta k}.$$

Felbontva a törtet kapjuk, hogy

$$\boxed{\mathcal{F}\{s[k] \sin \vartheta_0 k\} = \frac{1}{2j} \left[S(e^{j(\vartheta - \vartheta_0)}) - S(e^{j(\vartheta + \vartheta_0)}) \right]}, \quad (7.69)$$

A tétel szerint *amplitúdómodulációnál* a kisfrekvenciás $s[k]$ jel spektruma a nagyfrekvenciás vivőjel segítségével a $\pm \vartheta_0$ körfrekvencia környezetébe tevődik át. Ez tükröződik a tétel elnevezésében is.

7.3.3. Diszkrét idejű jelek spektruma

A következőkben néhány fontos jel Fourier-transzformáltját, azaz spektrumát fogjuk meghatározni.

1.) A *Dirac-impulzus* Fourier-transzformáltja a (7.51) definíció alapján meghatározható, mivel az abszolút összegezzhető:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] e^{-j\vartheta k} = \delta[0] e^{-j\vartheta 0} = 1,} \quad (7.70)$$

hiszen a $\delta[k]$ jel a $k = 0$ ütemen kívül minden időpillanatban nulla. Az eltoltságimpulzus spektruma hasonlóképp adható meg:

$$\mathcal{F}\{\delta[k - K]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - K] e^{-j\vartheta k} = e^{-j\vartheta K},$$

ugyanis az eltoltságimpulzus a $k = K$ hely kivételével minden ütemben nulla. Ugyanezen eredményre jutunk az eltolási tétel alkalmazásával is:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta[k - K]\} = \mathcal{F}\{\delta[k]\} e^{-j\vartheta K} = e^{-j\vartheta K}.} \quad (7.71)$$

A Dirac-impulzus Fourier-transzformáltját helyettesítsük be a (7.65) konvolúciós összefüggésbe:

$$Y(e^{j\vartheta}) = W(e^{j\vartheta}) 1,$$

ami annyit jelent, hogy a Dirac-impulzusra adott válasz (az impulzusválasz) spektruma megegyezik az átviteli karakterisztikával, azaz az *impulzusválasz Fourier-transzformáltja (spektruma) pontosan az átviteli karakterisztika*, és megfordítva *az átviteli karakterisztika inverz Fourier-transzformáltja az impulzusválasz*:

$$\boxed{W(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{w[k]\}, \quad w[k] = \mathcal{F}^{-1}\{W(e^{j\vartheta})\}. \quad (7.72)}$$

Ugyanezen eredményt szolgáltatja a (7.66) összefüggés is.

2.) A továbbiakban felhasználjuk a *belépő, exponenciálisan csillapodó jel* spektrumát ($|q| < 1$):

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} (q e^{-j\vartheta})^k.$$

A végtelen mértani sor összegképletének felhasználásával kapjuk, hogy:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\varepsilon[k]q^k\} = \frac{1}{1 - q e^{-j\vartheta}} = \frac{e^{j\vartheta}}{e^{j\vartheta} - q}. \quad (7.73)}$$

A $|q| < 1$ feltétel szükséges, mert ellenkező esetben a jel nem abszolút összegezzhető, a végtelen mértani sor pedig nem konvergens.

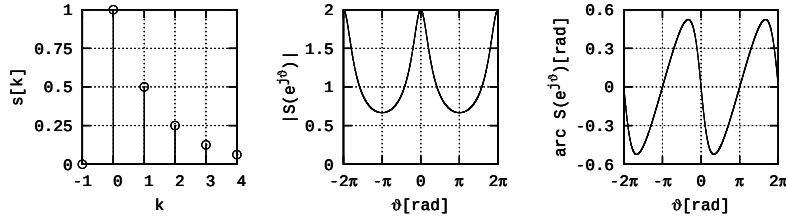
Ezen jel amplitúdóspektruma a következő:

$$|S(e^{j\vartheta})| = \frac{1}{|1 - q \cos \vartheta + jq \sin \vartheta|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - q \cos \vartheta)^2 + (q \sin \vartheta)^2}}.$$

A fázisspektruma pedig

$$\arg S(e^{j\vartheta}) = -\arctan \frac{q \sin \vartheta}{1 - q \cos \vartheta}.$$

A jel időgüggvénye, amplitúdóspektruma és fázisspektruma látható a 7.8. ábrán. Az amplitúdóspektrum páros függvény, a fázisspektrum pedig páratlan függvény.



7.8. ábra. Az $s[k] = \varepsilon[k] 0,5^k$ jel időfüggvénye, amplitúdóspektruma és fázisspektruma

A nem abszolút összegezhető egységugrásjel Fourier-transzformáltjának meghatározása előtt bevezetjük az előjelfüggvény és az egységnyi értékű, nem belépő, állandó jel spektrumát. Ugyanis az egységugrásjel spektruma ezek ismeretében meghatározható.

3.) Határozzuk meg először az

$$s[k] = -\{1 - \varepsilon[k]\} q^{-k} + \varepsilon[k-1] q^k$$

jel Fourier-transzformáltját ($0 < q < 1$). Abban az esetben, ha $q \rightarrow 1$, akkor ezen jel a

$$\text{sgn } k = \begin{cases} -1, & \text{ha } k < 0; \\ 0, & \text{ha } k = 0; \\ 1, & \text{ha } k > 0 \end{cases}$$

előjelfüggvényhez tart, az $s[k]$ jel értéke a $k = 0$ ütemben ugyanis nulla. Az $s[k]$ jel abszolút összegezhető, a $\text{sgn } k$ függvény viszont nem. Ezért spektrumát az $s[k]$ jel spektrumából származtatjuk. Alkalmazzuk a Fourier-transzformáció definíciós összefüggését az

$s[k]$ jelre:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{s[k]\} &= - \sum_{k=-\infty}^{-1} q^{-k} e^{-j\vartheta k} + \sum_{k=1}^{\infty} q^k e^{-j\vartheta k} = \\
&\stackrel{(1)}{=} - \left(\sum_{l=0}^{\infty} q^l e^{j\vartheta l} - 1 \right) + \sum_{k=0}^{\infty} q^k e^{-j\vartheta k} - 1 = \\
&\stackrel{(2)}{=} - \frac{1}{1 - q e^{j\vartheta}} + 1 + \frac{1}{1 - q e^{-j\vartheta}} - 1.
\end{aligned}$$

Az (1) lépés szerint az első szummában áttérünk a k indexről az l indexre $l = -k$ helyettesítéssel, ugyanis a végtelen mértani sor összegképletét így definiáltuk. Az összegképlet $l = 0$ -tól és $k = 0$ -tól érvényes. Ezért kibővítettük az összeget, ugyanakkor az $l = 0$ és $k = 0$ indexekhez tartozó értékeket le is vontuk az összegből. A (2) lépésben pedig felhasználtuk az előző függvény spektrumát.

Közös nevezőre hozás és összevonás után a következő eredményt kapjuk:

$$\mathcal{F}\{s[k]\} = \frac{q e^{-j\vartheta} - q e^{j\vartheta}}{1 - q e^{j\vartheta} - q e^{-j\vartheta} + q^2}.$$

Képezzük ezen spektrum határértékét, ha $q \rightarrow 1$, és rendezzük az eredményt

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} k\} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q e^{-j\vartheta} - q e^{j\vartheta}}{1 - q e^{j\vartheta} - q e^{-j\vartheta} + q^2} = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{e^{j\vartheta} - 2 + e^{-j\vartheta}}.$$

Ezt az eredményt tovább lehet egyszerűsíteni, ha felismerjük, hogy a nevezőt teljes négyzetté lehet alakítani az $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ azonosság alapján, továbbá a számláló a jól ismert $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ azonosságnak megfelelően alakítható $(a = e^{j\frac{\vartheta}{2}}, b = e^{-j\frac{\vartheta}{2}})$:

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} k\} = \frac{(e^{j\frac{\vartheta}{2}} + e^{-j\frac{\vartheta}{2}})(e^{j\frac{\vartheta}{2}} - e^{-j\frac{\vartheta}{2}})}{(e^{j\frac{\vartheta}{2}} - e^{-j\frac{\vartheta}{2}})^2}.$$

A nevezőben szereplő $e^{j\frac{\vartheta}{2}} - e^{-j\frac{\vartheta}{2}}$ tényezővel lehet egyszerűsíteni. Ezután szorozzuk be a számlálót is és a nevezőt is $e^{-j\frac{\vartheta}{2}}$ -vel, s azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} k\} = \frac{1 + e^{-j\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta}}. \quad (7.74)$$

Alakítsuk át az előbbi eredményt úgy, hogy a számlálót is és a nevezőt is elosztjuk $2j$ -vel, majd alkalmazzuk az Euler-relációt:

$$\frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{e^{j\vartheta} - 2 + e^{-j\vartheta}} = \frac{\frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}}{\frac{-2}{2j} + \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2j}} = \frac{\frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}}{j - j\frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2}} = \frac{-j \sin \vartheta}{1 - \cos \vartheta},$$

ami egy tisztán képzetes függvény. Ez az eredmény abból fakad, hogy az $s[k]$ jel páratlan függvény.

4.) Határozzuk meg ezután az

$$s[k] = q^{|k|} = \{1 - \varepsilon[k]\} q^{-k} + \varepsilon[k] q^k$$

jel spektrumát, ha $0 < q < 1$. Az ablakozott felírásban az első tag a $k = -\infty, \dots, -1$ ütemekben, a második tag pedig a $k = 0, \dots, \infty$ ütemekben szolgáltatja a $q^{|k|}$ jel értékét. Ez a jel abszolút összegezzhető, hiszen értéke mindkét irányban exponenciálisan csökken. Ha képezzük a $q \rightarrow 1$ határértéket, akkor ezen jel a nem abszolút összegezzhető *egységnyi értékű jel*hez tart. Ezen határérték képzése azonban az előbbinél jóval bonyolultabb.

Az előzőekhez hasonlóan képezzük az $s[k]$ jel Fourier-transzformáltját:

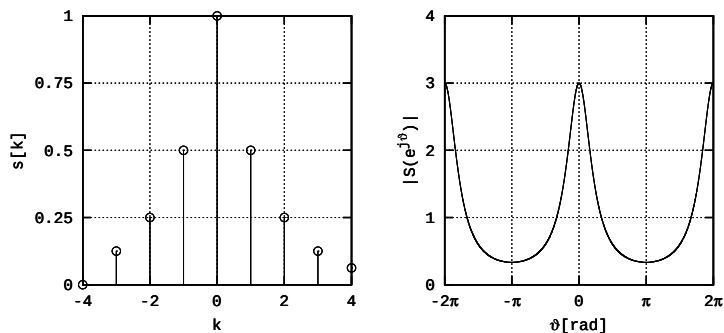
$$\mathcal{F}\{s[k]\} = \frac{1}{1 - qe^{j\vartheta}} - 1 + \frac{1}{1 - qe^{-j\vartheta}} = \frac{1 - q^2}{1 - qe^{j\vartheta} - qe^{-j\vartheta} + q^2}.$$

Alakítsuk át a kapott spektrumot az Euler-formulának megfelelően:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s[k]\} &= \frac{1 - q^2}{1 - q \cos \vartheta - jq \sin \vartheta - q \cos \vartheta + jq \sin \vartheta + q^2} = \\ &= \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos \vartheta + q^2}. \end{aligned}$$

Az így kapott eredményből látszik, hogy ezen jel spektruma tisztán valós függvény. Ez várható is volt, hiszen az $s[k]$ jel páros.

A jel időfüggvénye és amplitúdóspektruma látható a 7.9. ábrán (a fázisspektrum konstans 0, hiszen a spektrum valós). Az időfüggvényből látható, hogy $q \rightarrow 1$ esetén a jel a konstans 1 értékhez tart.



7.9. ábra. Az $s[k] = 0,5^{|k|}$ jel időfüggvénye és amplitúdóspektruma

Ebben az esetben nem képezhetjük egyszerűen a $q \rightarrow 1$ határértéket, mert akkor nullát kapnánk eredményül, ami viszont lehetetlen egy nem nulla értékű jelnél. A folytonos idejű jeleknél a konstans 1 értékű jel Fourier-transzformáltjára azt kaptuk, hogy $2\pi\delta(\omega)$. Diszkrét idejű konstans 1 értékű jel esetében ennek analógiájára a $2\pi\delta(\vartheta)$ spektrumot várnánk. Vizsgáljuk meg hát a kapott spektrumot a $\vartheta \in [-\pi, \dots, \pi]$ intervallumban. Ha $\vartheta = 0$ és $q \rightarrow 1$, akkor

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^2}{1 - 2q + q^2} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1 - q)(1 + q)}{(1 - q)^2} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1 + q)}{(1 - q)} = \infty.$$

Ha $\vartheta \neq 0$ és $q \rightarrow 1$, akkor minden esetben nulla értéket kapunk határértéknek. Ezen két esetből a folytonos Dirac-impulzusra ismerhetünk. Teljesülni kell azonban még azon feltételnek, hogy a görbe alatti terület egységnyi. Ennek bizonyítására írjuk fel a

következő határozatlan integrált:

$$\int \frac{1}{b - c \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{2 \arctg \left\{ \frac{(b+c) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{(b-c)(b+c)}} \right\}}{\sqrt{(b-c)(b+c)}}, \quad (7.75)$$

és vezessük be a következő jelöléseket: $b = 1 + q^2$, $c = 2q$. Ha ugyanis a spektrum számlálójában szereplő $1 - q^2$ tényezőt kiemeljük, akkor

$$\begin{aligned} (1 - q^2) \int \frac{1}{1 + q^2 - 2q \cos \vartheta} d\vartheta &= \\ &= (1 - q^2) \frac{2 \arctg \left\{ \frac{(q^2 + 2q + 1) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{(q^2 - 2q + 1)(q^2 + 2q + 1)}} \right\}}{\sqrt{(q^2 - 2q + 1)(q^2 + 2q + 1)}} = \\ &= -(q^2 - 1) \frac{2 \arctg \left\{ \frac{(q+1)^2 \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{(q-1)(q+1)} \right\}}{(q-1)(q+1)} \end{aligned}$$

Az integrandusz primitív függvényében tehát jól ismert azonosságok szerepelnek. További egyszerűsítésekkel a következő alakot kapjuk:

$$(1 - q^2) \int \frac{1}{1 + q^2 - 2q \cos \vartheta} d\vartheta = -2 \arctg \left\{ \frac{q+1}{q-1} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right\}.$$

A görbe alatti terület az integrálási határok behelyettesítése és $q \rightarrow 1$ határérték képzése után kapható meg:⁷

$$\begin{aligned} (1 - q^2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + q^2 - 2q \cos \vartheta} d\vartheta &= \\ &= -2 \arctg \{-\infty\} + 2 \arctg \{\infty\} = 2\pi. \end{aligned}$$

⁷A $q \rightarrow 1$ határérték képzése során a $\frac{q+1}{q-1}$ kifejezés bal oldali határértékét kell képezni, ugyanis q alulról tart 1-hez, hiszen abból indultunk ki, hogy $|q| < 1$. Ez a határérték pedig $-\infty$. Ezért vált előjelet az $\arctg$ függvény argumentuma. Ha minden egyes helyen $1 - q$ szerepelne, természetesen akkor is ugyanezen eredményre jutnánk.

Az integrálási határok tehát $-\pi$ és π , hiszen a spektrum 2π szerint periodikus és elegendő csak ezen tartományt ismerni. A görbe alatti terület tehát nem egységnyi, hanem 2π . A spektrum tehát a Dirac-impulzus 2π -szeresével ekvivalens függvény, azaz

$$\boxed{\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\vartheta), \quad \text{ha } \vartheta \in [-\pi, \dots, \pi],} \quad (7.76)$$

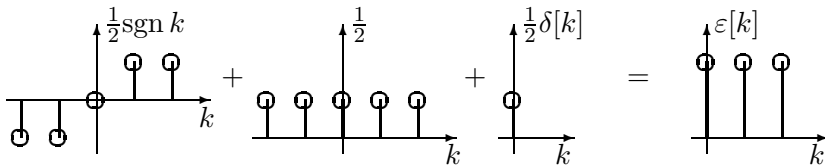
ahogy azt az analógia alapján is sejtettük. Fontos megjegyezni tehát, hogy ez a spektrum csak a $\vartheta \in [-\pi, \dots, \pi]$ intervallumban érvényes. A spektrum azonban 2π szerint periodikus, s a teljes spektrum a következő:

$$\boxed{\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - i2\pi).} \quad (7.77)$$

A kettő természetesen ekvivalens egymással. A spektrum valós értékű, hiszen a konstans jel páros függvény.

5.) Utóbbi két spektrum ismeretében már meghatározhatjuk az *egységugrásjel* spektrumát is. A folytonos idejű egységugrásjel spektrumának meghatározásához hasonlóan adjuk össze az $\frac{1}{2}\text{sgn } k$ függvényt és az $\frac{1}{2}$ állandó értékű, nem belépő függvényt. Az eredő függvény a $k = 0$ ütemen kívül minden ütemben az $\varepsilon[k]$ jelet adja, a $k = 0$ helyen azonban értéke csak $\frac{1}{2}$. Adjuk hozzá ezért az eredő jelhez még az $\frac{1}{2}\delta[k]$ jelet:

$$\boxed{\varepsilon[k] = \frac{1}{2}\text{sgn } k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta[k].} \quad (7.78)$$



Ennek Fourier-transzformáltja a következő:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{-j\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta}} + \pi\delta(\vartheta) + \frac{1}{2}.$$

Közös nevezőre hozás után kapjuk az egységugrásjel spektrumát:

$$\boxed{\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}} + \pi\delta(\vartheta).} \quad (7.79)$$

Ez a spektrum láthatóan tartalmaz valós és képzetes részt.

7.3.4. A válasz spektruma és időfüggvénye

Az $s[k]$ gerjesztés $S(e^{j\vartheta})$ spektrumának meghatározása után a rendszer $W(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztikáját felhasználva felírhatjuk a rendszer válaszána spektrumát:

$$\boxed{Y(e^{j\vartheta}) = W(e^{j\vartheta}) S(e^{j\vartheta}),} \quad (7.80)$$

amelynek inverz Fourier-transzformáltja szolgáltatja a válaszjel időfüggvényét:

$$\boxed{y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta.} \quad (7.81)$$

Ezen integrál csak nagyon speciális és egyszerű esetekben alkalmas az időfüggvény képletszerű megadására. Legtöbb esetben csak numerikusan oldható meg. A gyakorlatban azonban a spektrumból sok lényeges jellemzőre lehet következtetni.

Diszkrét idejű rendszerek esetében is létezik a *torzításmentes jelátvitel* és a *sávszélesség* fogalma. Ezen fogalmak azonban megegyeznek a folytonos idejű jelek és rendszerek esetében tárgyaltakkal, ezért ezeket itt nem ismételjük meg.

4. rész Analízis a komplex frekvenciatartományban

Ebben a részben azzal a gyakorlattal is sokszor előforduló esettel foglalkozunk, amikor a folytonos idejű rendszer bemenetére a $t = 0$ időpillanatban rákapcsolunk egy $s(t)$ időfüggvény szerint változó gerjesztést és a gerjesztés értéke nulla a $t < 0$ időpillanatokban. Ez az ún. *bekapcsolási jelenség*. Általánosan a bekapcsolás történhet a $t = \tau > 0$ időpillanatban is. Ennek párja az ún. *átkapcsolási folyamat*, amikor is a gerjesztés értéke a $\tau < t$ időpillanatokba nem nulla és a $t = \tau$ időpillanatban (vagy a $t = 0$ időpillanatban) ugrás (átkapcsolás) következik be. Előbbi az ún. *energiamentes eset*, utóbbi pedig a *nem energiamentes eset*.

Mindez diszkrét idejű rendszerek esetén ugyanezt jelenti. Bekapcsolási folyamatok vizsgálata során a diszkrét idejű rendszer bemenetére a $k = 0$ ütemben rákapcsolunk egy $s[k]$ időfüggvény szerint változó gerjesztést és a gerjesztés értéke a $k < 0$ időpillanatokban azonosan nulla. Általánosan a bekapcsolás történhet a $k = K > 0$ ütemben is. Ennek párja diszkrét idejű esetben is az átkapcsolási folyamat: a gerjesztés értéke a $K < k$ ütemekben nem nulla, de a $k = K$ ütemben (vagy a $k = 0$ ütemben) egy átkapcsolás következik be.

Ilyen jelenségek leírására és a válaszjel számítására folytonos idejű rendszerek esetében alkalmas a *Laplace-transzformáció*, diszkrét idejű rendszerek esetében pedig a *z-transzformáció*. Ebben a részben értelmezzük ezen transzformáltakat, és vizsgáljuk kapcsolatukat a Fourier-transzformációval.

A gerjesztés tehát *belépő* jellegű, és a rendszer kauzalitásából kifolyólag a válaszjel is belépő jellegű.

8. fejezet

FI rendszerek analízise a komplex frekvenciatartományban

8.1. A Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformációt többféleképp is bevezethetjük. Először a Fourier-transzformáció felől közelítjük meg a Laplace-transzformációt, majd lentebb formális bevezetést is adunk. Már az elején leszögezzük, hogy alapvetően *belépőjelekkel* foglalkozunk, azaz olyan jelekkel, amelyek a $t < 0$ időintervallumban nulla értékűek. Egy vizsgált folyamatot leíró jelek ugyanis egy adott pillanatban kezdődnek, ami nyugodtan választható nullának.

Láttuk, hogy csak azok a jelek Fourier-transzformálhatók a definíció alapján, amelyek *abszolút integrálhatók*. Így nem Fourier-transzformálható pl. az $\varepsilon(t)$, vagy az $\varepsilon(t)t$ függvény sem, hiszen ezen esetekben a (6.56) definíciónak megfelelő improprius integrál nem létezik. Ez nagyon leszűkíti az alkalmazási lehetőségeket. Képzeljük el azonban, hogy az abszolút integrálhatóságot úgy biztosítjuk, hogy a belépőjelet (ami egyébként nem feltétlenül ab-

szolút integrálható) beszorozzuk egy $e^{-\sigma t}$ ($\sigma > 0$) jellel, azaz

$$\boxed{\int_0^\infty |s(t)| dt < \infty, \quad \text{de} \quad \int_0^\infty |s(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty.} \quad (8.1)$$

Ha a jel belépő, akkor tetszőleges pozitív értékű σ választható a gyakorlatban előforduló jelek esetében, azaz σ értéke érdektelen számunkra. Az $\varepsilon(t)$ jel pl. tetszőleges $\sigma > 0$ érték mellett abszolút integrálhatóvá tehető, az $\varepsilon(t)e^{\alpha t}$ ($\alpha > 0$) exponenciálisan növekvő jelhez alkalmas választás a $\sigma > \alpha$. A lényeg tehát annak biztosítása, hogy a belépőjelet, ami esetleg a $t \rightarrow \infty$ esetén nem tart nullához, „leszorítsuk” egy exponenciális tényezővel, ami elég gyorsan tart nullához ahhoz, hogy a szorzatfüggvény eltűnjön $t \rightarrow \infty$ esetén. Abban az esetben, ha egy jelhez nem találunk ilyen σ értéket, akkor a jelet nem tekintjük Laplace-transzformálhatónak, s ilyen jelekkel nem is foglalkozunk. Egy példa ilyen jelre: $\varepsilon(t)e^{(\alpha t)^2}$.

Képezzük ennek a belépő szorzatfüggvénynek a Fourier-transzformáltját:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)s(t)e^{-\sigma t}\} = \int_0^\infty s(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt = \int_0^\infty s(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt,$$

majd vezessük be az $s = \sigma + j\omega$ jelölést, melynek eredményeképp definiáljuk egy $s(t)$ folytonos idejű jel Laplace-transzformáltját:

$$\boxed{S(s) = \int_{-0}^\infty s(t)e^{-st} dt,} \quad (8.2)$$

ahol $S(s)$ az $s(t)$ időfüggvény Laplace-transzformáltja (képfüggvénynek is nevezik), s pedig az un. *komplex frekvencia*, ugyanis $s \in \mathbb{C}$. Az integrálás alsó határa -0 , ami azt jelenti, hogy az $s(t)$ jel belépő kell legyen.¹ A szokásos jelölés szerint a -0 azt is jelöli,

¹Fontos megjegyezni, hogy az integrálás csak a $t \in [0, \infty]$ intervallumban történik, következésképp a jel $t < 0$ intervallumbeli viselkedése figyelmen kívül marad. Például az 1 és az $\varepsilon(t)$ jelek Laplace-transzformáltja ugyanaz.

hogy ha az $s(t)$ jel tartalmaz Dirac-impulzust, akkor azt is figyelembe kell venni az integrálás során, egyébként az alsó határ 0-nak tudható be. Az (8.2) integrált a következő operátorral szokás jelölni (írott L betű):

$$\boxed{S(s) = \mathcal{L}\{s(t)\}}. \quad (8.3)$$

A komplex frekvenciatartományt folytonos idejű jelek esetében s -tartománynak is nevezik.

8.1.1. A Laplace-transzformáció tételei

A következőkben felsoroljuk és bizonyítjuk a Laplace-transzformáció néhány tételét, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz. Egyes esetekben ezeket alkalmazzuk is.

Linearitás

A Laplace-transzformáció és (később látni fogjuk) inverze is egy-egy integrált jelent. Az integrálás pedig *lineáris operátor*, azaz bármely C_1, C_2 konstans esetén fennáll, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}\{C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)\} &= C_1 \mathcal{L}\{s_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{s_2(t)\}, \\ \mathcal{L}^{-1}\{C_1 S_1(s) + C_2 S_2(s)\} &= C_1 \mathcal{L}^{-1}\{S_1(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{S_2(s)\}. \end{aligned}} \quad (8.4)$$

Általánosan (n összegre) ez a következőt jelenti:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n C_i s_i(t)\right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{L}\{s_i(t)\}, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^n C_i S_i(s)\right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{L}^{-1}\{S_i(s)\}. \end{aligned}} \quad (8.5)$$

Ez a *szuperpozíció elve*, és azt jelenti, hogy a transzformáció és inverze tagonként elvégezhető.

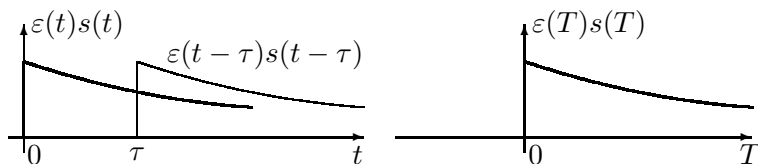
Eltolási tétel

Ha létezik az $\varepsilon(t)s(t)$ jel $S(s)$ Laplace-transzformáltja, akkor a $\tau > 0$ idővel eltolt (késleltett) $\varepsilon(t - \tau)s(t - \tau)$ jel Laplace-transzformáltja az *eltolási tétel* értelmében a következő:²

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t - \tau)s(t - \tau)\} = e^{-s\tau}S(s),} \quad (8.6)$$

azaz az időbeli eltolás az s -tartományban $e^{-s\tau}$ exponenciális függvénnyel végzett szorzásnak felel meg. Itt arra kell ügyelnünk, hogy az $\varepsilon(t)$ jelben és az $s(t)$ jelben is ugyanazon τ eltolás szerepeljen.

Ezt a tételt a következő illusztráció segítségével bizonyítjuk:



Írjuk be a Laplace-transzformáció (8.2) definíciójába az $\varepsilon(t)s(t)$ jel helyett az eltolt $\varepsilon(t - \tau)s(t - \tau)$ jelet:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t - \tau)s(t - \tau)\} = \int_{\tau-0}^{\infty} s(t - \tau)e^{-st} dt,$$

ahol az integrálás alsó határa azért lett $\tau - 0$, mert a $t < \tau$ időpillanatokban az eltolt jel értéke nulla. Vezessük be most a $T = t - \tau$ változót, mint új időtengelyt, melynek origója a τ pontban lesz (l. ábra). Így $t = T + \tau$ és $dt = dT$, mivel τ konstans. Írjuk át ezen új integrálási változónak megfelelően a fenti integrált:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t - \tau)s(t - \tau)\} = \int_{-0}^{\infty} s(T)e^{-s(T+\tau)} dT,$$

amelyben az $e^{-s\tau}$ konstans a T változó szerint, így ez a tag kiemelhető az integrál elé, és az integrál a Laplace-transzformáció

²Az $\varepsilon(t)$ jel mindig szerepel az $s(t)$ jel mellett, hiszen belépőjelekről van szó.

definíciója lesz, azaz

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t-\tau)s(t-\tau)\} = e^{-s\tau} \underbrace{\int_{-0}^{\infty} s(T)e^{-sT} dT}_{S(s)=\mathcal{L}\{\varepsilon(T)s(T)\}} = e^{-s\tau} S(s).$$

Ez pedig pontosan az eltolási tétel.³

Derivált jel Laplace-transzformáltja

Ha létezik a szakaszonként folytonos és differenciálható, nem belépő $s(t)$ jel $S(s)$ Laplace-transzformáltja, akkor az $\dot{s}(t)$ *derivált jel Laplace-transzformáltja* a következő:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\dot{s}(t)\} = sS(s) - s(-0)}, \quad (8.7)$$

azaz a $t = -0$ pontban (általánosan a szakadási helyeken) kell, hogy létezzen az $s(-0)$ bal oldali határérték. Ha az $s(t)$ jel belépő, akkor $s(-0) = 0$, azaz az időtartományban végzett deriválás az s -tartományban s -sel végzett szorzásnak felel meg:

$$\boxed{\mathcal{L}\{[\varepsilon(t)s(t)]'\} = sS(s)}. \quad (8.8)$$

A (8.7) összefüggés igazolása céljából helyettesítsük be az $\dot{s}(t)$ derivált jelet a Laplace-transzformáció (8.2) összefüggésébe és használjuk az $\int u'v = uv - \int uv'$ parciális integrálás szabályát (legyen $u' = \dot{s}(t)$ és $v = e^{-st}$, valamint $u = s(t)$ és $v' = -se^{-st}$):

$$\mathcal{L}\{\dot{s}(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \dot{s}(t)e^{-st} dt = [s(t)e^{-st}]_{-0}^{\infty} + s \int_{-0}^{\infty} s(t)e^{-st} dt.$$

³Az eltolási tételt a Fourier-transzformáció kapcsán annak inverz alakjából igazoltuk, mivel az alsó integrálási tartományt nem lehetett volna átírni $\tau - \infty$ -re.

Az első tag értéke nulla a felső integrálási határ helyettesítése esetén és $s(-0)$ az alsó határ esetén, végeredményben $-s(-0)$ -át ad. Az integrál pedig pontosan az (8.2) kifejezés. Így a (8.7) kifejezést kapjuk.

Az összefüggés belépőjelekre a következőképp általánosítható:

$\mathcal{L}\left\{(\varepsilon(t)s(t))^{(n)}\right\} = s^n S(s)$. Az általánosítás nem belépőjelekre a következőképp néz ki általánosán:

$$\mathcal{L}\left\{s^{(n)}(t)\right\} = s^n S(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i s^{(n-1-i)}(-0). \quad (8.9)$$

Például

$$\begin{aligned} n=2: \quad \mathcal{L}\{\ddot{s}(t)\} &= s[sS(s) - s(-0)] - \dot{s}(-0) = \\ &= s^2 S(s) - ss(-0) - \dot{s}(-0), \\ n=3: \quad \mathcal{L}\{s^{(3)}(t)\} &= s^3 S(s) - s^2 s(-0) - s\dot{s}(-0) - \ddot{s}(-0). \end{aligned}$$

Az átviteli függvény meghatározása az állapotváltozás leírás alapján. Alkalmazzuk az utóbbi tételt az állapotváltozás leírásra. Ezúton egy új fogalomhoz, a rendszer *átviteli függvényéhez* jutunk, amely egy *rendszerjellemező függvény*.⁴

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns és kauzális SISO-rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja a következő:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}s(t), \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + Ds(t). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Képezzük az egyenletek Laplace-transzformáltját és alkalmazzuk a derivált jel Laplace-transzformáltjának megismert kifejezését és szorítkozzunk *belépő gerjesztésre* (így a válaszjel is belépő):

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}S(s), \\ Y(s) &= \mathbf{c}^T \mathbf{X}(s) + DS(s). \end{aligned} \quad (8.11)$$

⁴A levezetés nagyon hasonló az állapotváltozós leírás és az átviteli karakterisztika kapcsolatának bemutatása során leírtakhoz (l. 151. oldal).

Az első egyenletből az $\mathbf{X}(s)$ állapotvektor Laplace-transzformáltja kifejezhető:

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{b}S(s) \Rightarrow (s\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{b}S(s),$$

azaz

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}S(s), \quad (8.12)$$

ahol $\mathbf{E}$ az N -edrendű egységmátrix. A kapott eredményt helyettesítsük be az $Y(s)$ kifejezésébe:

$$Y(s) = \left[\mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D \right] S(s). \quad (8.13)$$

Utóbbiból fejezhető ki az *átviteli függvény*, amely a *válaszjel és a gerjesztés Laplace-transzformáltjának hányadosa*:

$$\boxed{W(s) = \frac{Y(s)}{S(s)} = \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D.} \quad (8.14)$$

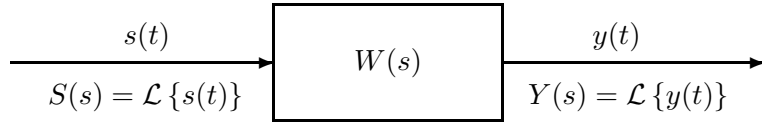
Alkalmazzuk ezután az

$$(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{E} - \mathbf{A}|}$$

összefüggést, melynek segítségével az átviteli függvény a következő polinom per polinom alakban fejezhető ki:

$$\boxed{W(s) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(s\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + |s\mathbf{E} - \mathbf{A}| D}{|s\mathbf{E} - \mathbf{A}|} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n},} \quad (8.15)$$

azaz az *átviteli függvény az s változó racionális függvénye valós együtthatókkal*. Az átviteli karakterisztika a következő ábrával ilusztrálható:



Az átviteli karakterisztika *MIMO-rendszerekre* a következőképp írható:

$$\boxed{\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}}, \quad (8.16)$$

ami az *átviteli függvény-mátrix*, melynek ij indexű eleme megadja az i -edik kimenet és a j -edik bemenet között fennálló átviteli függvényt úgy, hogy közben az összes többi bemeneten nincs jel:

$$W(s)_{ij} = \left. \frac{Y_i(s)}{S_j(s)} \right|_{S_k(s)=0, k \neq j}, \quad i = 1, \dots, N_y, j = 1, \dots, N_s. \quad (8.17)$$

Az átviteli függvény nevezőjének gyökeit pólusoknak, számlálójának gyökeit zérusoknak nevezzük.

Ha a gerjesztés nem belépő, akkor az állapotvektor deriváltjának Laplace-transzformáltja nem egyszerűen $s\mathbf{X}(s)$ lesz, hanem $s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(-0)$.

Látható, hogy formálisan ugyanazon műveleteket végeztük el, mint a frekvenciatartománybeli analízis során.

A rendszeregyenlet és az átviteli függvény kapcsolata.

Egy rendszer átviteli függvénye tehát a következő:

$$\boxed{W(s) = \frac{Y(s)}{S(s)} = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^{n-i}}{s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}}}.$$

Szorozzunk keresztbe:

$$Y(s) \left(s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i} \right) = S(s) \sum_{i=0}^n b_i s^{n-i},$$

majd *belépő* gerjesztést és választ feltételezve vegyük figyelembe, hogy s -el való szorzás az időtartományban deriválásnak felel meg. Így eljutunk a rendszeregyenlethez:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i s^{(n-i)}(t).$$

A műveletek fordított sorrendben is elvégezhetők, melynek eredményeképp a rendszeregyenletből jutunk el az átviteli függvényhez.

A konvolúció Laplace-transzformáltja

Az eltolási tételt alkalmazzuk a *konvolúció Laplace-transzformáltjának* meghatározása során. Az időtartományban végzett $y(t) = w(t) * s(t)$ konvolúció Laplace-transzformálható belépőgerjesztés és Laplace-transzformálható belépő impulzusválasz esetén az s -tartományban *szorzattá egyszerűsödik*:

$$\boxed{Y(s) = \mathcal{L}\{w(t)\} \mathcal{L}\{s(t)\} = W(s) S(s),} \quad (8.18)$$

ahol $S(s)$ és $Y(s)$ a belépőgerjesztés és a belépőválaszjel Laplace-transzformáltja, $W(s)$ pedig a rendszer átviteli függvénye. A tétel bizonyítása érdekében Laplace-transzformáljuk a konvolúció (4.14) kifejezését:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^t s(\tau) w(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt.$$

Ezen összefüggésben a belső integrál felső határa t , hiszen az impulzusválasz belépő. Cseréljük le ezen határt ∞ -re úgy, hogy közben a $w(t - \tau)$ helyébe $\varepsilon(t - \tau)w(t - \tau)$ -t írunk, azaz az integrálon belül jelöljük, hogy az impulzusválasz belépő. Erre az ezt követő lépések miatt van szükség. Tehát:

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \varepsilon(t - \tau) w(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt$$

Cseréljük fel ezután az integrálás sorrendjét:

$$Y(s) = \int_{-0}^{\infty} s(\tau) \left(\int_{\tau-0}^{\infty} \varepsilon(t-\tau) w(t-\tau) e^{-st} dt \right) d\tau.$$

A belső integrál alsó határa $\tau - 0$ lett, hiszen az integranduszban szereplő $\varepsilon(t-\tau)w(t-\tau)$ jel a $t < \tau$ időpillanatokban nulla értékű. A belső integrál pedig pontosan az eltolts jel Laplace-transzformáltja (v.ö. (8.1.1) összefüggéssel), azaz:

$$Y(s) = \int_{-0}^{\infty} s(\tau) W(s) e^{-s\tau} d\tau = W(s) \int_{-0}^{\infty} s(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

amely összefüggésben a gerjesztés Laplace-transzformáltja ismerhető fel, azaz:

$$Y(s) = W(s) S(s).$$

Ezen összefüggés tehát a konvolúció Laplace-transzformáltja. Emlékezzünk vissza arra, hogy a konvolúció adott impulzusválaszú rendszer válaszána meghatározására alkalmas adott gerjesztés mellett. Ezen összefüggés pedig a gerjesztés Laplace-transzformáltjának és az átviteli függvénynek a szorzatát tartalmazza, ami a válaszjel Laplace-transzformáltját eredményezi.

Kövessük végig ezután a következő gondolatmenetet, melynek kapcsán eljutunk a Laplace-transzformáció formális megadásához. Legyen egy kauzális rendszer nem belépő gerjesztése az $s(t) = e^{st}$ jel, amely gyakorlatilag megfelel egy *exponenciálisan növekvő amplitúdójú szinuszos jel*nek, hiszen $e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$, ahol $\sigma > 0$ és a második tényező pedig az Euler-formulának megfelelően egy szinuszos jel (l. 202. oldal). Vegyük ezen jel és a rendszer impulzusválaszána konvolúcióját:

$$y(t) = \int_0^{\infty} w(\tau) s(t-\tau) d\tau = \int_0^{\infty} w(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau,$$

majd bontsuk fel a kitevőben szereplő zárójelet. Ekkor e^{st} kiemelhető, ugyanis az integrálás a τ változó szerint történik:

$$y(t) = \int_0^\infty w(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau = e^{st} \int_0^\infty w(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Az összefüggésben szereplő integrált a $w(t)$ impulzusválasz Laplace-transzformáltjának, vagy a rendszer átviteli függvényének nevezzük (ezt a 299. oldalon igazoljuk is):

$$\boxed{W(s) = \int_{-0}^\infty w(t) e^{-st} dt.} \quad (8.19)$$

Így a rendszer válasza a következő:

$$y(t) = W(s) e^{st},$$

azaz a kimeneti jel alakja a $W(s)$ átviteli függvénytől eltekintve olyan, mint a gerjesztés alakja. Az átviteli függvényt ezért a *rendszer sajátértékének* is szokás nevezni, az e^{st} gerjesztés pedig az un. *sajátfüggvény*.

Ez tehát a Laplace-transzformáció formális bevezetése, amikor is a konvolúcióból indultunk ki és egyben eljutottunk a rendszer átviteli függvényének definíciójához is. Az integrálban szereplő $w(\tau)$ helyébe tetszőleges $s(t)$ függvényt írva definiálhatjuk az $s(t)$ jel Laplace-transzformáltját is, ha ez az improprius integrál létezik.

Integrált jel Laplace-transzformáltja

Ha létezik az $\varepsilon(t) s(t)$ jel $S(s)$ Laplace-transzformáltja, akkor az *integrált jel Laplace-transzformáltja* a következő:

$$\boxed{\mathcal{L} \left\{ \int_{-0}^t s(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{s} S(s),} \quad (8.20)$$

azaz az időtartományban végzett integrálás az s -tartományban s -sel való osztást jelent. A tételt kétféleképp is bizonyíthatjuk. Először helyettesítsük be az integrált a (8.2) definícióba és alkalmazzuk az $\int u'v = uv - \int uv'$ parciális integrálás szabályát:

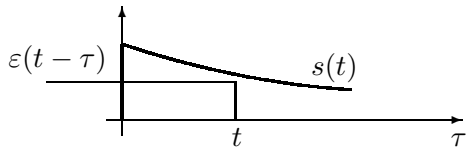
$$\int_{-0}^{\infty} \left\{ \int_{-0}^t s(\tau) d\tau \right\} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{s} \int_{-0}^t s(\tau) d\tau \right]_{-0}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{-0}^{\infty} s(t) e^{-st} dt,$$

ahol a következő jelöléseket alkalmaztuk⁵:

$$\begin{aligned} u' &= e^{-st} & u &= \frac{e^{-st}}{-s}, \\ v &= \int_{-0}^t s(\tau) d\tau & v' &= s(t). \end{aligned}$$

A parciális integrálásban az első tag nulla, mivel a felső integrálási határ helyettesítési értéke nulla, az alsó integrálási határ helyettesítési értéke pedig azért nulla, mert az integrál felső határa megegyezik az alsó határral. Az utolsó integrál pedig pontosan a Laplace-transzformáció definíciója.

A következő bizonyítás egyszerűbb, de igényli a következő illusztráció értelmezését:



Induljunk ki az $\varepsilon(t)$ jel és egy tetszőleges belépő $s(t)$ jel (amit jelen esetben integrálni akarunk) konvolúciójából:

$$\varepsilon(t) * s(t) = \int_{-0}^t \varepsilon(t - \tau) s(\tau) d\tau = \int_{-0}^t s(\tau) d\tau.$$

Vegyük figyelembe, hogy az integrálás a τ változó szerint történik, s ennek szempontjából t egy konstans, ahol épp keressük az integrál értékét. Ennek megfelelően az $\varepsilon(t - \tau) = \varepsilon(-(\tau - t))$, ami az

⁵Ezt mindenképp így érdemes megtenni, ugyanis ha fordítva választottunk volna, akkor az integrál primitív függvényét kellett volna meghatározni.

ábrán is látható. Ugyanis az $\varepsilon(-\tau)$ jel az $\varepsilon(\tau)$ jel tükörképe az ordinátatengelyre. Az $\varepsilon(-(\tau-t))$ tehát azt jelenti, hogy az $\varepsilon(\tau)$ jelet tükrözni kell a függőleges tengelyre, majd t -vel el kell tolni pozitív irányba. A két jel szorzata tehát valóban a végeredményben kapott integrált adja, és pontosan ezen integrál Laplace-transzformáltját keressük. A konvolúció Laplace-transzformáltjának ismeretében írhatjuk, hogy:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_{-0}^t s(\tau) d\tau \right\} = \mathcal{L} \{ \varepsilon(t) * s(t) \} = \mathcal{L} \{ \varepsilon(t) \} \mathcal{L} \{ s(t) \} = \frac{1}{s} S(s).$$

A 296. oldalon igazoljuk, hogy $\mathcal{L} \{ \varepsilon(t) \} = \frac{1}{s}$.

A csillapítási tétel

A *csillapítási tétel* azt mondja ki, hogy egy belépő és Laplace-transzformálható $s(t)$ jel és egy $e^{-\alpha t}$ exponenciálisan csökkenő jel ($\alpha > 0$) szorzatának (amely csillapítja az $s(t)$ jelet) Laplace-transzformáltja a következő:

$$\boxed{\mathcal{L} \{ s(t)e^{-\alpha t} \} = S(s + \alpha)}, \quad (8.21)$$

hiszen

$$\int_{-0}^{\infty} s(t)e^{-\alpha t}e^{-st} dt = \int_{-0}^{\infty} s(t)e^{-(\alpha+s)t} dt = S(s + \alpha),$$

azaz az $s(t)$ jel $S(s)$ Laplace-transzformáltjában minden s helyébe $(s + \alpha)$ -t kell írni. Ez egy eltolás s -ben. A tétel tehát a Fourier-transzformáció modulációs tételével analóg.

Kezdetiérték-tétel és végértéktétel

A Laplace-transzformációnak van két un. *végérték tétele*, melyek segítségével meghatározhatjuk az $s(t)$ jel kezdeti értékét a $t = +0$ -ban és végértékét $t \rightarrow \infty$ esetén az $S(s)$ Laplace-transzformált

ismeretében, ha ezek a határértékek léteznek:

$$\boxed{s(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s S(s), \quad s(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s).} \quad (8.22)$$

Ezen tételeket akkor kényelmes alkalmazni, ha a jel Laplace-transzformáltja ismert és az időfüggvény határértéke a kérdés, pl. ha a válaszjel Laplace-transzformáltját meghatározzuk. A határértékek meghatározásához tehát nem kell meghatározni az időfüggvényt. A kezdetiérték-tétel bizonyítását később végezzük el (l. 298. oldal), a végértéktételt pedig a következőképp bizonyítjuk. Tudjuk, hogy a derivált jel Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}\{\dot{s}(t)\} = sS(s) - s(-0)$. Határozzuk meg először a (8.2) definícióban szereplő integrál következő határértékét az $\dot{s}(t)$ jelre:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-0}^{\infty} \dot{s}(t) e^{-st} dt = \int_{-0}^{\infty} \dot{s}(t) dt = s(\infty) - s(-0) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) - s(-0).$$

Használjuk fel ezután a derivált jel Laplace-transzformáltját is:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-0}^{\infty} \dot{s}(t) e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sS(s) - s(-0)] = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) - s(-0),$$

majd tegyük ezeket egyenlővé, amikor is $s(-0)$ kiesik és a végértéktételt kapjuk eredményül:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s).$$

Kapcsolat a Fourier-transzformálttal

A fejezet bevezetőjében láttuk, hogy a Laplace-transzformációt a Fourier-transzformáció általánosításaként vezettük be. Ennek eredményeképp kell, hogy legyen kapcsolat a két transzformált között.

Ha ugyanis az $s(t)$ jel *belépő* és *abszolút integrálható*, akkor a jel $S(j\omega)$ spektruma meghatározható a Laplace-transzformáltból $s = j\omega$ helyettesítéssel:

$$\boxed{S(j\omega) = S(s)|_{s=j\omega}.} \quad (8.23)$$

Ez biztosan igaz, ha a jel belépő, korlátos és véges tartójú, vagy ha a jel belépő, korlátos és a $t \rightarrow \infty$ esetén exponenciálisan nullához tart. Az összefüggés így nem érvényes pl. az $\varepsilon(t)$ jelre, mert az nem abszolút integrálható. Az $\varepsilon(t)$ jel Laplace-transzformáltja ugyanis $\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}$. Ha s helyébe $j\omega$ -t helyettesítünk, akkor $\frac{1}{j\omega}$ -t kapunk, ami helytelen, hiszen tudjuk, hogy ezen jel Fourier-transzformáltja $\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.

Ha a rendszer *gerjesztés-válasz stabilis és kauzális*, akkor az átviteli karakterisztika előállítható az átviteli függvényből:

$$\boxed{W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega}} \quad (8.24)$$

Felmerül a kérdés: miért lehet ebben az esetben $\sigma = 0$? Belépő-jel Laplace-transzformáltjának ismeretében a jel Fourier-transzformáltja csak akkor állítható elő, ha a jel abszolút integrálható. Az abszolút integrálható jeleket azonban nem kell „leszorítani” az $e^{-\sigma t}$ függvényvel, következésképp $\sigma = 0$ választható.

8.1.2. Folytonos idejű jelek Laplace-transzformáltja

A következőkben néhány fontos jel Laplace-transzformáltját fogjuk meghatározni, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

1.) Határozzuk meg először az $\varepsilon(t)$ *egységugrásjel* (a legegyszerűbb belépőjel) Laplace-transzformáltját. Induljunk ki a definícióból és vegyük figyelembe, hogy az $s(t) = \varepsilon(t)$ jel értéke 1 a $t > 0$ tartományban:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty = \frac{0 - 1}{-s} = \frac{1}{s},$$

azaz

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s}} \quad (8.25)$$

Jegyezzük meg, hogy ugyanez lesz a $t < 0$ időpillanatokban is egységnyi értékű jel és az előjelfüggvény Laplace-transzformáltja

is. Bármi is legyen tehát a jel értéke a $t < 0$ időpillanatokra, azt a Laplace-transzformáció figyelmen kívül hagyja.

2.) Határozzuk meg az $\varepsilon(t)t$ jel (un. sebességjel) Laplace-transzformáltját először a definícióból kiindulva, és alkalmazzuk az $\int u'v = uv - \int uv'$ parciális integrálás szabályát az $u' = e^{-st}$, $v = t$ jelölések mellett, azaz $u = \frac{e^{-st}}{-s}$ és $v' = 1$:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)t\} = \int_0^\infty te^{-st} dt = \left[t \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

Az első tag nulla, hiszen a két helyettesítési érték nulla. A második tagban az integrál értéke pedig az $\varepsilon(t)$ jel Laplace-transzformáltja.

Meghatározhatjuk ezen jel Laplace-transzformáltját úgy is, hogy kiindulunk abból a tényből, hogy az 1 jel integrálja (primitív függvénye) a t függvény, azaz az $\varepsilon(t)$ jel integrálja az $\varepsilon(t)t$ jel. Az $\varepsilon(t)$ jel Laplace-transzformáltját ismerjük: $\frac{1}{s}$, majd alkalmazzuk a (8.20) összefüggést: ha az $\varepsilon(t)$ jelet integráljuk, akkor az s -tartományban s -el kell osztani az $\varepsilon(t)$ jel Laplace-transzformáltját. Így szintén $\frac{1}{s^2}$ -et kapunk.

Folytassuk ezt a sort (l. 8.1. ábra). Az $\varepsilon(t)t$ jel integrálja az $\varepsilon(t)\frac{t^2}{2}$ jel, aminek Laplace-transzformáltját úgy kapjuk, hogy az $\varepsilon(t)t$ jel Laplace-transzformáltját elosztjuk s -el, azaz:

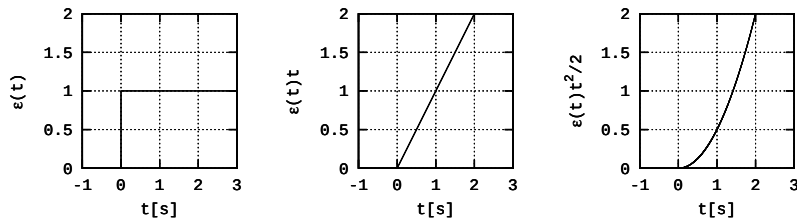
$$\mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{t^2}{2}\right\} = \frac{1}{s^3}.$$

További pár integrált jelre kapjuk, hogy:

$$\mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{t^3}{6}\right\} = \frac{1}{s^4}, \quad \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{t^4}{24}\right\} = \frac{1}{s^5}, \quad \dots$$

Általánosan tehát:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\varepsilon(t)\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{s^{n+1}}.} \quad (8.26)$$



8.1. ábra. Az $\varepsilon(t) \frac{t^n}{n!}$ jelek $n = 0, 1, 2$ esetekre (ezen jelek biztosan nem abszolút integrálhatók, ez látszik az ábrából is)

Ezen összefüggésre az inverz Laplace-transzformáció során szükségünk lehet.

Ezen ismeretek birtokában egyszerűen bizonyíthatjuk a kezdetiérték-tételt. Később látni fogjuk, hogy az általunk vizsgált jelek Laplace-transzformáltja polinom per polinom alakú kifejezés, amelyben a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma. Állítsuk elő ennek $\frac{1}{s}$ szerinti hatványsorát úgy, hogy polinomosztások sorozatát végezzük, azaz

$$S(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \dots,$$

amelyhez tehát a következő időfüggvény tartozik:

$$s(t) = \varepsilon(t) \left(a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + a_3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = \varepsilon(t) \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{t^i}{i!},$$

ami épp az $s(t)$ jel Taylor-sora a $t = 0$ pont környezetében. Ebben látható, hogy ha $t = +0$, akkor $s(+0) = a_0$, ami az $S(s)$ Laplace-transzformáltból akkor kapható meg, ha azt s -el beszorozzuk és vesszük a határértékét az $s \rightarrow \infty$ esetben. Ez pedig pontosan a kezdetiérték-tétel.

3.) A *Dirac-impulzus* Laplace-transzformáltját is kétféleképp kaphatjuk meg. A (8.2) definíció és a Dirac-impulzus definíciója

alapján írhatjuk, hogy

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-0}^{+0} \delta(t) e^{-s0} dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1.$$

Az alsó integrálási határt tehát -0 -nak kell írni, hiszen a behelyettesített $s(t)$ függvény a Dirac-impulzus, ami azonban a $t = 0$ helyen kívül mindenütt nulla értékű. Ezért kell a felső integrálási határt $+0$ -nak választani, és az e^{-st} függvény argumentumába is ezen oknál fogva kell a $t = 0$ értéket behelyettesíteni, ami így 1-et ad. Az eredmény a Dirac-impulzus definíciójából következik.

Ha figyelembe vesszük, hogy a Dirac-impulzus az egységugrásjel általánosított deriváltja ($\delta(t) = \varepsilon'(t)$), akkor a derivált jel Laplace-transzformáltja (l. (8.7) összefüggés) alapján azt mondhatjuk, hogy ha az $\varepsilon(t)$ jel Laplace-transzformáltját (ami $\frac{1}{s}$) megszorozzuk s -sel, akkor megkapjuk az egységugrásjel deriváltjának, azaz a Dirac-impulzusnak a Laplace-transzformáltját:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = s\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = s\frac{1}{s} = 1.} \quad (8.27)$$

Az eltolási tétel értelmében az eltolt Dirac-impulzus Laplace-transzformáltja a következő:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = e^{-s\tau}.} \quad (8.28)$$

Helyettesítsük be most a Dirac-impulzus Laplace-transzformáltját a (8.18) összefüggésbe:

$$Y(s) = W(s) 1,$$

azaz a *Dirac-impulzusra adott válasz (ami az impulzusválasz) Laplace-transzformáltja pontosan az átviteli függvény*, és megfordítva az átviteli függvény inverz Laplace-transzformáltja az impulzusválasz:

$$\boxed{W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}, \quad w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\},} \quad (8.29)$$

ahogy azt a (8.19) összefüggéssel is definiáltuk.

4.) Határozzuk meg az $\varepsilon(t)$ jel és az $e^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) jel szorzatának, azaz a *csillapított egységugrásjelnek* a Laplace-transzformáltját.⁶ Induljunk ki először a definícióból:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \\ &= \left[\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)} \right]_0^{\infty} = \frac{0-1}{-(s+\alpha)} = \frac{1}{s+\alpha}.\end{aligned}$$

Használhatjuk a csillapítási tételt is, ugyanis az $\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ jel az $\varepsilon(t)$ csillapítottja. A csillapítási tétel pedig azt mondja ki, hogy az eredeti jel (jelen esetben az $\varepsilon(t)$) Laplace-transzformáltjában (ami ekkor $\frac{1}{s}$) minden s helyébe $(s+\alpha)$ -át kell írni, azaz

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s} \Big|_{s \rightarrow s+\alpha} = \frac{1}{s+\alpha}.} \quad (8.30)$$

Ha elvégezzük az $\alpha = 0$ helyettesítést, akkor pontosan az $\varepsilon(t)$ jelet kapjuk, továbbá a transzformált $\frac{1}{s}$ lesz, ami a helyes eredmény.

5.) Szükségünk lesz az $\varepsilon(t)e^{j\omega t}$ és az $\varepsilon(t)e^{-j\omega t}$ jelek Laplace-transzformáltjára. Az előbbieket alapján, $\alpha = j\omega$ helyettesítéssel ezek a következőképp néznek ki:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{j\omega t}\} = \frac{1}{s-j\omega}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{s+j\omega}.} \quad (8.31)$$

Ezen eredmények segítségével pedig az $\varepsilon(t) \cos \omega t$ és az $\varepsilon(t) \sin \omega t$ jelek Laplace-transzformáltja felírható a (8.2) integrál meghatározása nélkül:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t) \cos \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t) \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+j\omega}.$$

⁶Ugyanez lesz pl. az $e^{-\alpha|t|}$, az $[1-\varepsilon(t)]e^{\alpha t} + \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$, vagy az $e^{-\alpha t}$ jelek Laplace-transzformáltja is, hiszen a transzformáció a $t < 0$ időpillanatokat figyelmen kívül hagyja.

Hozzunk közös nevezőre:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t) \cos \omega t\} = \frac{1}{2} \frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{1}{2} \frac{s + j\omega + s - j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Az $\varepsilon(t) \sin \omega t$ jel Laplace-transzformáltja pedig a következő:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t) \sin \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\varepsilon(t) \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j} \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s + j\omega}.$$

Hozzuk közös nevezőre ismét az eredményt:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t) \sin \omega t\} = \frac{1}{2j} \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s + j\omega} = \frac{1}{2j} \frac{s + j\omega - s + j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Összefoglalva tehát:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\varepsilon(t) \cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\varepsilon(t) \sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.} \quad (8.32)$$

6.) Határozzuk meg a *belépő, általános periodikus jel* Laplace-transzformáltját. Az $f(t)$ függvény szerint változó periodikus jel első periódusa a következő függvénnyel állítható elő:

$$s_T(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)]f(t), \quad (8.33)$$

melynek $S_T(s) = \mathcal{L}\{s_T(t)\}$ Laplace-transzformáltját meghatározhatjuk. Ha ezt a jelet eltoljuk iT helyekre ($i = 0, 1, \dots, \infty$), akkor megkapjuk az $s(t)$ periodikus jel időfüggvényét:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s_T(t - iT). \quad (8.34)$$

Használjuk ki a Laplace-transzformáció linearitását, azaz transzformáljuk ezt a kifejezést tagonként és közben alkalmazzuk a Laplace-transzformáció eltolási tételét:

$$\boxed{S(s) = \mathcal{L}\{s(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}\{s_T(t)\}e^{-siT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}S_T(s).} \quad (8.35)$$

Utóbbi eredményt a konvergencia ($|e^{-sT}| < 1$, ha $\sigma > 0$) végtelen mértani sor összegképletének felhasználásával kaptuk.

Ezen összefüggés hasznos lehet a Fourier-sor együtthatóinak meghatározására a (6.50) integrál kiértékelése nélkül. Ha ugyanis előállítjuk a periodikus jel első periódusának Laplace-transzformáltját, akkor $s = jk\omega$ helyettesítéssel és T -vel történő osztással megkapjuk a Fourier-együtthatókat:

$$\boxed{\overline{S}_k^C = \frac{1}{T} S_T(s)|_{s=jk\omega}}. \quad (8.36)$$

Ez a komplex Fourier-sor együtthatóinak számítására használt integrál és a Laplace-transzformáció definíciójának összehasonlításából látható:

$$\overline{S}_k^C = \frac{1}{T} \int_{-0}^T s_T(t) e^{-jk\omega t} dt, \quad S_T(s) = \int_{-0}^T s_T(t) e^{-st} dt.$$

Példa. Határozzuk meg a 181. oldalon található első jel Fourier-együtthatóit az ismertetett módon.⁷

Megoldás. Az első jel első periódusának időfüggvényét a következőképp lehet felírni:

$$\begin{aligned} s_T(t) &= \left[\varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \frac{3}{4}T\right) \right] - 0,5 \left[\varepsilon\left(t - \frac{3}{4}T\right) - \varepsilon(t - T) \right] \\ &= \varepsilon(t) - 1,5\varepsilon\left(t - \frac{3}{4}T\right) + 0,5\varepsilon(t - T), \end{aligned}$$

amelynek Laplace-transzformáltja az egyes tagok Laplace-transzformáltjainak ismeretében a következő:

$$S_T(s) = \frac{1}{s} - \frac{1,5}{s} e^{-s\frac{3}{4}T} + \frac{0,5}{s} e^{-sT} = \frac{1}{s} \left[1 - 1,5e^{-s\frac{3}{4}T} + 0,5e^{-sT} \right].$$

⁷Gyakorlasképp érdemes meghatározni a másik jel Fourier-együtthatóit. Azon jel első periódusának időfüggvénye a következő: $s(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \frac{T}{2})] A \sin \omega t = \varepsilon(t) A \sin \omega t + \varepsilon(t - \frac{T}{2}) A \sin \omega(t - \frac{T}{2})$.

Helyettesítsünk most s helyére $j\omega$ -t és vegyük figyelembe, hogy $\omega = \frac{2\pi}{T}$, továbbá osszuk el az eredményt T -vel, azaz

$$\overline{S}_k^C = \frac{1}{T} \frac{T}{jk2\pi} \left[1 - 1,5e^{-jk\frac{2\pi}{T}\frac{3}{4}T} + 0,5e^{-jk\frac{2\pi}{T}T} \right].$$

A periódusidővel lehet egyszerűsíteni, és megkapjuk a komplex Fourier-együtthatók általános alakját $k > 0$ -ra:

$$\overline{S}_k^C = \frac{1}{jk2\pi} \left[1 - 1,5e^{-jk\frac{3}{2}\pi} + 0,5e^{-jk2\pi} \right].$$

Alakítsuk át az Euler-alakokat trigonometrikus alakra és szorozzuk be $\frac{1}{j} = -j$ -vel:

$$\overline{S}_k^C = \frac{1}{k2\pi} \left[-j + 1,5j \cos\left(k\frac{3}{2}\pi\right) + 1,5 \sin\left(k\frac{3}{2}\pi\right) - \right. \\ \left. - 0,5j \cos(k2\pi) - 0,5 \sin(k2\pi) \right].$$

A valós rész kétszerese adja az S_k^A , a képzetes rész mínusz kétszerese pedig az S_k^B együtthatót (az utolsó tag értéke mindig nulla):

$$S_k^A = \frac{1,5}{k\pi} \sin\left(k\frac{3}{2}\pi\right), \quad S_k^B = \frac{1,5}{k\pi} \left[1 - \cos\left(k\frac{3}{2}\pi\right) \right].$$

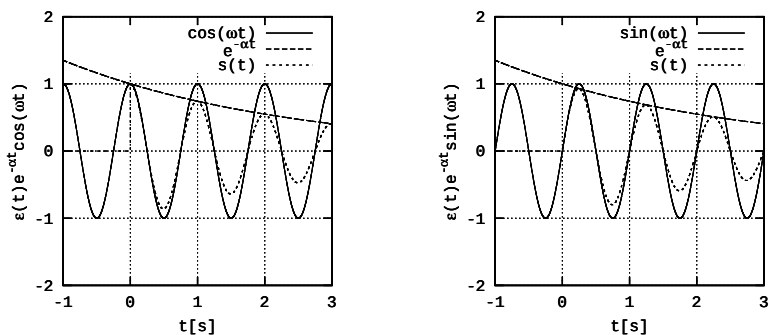
1. Példa. Határozzuk meg az $s(t) = \varepsilon(t)te^{-\alpha t}$ ($\alpha > 0$) jel Laplace-transzformáltját.

Megoldás. Ha a feladatot a (8.2) definícióból kiindulva, integrálással oldjuk meg, akkor parciális integrálást kell alkalmaznunk. Ha viszont felsimerjük, hogy ez a jel az $\varepsilon(t)t$ jel csillapítottja, akkor alkalmazhatjuk a csillapítási tételt az $\varepsilon(t)t$ jel

Laplace-transzformáltjára, ami $\frac{1}{s^2}$. Ezután az s helyébe $(s + \alpha)$ -t kell írunk:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)te^{-\alpha t}\} = \frac{1}{(s + \alpha)^2}.$$

2. Példa. Határozzuk meg az $s(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t} \cos \omega t$ és az $s(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t} \sin \omega t$ ($\alpha > 0$) jelek (l. a 8.2. ábra) Laplace-transzformáltját.



8.2. ábra. A 2. példában szereplő két jel időfüggvénye

Megoldás. Alkalmazzuk szintén a csillapítási tételt az $\varepsilon(t) \cos \omega t$ és az $\varepsilon(t) \sin \omega t$ jelek Laplace-transzformáltjának felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-\alpha t} \cos \omega t\} &= \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \\ \mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-\alpha t} \sin \omega t\} &= \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

3. Példa. Határozzuk meg a T szélességű impulzus Laplace-transzformáltját.

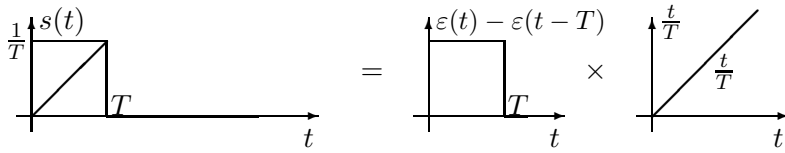
Megoldás. A jel időfüggvénye ablakozott jelként írható fel:

$$s(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T).$$

A Laplace-transzformáció lineáris művelet és ez a jel két jel különbségeként adott. A Laplace-transzformációt elvégezzük a két jelre külön-külön, majd az eredményeket kivonjuk egymásból. A fenti két jel Laplace-transzformáltját ismerjük (a második az eltolási tétellel határozható meg), s írhatjuk, hogy:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} - \mathcal{L}\{\varepsilon(t - T)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}.$$

4. Példa. Határozzuk meg a $[0, T]$ intervallumban $\frac{t}{T}$ függvény szerint változó jel Laplace-transzformáltját.



Megoldás. A jel időfüggvénye a következőképp írható fel:

$$s(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)]\frac{t}{T} = \varepsilon(t)\frac{t}{T} - \varepsilon(t - T)\frac{t}{T}.$$

Az első tag Laplace-transzformáltját már meghatároztuk. A második tag ugyanez a jel, csak épp T -vel el van tolva. Utóbbi Laplace-transzformáltja tehát az első jel Laplace-transzformáltjának ismeretében az eltolási tétel felhasználásával határozható meg. Az eltolási tétel ismertetésekor hangsúlyoztuk, hogy a jelben minden helyen, ahol t áll ugyanazon eltolásnak kell szerepelni, azaz az $\varepsilon(t - T)s(t - T)$ alakú jelekre igaz az eltolási tétel. A második tag pedig nem ilyen. A t helyébe $t - T$ kell, hogy szerepeljen, amit úgy tudunk elérni, hogy a t helyébe $t - T + T$ -t írunk:

$$s(t) = \varepsilon(t)\frac{t}{T} - \varepsilon(t - T)\frac{t - T + T}{T} = \varepsilon(t)\frac{t}{T} - \varepsilon(t - T)\frac{t - T}{T} - \varepsilon(t - T).$$

Ezután már tagonként elvégezhetjük a Laplace-transzformációt:

$$\mathcal{L}\{s(t)\} = \frac{1}{Ts^2} - \frac{1}{Ts^2}e^{-sT} - \frac{1}{s}e^{-sT}.$$

8.2. A Laplace-transzformáció alkalmazása

8.2.1. A válaszjel Laplace-transzformáltjának meghatározása

Első lépésben meg kell határozni az $s(t)$ gerjesztés $S(s)$ Laplace-transzformáltját, valamint a rendszert jellemző $W(s)$ átviteli függvényt. Ezután a kettőt össze kell szorozni a (8.18) összefüggés értelmében, ami a válaszjel $Y(s)$ Laplace-transzformáltját adja. Ezen transzformáltat inverz Laplace-transzformálni kell, melynek eredményeképp kapjuk a válaszjel $y(t)$ időfüggvényét.

A példák kapcsán megfigyelhettük, hogy elemi függvények által leírt jelek Laplace-transzformáltja általában egy tört, melynek számlálója konstans, nevezője pedig egy polinom s -ben. Eltolt függvények esetében megjelenik még egy $e^{-s\tau}$ exponenciális szorzótényező is. Ennél bonyolultabb összefüggésekkel nem foglalkozunk.

Az átviteli függvény pedig mindig egy polinom per polinom alakú kifejezés.

A válaszjel Laplace-transzformáltja tehát két tört szorzata, mely szorzat mindig polinom per polinom alakú kifejezésre vezet (az esetleges exponenciális tényezővel). Végeredményben tehát egy polinom per polinom alakú kifejezés (a válaszjel Laplace-transzformáltja az s változó ún. *raciónalis függvénye*) inverz Laplace-transzformáltját kell meghatározni, amely ezen esetekben nagyon egyszerű szabályok segítségével elvégezhető.

8.2.2. Az inverz Laplace-transzformáció

A jel Laplace-transzformáltjának ismeretében a jel időfüggvénye általánosan a következőképp képezhető. Idézzük fel előbb az inverz Fourier-transzformáció összefüggését:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

A Laplace-transzformáció bevezetése kapcsán láttuk, hogy a belépő és $e^{-\sigma t}$ -vel szorzott jel Fourier-transzformáltjából eljuthatunk a Laplace-transzformálthoz. Fordítsuk meg ezt a műveletet, azaz keressük az $S(\sigma + j\omega)$ -hoz tartozó belépő időfüggvényt:

$$\varepsilon(t)s(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $e^{\sigma t}$ -vel:

$$\varepsilon(t)s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega.$$

Mivel $s = \sigma + j\omega$, ezért $ds = j d\omega$, hiszen σ konstans, azaz $d\omega = \frac{ds}{j}$. Helyettesítsük ezt az előző összefüggésbe:

$$\boxed{\varepsilon(t)s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} S(s) e^{st} ds.} \quad (8.37)$$

Ez az ún. *inverziós integrál*, ami definiálja az inverz Laplace-transzformációt.⁸ Az integrálási határok most s szerint értendők, ezért lett $-\infty$ és ∞ helyett $\sigma - j\infty$ és $\sigma + j\infty$, σ ugyanis konstans. Ez az integrál $t < 0$ értékeire nulla értéket ad. Mindezt a következő operátor jelöli:

$$\boxed{s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(s)\}.} \quad (8.38)$$

⁸Az összefüggés Fourier–Mellin-tétel néven is ismeretes.

Az alkalmazások szempontjából a (8.37) integrál kiértékelésére azonban nincs szükségünk, ugyanis –ahogy arra már utaltunk– egyszerű szabályok és formalizmusok alkalmazhatók az inverz transzformáció elvégzésére.

A válaszjel Laplace-transzformáltja tehát a (8.18) alapján határozható meg. Ennek inverze, azaz a válaszjel időfüggvénye az un. *kifejtési tétel* segítségével határozható meg, melynek lényege abban áll, hogy a polinom per polinom alakú Laplace-transzformáltat törtfüggvények összegére bonthatjuk (*részlettörtekre bontás*), és a részlettörteket időfüggvénnyé transzformálhatjuk az egyes törtfüggvények ismeretlen állandóinak meghatározása után.

Alapvetően két nagy csoportba lehet sorolni a polinom per polinom alakú *törtfüggvényeket*:

- *Valódi törtfüggvények.* Valódi törtfüggvényről akkor beszélünk, ha a számláló polinomjának fokszáma kisebb, mint a nevező polinomjának fokszáma. Ezen belül a következő esetek lehetségesek:
 - a nevező polinomjának gyökei mind különböznek egymástól (egyszeres pólusok),
 - a nevező polinomjának gyökei között van legalább két azonos (többszörös pólusok),
 - a kifejezésben szerepel az exponenciális szorzótényező.
- *Nem valódi törtfüggvények.* Nem valódi törtfüggvényről (áltört) akkor beszélünk, ha a számláló polinomjának fokszáma nagyobb, mint a nevező polinomjának fokszáma, vagy egyenlő azzal. Ez az eset mindig visszavezethető az előzőre az un. *polinomosztás* módszerével (másnéven *eukleidészi-algoritmus*).

A kapott törtfüggvény számlálójának fokszáma tehát kisebb kell legyen nevezőjének fokszámánál, aminek következtében csak

olyan törtfüggvényekkel foglalkozunk, amelyekre igaz, hogy

$$\boxed{\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) < \infty.} \quad (8.39)$$

Ellenkező esetben az $X(s)$ nem lehet egy $x(t)$ jel Laplace-transzformáltja.

Vizsgáljuk meg az inverz Laplace-transzformáció technikáját a következő példákon keresztül.

1. Példa. Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha átviteli függvénye és gerjesztése a következő:

$$W(s) = \frac{5s + 1}{s^2 + 4s + 3}, \quad s(t) = 5\varepsilon(t)e^{-2t}.$$

Megoldás. Határozzuk meg először a gerjesztés Laplace-transzformáltját. Legtöbb esetben a Laplace-transzformáltak meghatározása során nem kell alkalmaznunk a definíciós összefüggést, hiszen bizonyos függvények Laplace-transzformáltját ismerjük. Jelen esetben az $\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ típusú gerjesztésről van szó, melynek Laplace-transzformáltja a következő:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{s + \alpha} \Rightarrow S(s) = \frac{5}{s + 2}.$$

Látható, hogy az 5 konstanssal a Laplace-transzformáltat is egyszerűen beszoroztuk. Ez azért tehető meg, mert a Laplace-transzformáció egy integrál, amely elé a konstans kivihető.

Szorozzuk ezután össze az átviteli függvényt és a kapott transzformáltat, ami a válaszjel Laplace-transzformáltját adja és írjuk fel a nevezőt gyöktényezős alakban:

$$Y(s) = W(s)S(s) = \frac{5s + 1}{s^2 + 4s + 3} \frac{5}{s + 2} = \frac{25s + 5}{(s + 3)(s + 1)(s + 2)}.$$

Ez a törtfüggvény tehát valódi tört, hiszen a számláló fokszáma 1, a nevező fokszáma pedig 3, továbbá a nevező minden gyöke

különböző (egyszeres pólusok): $p_1 = -3$, $p_2 = -1$ és $p_3 = -2$. Ebben az esetben a tört a következőképp írható fel ún. *parciális törtek* összegeként:

$$Y(s) = \frac{25s + 5}{(s + 3)(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2},$$

ahol A , B és C egyelőre ismeretlen konstansok, értéküket a ki-fejtési tétel segítségével lehet meghatározni. Ez ebben az esetben legegyszerűbben „letakarással” oldható meg. Az A együtt-hatót ennek megfelelően úgy határozzuk meg, hogy az A együtt-hatónak megfelelő $(s + 3)$ gyöktényezőt letakarjuk, és a maradék törtfüggvényben minden s helyébe -3 -at írunk:

$$A = \frac{25(-3) + 5}{(-3 + 1)(-3 + 2)} = -35.$$

A B együtttható értékének meghatározása során letakarjuk az $(s + 1)$ gyöktényezőt és a megmaradt törtfüggvényben minden s helyébe -1 -et írunk, a C együtttható meghatározása értelemszerű:

$$B = \frac{25(-1) + 5}{(-1 + 3)(-1 + 2)} = -10, \quad C = \frac{25(-2)}{(-2 + 3)(-2 + 1)} = 45.$$

Ezen értékeket felhasználva a válaszjel Laplace-transzformáltja tehát a következőképp írható fel:

$$Y(s) = \frac{-35}{s + 3} + \frac{-10}{s + 1} + \frac{45}{s + 2}.$$

Az egyes tagok $\frac{K}{s + \alpha}$ alakú törtfüggvények, melyek az $\varepsilon(t)Ke^{-\alpha t}$ időfüggvény Laplace-transzformáltjának felelnek meg. Ez az oka annak, hogy parciális törtekké kell alakítani a törtfüggvényt. A válaszjel időfüggvénye tehát a következő:

$$y(t) = \varepsilon(t) \left(-35e^{-3t} - 10e^{-t} + 45e^{-2t} \right).$$

Fontos megjegyezni, hogy a Laplace-transzformáció segítségével számított válaszjel mindig belépő függvény, hiszen a gerjesztés belépő és a rendszer kauzális.

A feladat természetesen megoldható az *együtthatók egyeztetésével* is. Ebben az esetben hozzuk közös nevezőre a parciális törtekkel felírt alakot:

$$Y(s) = \frac{A(s+1)(s+2) + B(s+3)(s+2) + C(s+3)(s+1)}{(s+3)(s+1)(s+2)},$$

aminek meg kell egyeznie a kiindulási $Y(s)$ törtfüggvénnyel. Ezen két törtfüggvény nevezője megegyezik, következésképp számlálóik egyenlőségéről kell gondoskodnunk, ami az A , B és C együtthatók bizonyos értéke mellett lehetséges. Bontsuk fel az utóbbi törtfüggvény számlálójában található zárójeleket és tegyük ezt egyenlővé a kiindulási törtfüggvény számlálójával:

$$A(s^2 + 3s + 2) + B(s^2 + 5s + 6) + C(s^2 + 4s + 3) = 25s + 5,$$

majd az s^2 , az s^1 és az s^0 tagok együtthatóit tegyük egyenlővé, amely egy háromismeretlenes egyenletrendszerre vezet:

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 0 \\ 3A + 5B + 4C = 25 \\ 2A + 6B + 3C = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -35, \\ B = -10, \\ C = 45. \end{array}$$

Ez a módszer természetesen ugyanazt az eredményt adja, de láthatóan (már az egyenletrendszer megoldása miatt is) több számítás után. A későbbiekben lehetőség szerint a „letakarásos-módszer”-t fogjuk alkalmazni.⁹

2. Példa. Adott egy rendszer impulzusválasza és gerjesztése, határozzuk meg a válaszjel időfüggvényét, valamint a rendszer átviteli karakterisztikáját.

$$w(t) = \varepsilon(t) (e^{-2t} + 3e^{-5t}) + 2\delta(t), \quad s(t) = 5\varepsilon(t)e^{-2t}.$$

⁹Azért írtuk azt, hogy „lehetőség szerint”, mert ez a módszer akkor alkalmazható közvetlenül, ha a nevező gyökei egyszeresek.

Megoldás. Első lépésben határozzuk meg az impulzusválasz és a gerjesztés Laplace-transzformáltját a szabályok alapján és hozzuk közös nevezőre az átviteli függvényt:¹⁰

$$W(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+5} + 2 = \frac{2s^2 + 18s + 31}{(s+2)(s+5)}, \quad S(s) = \frac{5}{s+2}.$$

A válaszjel Laplace-transzformáltja ezen két transzformált szorzata, amely törtfüggvény most is valódi tört, azonban a nevezőben az egyik gyök kétszeres és az ennek megfelelő parciális törtek a következőképp írhatók fel:

$$Y(s) = \frac{10s^2 + 90s + 155}{(s+2)^2(s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+5}.$$

A három ismeretlen konstansból most csak kettő határozható meg a „letakarásos-módszer” segítségével, a B és a C együtthatók:

$$B = \frac{10(-2)^2 + 90(-2) + 155}{-2+5} = 5, \quad C = \frac{10(-5)^2 + 90(-5) + 155}{(-5+2)^2} = -5.$$

Az A együttható azért nem határozható meg így, mert ha letakarnánk a neki megfelelő gyöktényezőt (az $(s+2)$ -öt), akkor a nevezőben még mindig maradna egy $(s+2)$, melynek helyettesítési értéke az $s = -2$ -ben nulla és így nullával osztanánk. Ebben az esetben tehát mindig csak a legmagasabb fokú tagnak megfelelő együttható határozható meg. Az A együttható meghatározása az együtthatók egyeztetésével lehetséges. Írjuk fel hát a parciális törteknek megfelelő törtfüggvényt:

$$Y(s) = \frac{A(s+2)(s+5) + B(s+5) + C(s+2)^2}{(s+2)^2(s+5)}.$$

Ezen tört számlálója egyenlő kell legyen a kiindulás törtfüggvény számlálójával:

$$A(s^2 + 7s + 10) + B(s+5) + C(s^2 + 4s + 4) = 10s^2 + 90s + 155,$$

¹⁰Az átviteli függvény nevezőjét célszerű mindig gyöktényezős alakban hagyni, mert úgyis arra lesz szükségünk.

azaz az A , B és C együtthatóknak ki kell elégíteni a következő egyenletrendszert:

$$\left. \begin{array}{rcl} A + C & = & 10 \\ 7A + B + 4C & = & 90 \\ 10A + 5B + 4C & = & 155 \end{array} \right\}$$

Ezen egyenletrendszert most azonban nem kell megoldanunk, hiszen B és C értékét már meghatároztuk. Az A együttható legegyszerűbben az első egyenletből adódik: $A = 10 - C = 15$. Természetesen a másik két egyenlet is ugyanerre az eredményre vezet.

A válaszjel Laplace-transzformáltja tehát a következő alakban írható fel:

$$Y(s) = \frac{15}{s+2} + \frac{5}{(s+2)^2} + \frac{-5}{s+5}.$$

Ebben a kifejezésben a második tag az előző feladathoz képest újat jelent, azonban korábbról tudjuk, hogy a $K\varepsilon(t)te^{-\alpha t}$ jel Laplace-transzformáltja $\frac{K}{(s+\alpha)^2}$, így a válaszjel időfüggvénye a következő lesz:

$$y(t) = \varepsilon(t) (15e^{-2t} + 5te^{-2t} - 5e^{-5t}).$$

Mivel az impulzusválasz belépő, ezért tudjuk, hogy a rendszer kauzális, továbbá az impulzusválasz abszolút integrálható, hiszen exponenciálisan csökkenő tagokból áll, ezért átviteli karakterisztikája meghatározható az átviteli függvényből $s = j\omega$ helyettesítéssel:

$$W(j\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 18(j\omega) + 31}{(j\omega)^2 + 7(j\omega) + 10}.$$

Ha a rendszer nem gerjesztés-válasz stabilis, akkor a formálisan számított átviteli karakterisztika nem bír fizikai tartalommal. A formális számítás alatt az $s = j\omega$ helyettesítést értjük.

3. Példa. Egy válaszjel Laplace-transzformáltja a következő. Határozzuk meg a végértékeket, majd ellenőrizzük azokat az időfüggvény alapján.

$$Y(s) = \frac{2s^2 + 4}{s(s+1)(s+3)}.$$

Megoldás. Alkalmazzuk a végértéktételeket:

$$y(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 + 4}{s^2 + 4s + 3} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{s^2}}{1 + \frac{4}{s} + \frac{3}{s^2}} = 2,$$

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^2 + 4}{s^2 + 4s + 3} = \frac{4}{3}.$$

Határozzuk meg az időfüggvényt is. Az $Y(s)$ egy valódi törtfüggvény, azaz a következő alakú parciális törtekre lehet bontani:

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3},$$

ahol az együtthatók meghatározhatók letakarással:¹¹ $A = \frac{4}{3}$, $B = -3$, $C = \frac{11}{3}$, azaz az időfüggvény a következő lesz:

$$y(t) = \varepsilon(t) \left(\frac{4}{3} - 3e^{-t} + \frac{11}{3}e^{-3t} \right).$$

A végértékek az időfüggvényből közvetlenül leolvashatók.

¹¹ $A = \frac{4}{3}$, $B = \frac{2(-1)^2+4}{(-1)(-1+3)} = -3$, $C = \frac{2(-3)^2+4}{(-3)(-3+1)} = \frac{11}{3}$.

8.2.3. Az átviteli függvény pólus-zérus elrendezése, a rendszer stabilitása

Láttuk, hogy az átviteli függvény egy polinom per polinom alakú kifejezés, és mint ilyen felírható gyöktényezős alakban is:

$$\boxed{W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)},} \quad (8.40)$$

ahol a számláló gyökei alkotják a *zérusokat*, a nevező gyökei pedig a *pólusokat*, K pedig egy kiemelhető konstans. A zérusok nullává, a pólusok végtelenné teszik az átviteli függvényt. Az állapotváltozós leírás, illetve a rendszeregyenlet és az átviteli függvény kapcsolatából látható, hogy az átviteli függvény nevezőjének polinomja az $|s\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ által definiált determináns, ami $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ alakban már megjelent az időtartománybeli analízis során is, illetve a karakterisztikus polinommal megegyező alakú. Ebből kiderül, hogy a sajátértékek és a pólusok megegyeznek, tehát a pólus-zérus elrendezésből következtetni lehet a rendszer gerjesztés-válasz stabilitására: *a rendszer akkor és csak akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha átviteli függvényének minden pólusa negatív valós részű:*

$$\boxed{\operatorname{Re}\{p_i\} < 0, \quad i = 1, \dots, n,} \quad (8.41)$$

azaz, ha minden sajátértéke a komplex számsík bal oldalán helyezkedik el.

Példa. Vizsgáljuk meg a következő állapotváltozós leírásával adott rendszer stabilitását:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} s, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + s.$$

Megoldás. Ennek átviteli függvénye a következő:

$$W(s) = \frac{s^2 - 4s - 5}{s^2 - 3s - 10} = \frac{(s+1)(s-5)}{(s+2)(s-5)} = \frac{s+1}{s+2}.$$

Látható, hogy a rendszer átviteli függvényének két pólusa van: $p_1 = -2$ és $p_2 = 5$, amelyek megegyeznek a rendszermátrix sajátértékeivel. Az $(s - 5)$ taggal azonban lehet egyszerűsíteni, miáltal a redukált rendszer egyetlen pólusa $p_1 = -2$. A λ_2 sajátérték (a p_2 pólus) miatt a rendszer nem aszimptotikusan stabil, s a kapott átviteli függvényben szereplő p_2 pólus miatt a rendszer nem is gerjesztés-válasz stabil. Az egyszerűsítés után azonban a nem stabil pólus ugyanazon értékű zérus miatt kiesik. Ez a rendszer így gerjesztés-válasz stabilis.

Elmondható tehát az, hogy ha egy rendszer aszimptotikusan stabil, akkor biztosan gerjesztés-válasz stabil is, fordítva azonban ez nem biztos, hogy igaz. Ha egy rendszer aszimptotikusan nem stabil, akkor még lehet gerjesztés-válasz stabil, ami a $\mathbf{B}$ oszlopvektortól és a $\mathbf{C}$ sorvektortól függ.

9. fejezet

DI rendszerek analízise a komplex frekvenciatartományban

9.1. A z-transzformáció

A z-transzformációt is kétféleképp vezetjük be. Először a Fourier-transzformációból kiindulva, majd lentebb formális bevezetést is adunk. Alapvetően csak *belépőjelekkel* foglalkozunk.

Láttuk, hogy csak azok a diszkrét idejű jelek Fourier-transzformálhatók a (7.51) definíció alapján, amelyek *abszolút összegezhettek*. Így nem Fourier-transzformálható pl. az $\varepsilon[k]$, vagy az $\varepsilon[k]q^k$ ($|q| > 1$) függvény sem, hiszen a transzformációt definiáló végtelen sor ezen esetekben nem konvergens. Képzeljük el, hogy az abszolút összegezhetőséget azáltal biztosítjuk, hogy a belépőjelet beszorozzuk egy $e^{-\sigma t}|_{t=kT_s} = e^{-\sigma k}$ ($\sigma > 0$) jellel ($\sigma := \sigma T_s$), azaz

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} |s[k]| \not< \infty, \quad \text{de} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |s[k]e^{-\sigma k}| < \infty.} \quad (9.1)$$

Ha a jel belépő, akkor tetszőleges pozitív értékű σ választható a gyakorlatban előforduló jelek esetében, azaz σ értéke érdektelen számunkra. Az $\varepsilon[k]$ jel pl. tetszőleges $\sigma > 0$ érték mellett abszolút összegezhetővé tehető, az $\varepsilon[k]q^k$ ($|q| > 1$) exponenciálisan növekvő jelhez úgyszintén található alkalmas σ , ugyanis az $e^{-\sigma k}$ szerint alakuló exponenciális csökkenés erősebb, mint a q^k függvény szerinti növekedés (természetesen $|q| < \infty$). A lényeg ismételtlen annak biztosítása, hogy a belépőjelet, ami esetleg a $k \rightarrow \infty$ esetén nem tart nullához, „leszorítsuk” egy exponenciális tényezővel, ami elég gyorsan tart nullához ahhoz, hogy a szorzatfüggvény eltűnjön $k \rightarrow \infty$ esetén, s így az abszolút összegezhetővé tehető. Ha egy jelhez nem található ilyen σ érték, akkor a jel nem tehető abszolút összegezhetővé, ilyen jelekkel nem foglalkozunk, mert nincs z-transzformáltjuk. Ilyen pl. az $\varepsilon[k]q^{k^2}$ jel.

Képezzük most az exponenciális függvénnyel leszorított belépő-szorzatfüggvénynek a Fourier-transzformáltját:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]s[k]e^{-\sigma k}\} = \sum_{k=0}^{\infty} s[k]e^{-\sigma k}e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} s[k]e^{-(\sigma+j\vartheta)k},$$

majd vezessük be az $sT_s = \sigma + j\vartheta$ jelölést¹ és legyen $z = e^{sT_s}$, melynek eredményeképp definiáljuk egy $s[k]$ diszkrét idejű belépőjel z-transzformáltját:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s[k]z^{-k} \equiv s[0] + s[1]z^{-1} + s[2]z^{-2} + \dots, \quad (9.2)$$

ami a z^{-1} hatványsora, és $S(z)$ az $s[k]$ időfüggvény un. z-transzformáltja (képfüggvénynek is nevezik), a $z = e^{\sigma+j\vartheta}$ komplex kifejezést pedig szokás *komplex frekvenciának* nevezni. Az összegzés

¹Mindez a Laplace-transzformációval is szoros kapcsolatban van, hiszen $s = \sigma + j\omega$, s így $sT_s = \sigma T_s + j\omega T_s$, ami a már ismertetett jelölések szerint a következőt jelenti: $sT_s = \sigma + j\vartheta$.

alsó határa 0, ami azt jelenti, hogy az $s[k]$ jel belépő kell legyen.² A (9.2) összeget a következő operátorral szokás jelölni (írott Z betű):

$$\boxed{S(z) = \mathcal{Z} \{s[k]\}}. \quad (9.3)$$

A komplex frekvenciatartományt diszkrét idejű jelek esetében szokás z-tartománynak is nevezni.

9.1.1. A z-transzformáció tételei

A következőkben felsoroljuk és bizonyítjuk a z-transzformáció néhány, számunkra fontos tételét. Egyes esetekben ezeket alkalmazzuk is.

Linearitás

A z-transzformáció egy összegzés, inverze pedig (később látni fogjuk) egy integrál, amelyek *lineáris műveletek*, azaz bármely C_1 , C_2 konstans esetén fennáll, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{Z}\{C_1 s_1[k] + C_2 s_2[k]\} &= C_1 \mathcal{Z}\{s_1[k]\} + C_2 \mathcal{Z}\{s_2[k]\}, \\ \mathcal{Z}^{-1}\{C_1 S_1(z) + C_2 S_2(z)\} &= C_1 \mathcal{Z}^{-1}\{S_1(z)\} + C_2 \mathcal{Z}^{-1}\{S_2(z)\}. \end{aligned}} \quad (9.4)$$

Általánosan (n összegre) ez a következőt jelenti:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \sum_{i=1}^n C_i s_i[k] \right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{Z}\{s_i[k]\}, \\ \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n C_i S_i(z) \right\} &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{Z}^{-1}\{S_i(z)\}. \end{aligned}} \quad (9.5)$$

Ez a *szuperpozíció elve*, és azt jelenti, hogy a *transzformáció és inverze tagonként elvégezhető*.

²A Laplace-transzformációhoz hasonlóan a z-transzformáció esetében is a jel $k < 0$ intervallumbeli viselkedése figyelmen kívül marad.

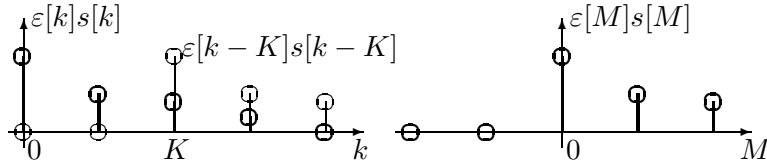
Eltolási tétel

Ha létezik a *belépő* $\varepsilon[k] s[k]$ jel $S(z)$ z-transzformáltja, akkor a $K > 0$ ütemmel eltolt (késleltett) $\varepsilon[k - K] s[k - K]$ jel z-transzformáltja az *eltolási tétel* értelmében a következő:³

$$\boxed{\mathcal{Z} \{ \varepsilon[k - K] s[k - K] \} = z^{-K} S(z),} \quad (9.6)$$

azaz az időbeli eltolás a z-tartományban z^{-K} tényezővel végzett szorzásnak felel meg. Itt arra kell ügyelnünk, hogy az $\varepsilon[k]$ jelben és az $s[k]$ jelben is szerepeljen ugyanazon K eltolás.

A tétel bizonyítását segíti a következő illusztráció:



Írjuk be a z-transzformáció (9.2) definíciójába az $\varepsilon[k] s[k]$ jel helyett az eltolt $\varepsilon[k - K] s[k - K]$ jelet:

$$\mathcal{Z} \{ \varepsilon[k - K] s[k - K] \} = \sum_{k=K}^{\infty} s[k - K] z^{-k},$$

ahol az összegzést azért kell a $k = K$ ütemtől kezdeni, mert a $k < K$ ütemekben az eltolt jel értéke nulla. Vezessük be most az $M = k - K$ változót (így $k = K + M$), mint új időtengelyt, melynek origója a K pontban van. Írjuk át az előbbi összeget ennek megfelelően:

$$\mathcal{Z} \{ \varepsilon[k - K] s[k - K] \} = \sum_{M=0}^{\infty} s[M] z^{-(K+M)},$$

³Az $\varepsilon[k]$ jel mindig szerepel az $s[k]$ jel mellett, hiszen belépőjelekről van szó.

amelyben az z^{-K} konstansnak tekinthető, hiszen az összegzést az M változó szerint kell elvégezni, így az kiemelhető az összeg elé, és a szumma a z -transzformáció definíciója lesz:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k-K]s[k-K]\} = z^{-K} \underbrace{\sum_{M=0}^{\infty} s[M]z^{-M}}_{S(z)=\mathcal{Z}\{\varepsilon[M]s[M]\}} = z^{-K}S(z),$$

ami pontosan az eltolási tétel.

Bizonyos esetekben (példát a 346. oldalon fogunk látni) előfordul, hogy az $s[k]$ *nem belépő jelet* kell késleltetni. Az $s[k-K]$ z -transzformáltja az előzőhöz hasonlóan vezethető le. Induljunk ki a (9.2) definícióból:

$$\mathcal{Z}\{s[k-K]\} = \sum_{k=0}^{\infty} s[k-K]z^{-k},$$

ahol az összegzés alsó határa most nem K , hanem továbbra is 0, hiszen a $k < K$ ütemekre a jel értéke nem feltétlenül nulla, hiszen oda az $s[k]$ nem belépőjel $k < 0$ ütembeli értékei kerülnek. Vezessük be ismét az $M = k - K$ változót, és bontsuk ketté az összeget:

$$\begin{aligned} \sum_{M=-K}^{\infty} s[M]z^{-(K+M)} &= \sum_{M=-K}^{-1} s[M]z^{-(K+M)} + \sum_{M=0}^{\infty} s[M]z^{-(K+M)} = \\ &= \sum_{M=-K}^{-1} s[M]z^{-(K+M)} + z^{-K} \sum_{M=0}^{\infty} s[M]z^{-M}. \end{aligned}$$

Ebben a második tag megegyezik a belépőjel eltoltjának z -transzformáltjával, azaz

$$\mathcal{Z}\{s[k-K]\} = \sum_{M=-K}^{-1} s[M]z^{-(K+M)} + z^{-K}S(z).$$

Speciálisan:

$$\begin{aligned} K = 1 : \quad \mathcal{Z} \{s[k-1]\} &= s[-1] + z^{-1}S(z), \\ K = 2 : \quad \mathcal{Z} \{s[k-2]\} &= s[-2] + s[-1]z^{-1} + z^{-2}S(z). \end{aligned}$$

Az átviteli függvény meghatározása a rendszeregyenlet alapján. Alkalmazzuk az eltolási tételt a rendszeregyenletre, melynek kapcsán jutunk el a diszkrét idejű rendszer *átviteli függvényéhez*, amely egy *rendszerjellemező függvény*.⁴

Induljunk ki tehát egy diszkrét idejű SISO rendszer rendszeregyenletéből:

$$y[k] + \sum_{i=1}^n a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^m b_i s[k-i].$$

Alkalmazzuk most ezen egyenletre az eltolási tételt és tételezzük fel, hogy *a gerjesztés belépő*. Így a rendszer kauzalitásából következően a válasz is belépő.⁵ A rendszeregyenlet z -transzformáltja tehát a következő alakot ölti:

$$Y(z) + \sum_{i=1}^n a_i Y(z)z^{-i} = \sum_{i=0}^m b_i S(z)z^{-i}.$$

Ezen egyenlet két oldalán z^{-1} -ben egy n -edfokú, és egy m -edfokú polinomot kapunk. Emeljük ki a bal oldalon $Y(z)$ -t, a jobb oldalon pedig $S(z)$ -t:

$$Y(z) \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i} \right) = S(z) \sum_{i=0}^m b_i z^{-i}.$$

⁴A levezetések nagyon hasonlóak a rendszeregyenlet és az átviteli karakterisztika kapcsolatának bemutatása során alkalmazottakhoz (l. 234. oldal)

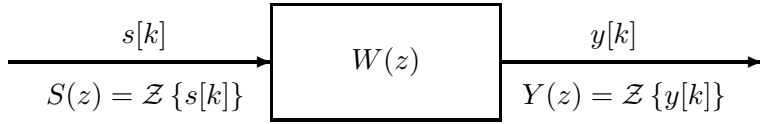
⁵A nem belépő gerjesztés esetét példán keresztül vizsgáljuk meg, l. 346. oldal.

Ebből képezhetjük az ún. $W(z)$ átviteli függvényt, ami a válasz és a gerjesztés z -transzformáltjának hányadosa:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{S(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}}, \quad (9.7)$$

vagy részletesen kiírva:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{S(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (9.8)$$



Az átviteli függvény tehát a z^{-1} változó racionális függvénye valós együtthatókkal.⁶ Hasonlóan az átviteli karakterisztikához, az átviteli függvény is egy polinom per polinom alakú kifejezés, nevezőjének polinomja alakilag megegyezik a rendszeregyenlet karakterisztikus polinomjával, gyökeik tehát megegyeznek, kivéve, ha az átviteli függvény számlálójának és nevezőjének közös gyökeivel egyszerűsíteni lehet.

Ezen műveletsor visszafelé is elvégezhető. Ha tehát ismert egy rendszer átviteli függvénye, akkor annak rendszeregyenlete meghatározható, továbbá az átviteli függvény számlálójában és nevezőjében szereplő b_i és a_i együtthatók megegyeznek a rendszeregyenlet jobb- és bal oldalán szereplő együtthatókkal.

Siettetett diszkrét idejű jel z -transzformáltja

Az állapotváltozós leírás normálalakjában szerepel az $x[k]$ állapotváltozó $x[k+1]$, egy ütemmel siettetett eltoltja. Határozzuk

⁶Az alkalmazások során azonban z pozitív kitevőire fogunk áttérni.

meg ezen jel z-transzformáltját. Alkalmazzuk a (9.2) összefüggést:

$$\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k+1]z^{-k},$$

majd a $k+1$ helyébe vezessük be az $M = k+1$ változót, azaz $k = M-1$:

$$\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = \sum_{M=1}^{\infty} x[M]z^{-(M-1)} = z \sum_{M=1}^{\infty} x[M]z^{-M}.$$

Itt az összegzés alsó határa az $M = k+1$ miatt lett 1, a $0+1$ helyettesítésnek megfelelően. A z-transzformáció definíciójában azonban az alsó határnak nullától kell indulnia. Ha hozzáadjuk az összeghez az $M=0$ ütembeli értéknek megfelelő tényezőt, akkor azt le is kell vonni az összegből:

$$\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = z \left(\underbrace{\sum_{M=0}^{\infty} x[M]z^{-M}}_{\mathcal{Z}\{x[M]\}} - x[0] \right).$$

A szumma pontosan az $x[M]$ jel z-transzformáltja, azaz a siettetett jel z-transzformáltja a következő:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = z(X(z) - x[0]) = zX(z) - zx[0].} \quad (9.9)$$

Belépő gerjesztés esetén az állapotváltozók $k=0$ ütembeli értéke nulla, így

$$\boxed{\mathcal{Z}\{x[k+1]\} = zX(z).} \quad (9.10)$$

Az átviteli függvény meghatározása az állapotváltozós leírás alapján. Alkalmazzuk az utóbbi tételt az állapotváltozós leírásra, melynek kapcsán szintén eljutunk a diszkrét idejű rendszer *átviteli függvényéhez*.⁷

Egy diszkrét idejű SISO-rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja a következő:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{b}s[k], \\ y[k] &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}[k] + Ds[k],\end{aligned}\tag{9.11}$$

Képezzük ezen egyenletek z-transzformáltját és alkalmazzuk a szettetett jel z-transzformáltjának megismert kifejezését és szorozunk *belépő gerjesztésre* (így a válasz is belépő és $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned}z\mathbf{X}(z) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}S(z), \\ Y(z) &= \mathbf{c}^T\mathbf{X}(z) + DS(z).\end{aligned}\tag{9.12}$$

Az első egyenletből az $\mathbf{X}(z)$ állapotvektor z-transzformáltja kifejezhető:

$$z\mathbf{X}(z) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{b}S(z) \quad \Rightarrow \quad (z\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{X}(z) = \mathbf{b}S(z),$$

azaz

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}S(z),\tag{9.13}$$

ahol $\mathbf{E}$ az N -edrendű egységmátrix. A kapott eredményt helyettesítsük be az $Y(z)$ kifejezésébe, s így a válaszjel z-transzformáltjának kifejezése a következő alakú lesz:

$$Y(z) = \left[\mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D \right] S(z).\tag{9.14}$$

⁷A levezetések nagyon hasonlóak az állapotváltozós leírás és az átviteli karakterisztika kapcsolatának bemutatása során alkalmazottakhoz (l. 236. oldal).

Utóbbiból az átviteli függvény kifejezhető:

$$\boxed{W(z) = \frac{Y(z)}{S(z)} = \mathbf{c}^T (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} + D.} \quad (9.15)$$

Ez szintén egy polinom per polinom alakú kifejezés, amely – ahogy a frekvenciatartománybeli leírás során is tettük⁸ – átírható a következő alakra is:

$$\boxed{W(z) = \frac{\mathbf{c}^T \text{adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{b} + |z\mathbf{E} - \mathbf{A}| D}{|z\mathbf{E} - \mathbf{A}|}.} \quad (9.16)$$

Mindez *MIMO*-rendszerekre a következőképp fejezhető ki:

$$\boxed{\mathbf{W}(z) = \mathbf{C} (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D},} \quad (9.17)$$

ami az *átviteli függvény-mátrix*, melynek ij indexű eleme megadja az i -edik kimenet és a j -edik bemenet között fennálló átviteli függvényt úgy, hogy közben a rendszer minden más bemenete jelmentes:

$$W(z)_{ij} = \left. \frac{Y_i(z)}{S_j(z)} \right|_{S_k(z)=0, k \neq j}, \quad i = 1, \dots, N_y, j = 1, \dots, N_s. \quad (9.18)$$

Ha a gerjesztés nem belépő, akkor az állapotvektor eltoltjának z -transzformáltja nem egyszerűen $z\mathbf{X}(z)$ lesz, hanem $z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}[0]$.

Látható, hogy mindkét esetben formálisan ugyanazon műveleteket végeztük el, mint a frekvenciatartománybeli analízis során.

Az átviteli függvény nevezőjének gyökeit pólusoknak, számlálójának gyökeit zérusoknak nevezzük.

⁸Alkalmazzuk az $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})}{|z\mathbf{E} - \mathbf{A}|}$ összefüggést.

A konvolúció z-transzformáltja

Az eltolási tételt alkalmazzuk a *konvolúció z-transzformáltjának* meghatározása során. Az időtartományban végzett $y[k] = w[k] * s[k]$ konvolúció z-transzformálható belépő gerjesztés és z-transzformálható belépő impulzusválasz esetén a z-tartományban *szorzattá egyszerűsödik*:

$$\boxed{Y(z) = \mathcal{Z}\{w[k]\} \mathcal{Z}\{s[k]\} = W(z) S(z),} \quad (9.19)$$

ahol $S(z)$ és $Y(z)$ a gerjesztés és a válaszjel z-transzformáltja, $W(z)$ pedig a rendszer átviteli függvénye. A tétel bizonyítása érdekében z-transzformáljuk a konvolúció (5.9) kifejezését:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k s[i] w[k-i] \right) z^{-k}.$$

Ezen összefüggésben a belső szumma felső határa k , hiszen az impulzusválasz belépő. Cseréljük le ezen határt ∞ -re úgy, hogy közben a $w[k-i]$ helyébe $\varepsilon[k-i]w[k-i]$ -t írunk, azaz a szummán belül jelöljük, hogy az impulzusválasz belépő. Erre az ezt követő lépések miatt van szükség. Tehát:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} s[i] \varepsilon[k-i] w[k-i] \right) z^{-k}.$$

Cseréljük fel ezután az összegzések sorrendjét:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} s[i] \left(\sum_{k=i}^{\infty} \varepsilon[k-i] w[k-i] z^{-k} \right).$$

A belső összeg alsó határa i lett, hiszen a szummában szereplő $\varepsilon[k-i]w[k-i]$ jel a $k < i$ ütemekben nulla értékű. A belső

szumma pedig pontosan az eltolt jel z-transzformáltja (v.ö. (9.1.1) összefüggéssel), azaz:

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{\infty} s[i]W(z)z^{-i} = W(z) \sum_{i=0}^{\infty} s[i]z^{-i},$$

amely összefüggésben a gerjesztés z-transzformáltja ismerhető fel, s így a konvolúció z-transzformáltjához jutunk:

$$Y(z) = W(z)S(z).$$

Emlékezzünk vissza, hogy a konvolúció adott impulzusválaszú rendszer válaszána meghatározására alkalmas adott gerjesztés mellett. Ezen összefüggés pedig a gerjesztés z-transzformáltjának és az átviteli függvénynek a szorzatát tartalmazza, ami a válaszjel z-transzformáltját eredményezi.

A következő szemléletes illusztráció kapcsán eljutunk a z-transzformáció formális megadásához. Legyen egy kauzális rendszer nem belépő gerjesztése az $s[k] = z^k$ jel, amely gyakorlatilag megfelel egy exponenciálisan növekvő amplitúdójú szinuszos jelnek, hiszen $z^k = e^{\sigma k} e^{j\vartheta k}$, ahol $\sigma > 0$ és a második tényező pedig az Euler-formulának megfelelően egy szinuszos jel. Vegyük ezen jel és a rendszer impulzusválaszána konvolúcióját:

$$y[k] = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]s[k-i] = \sum_{i=0}^{\infty} w[i]z^{k-i} = z^k \sum_{i=0}^{\infty} w[i]z^{-i}.$$

Az utóbbi összegben szerepel a $w[k]$ impulzusválasz z-transzformáltja, ami pontosan a rendszer átviteli függvénye (ezt a 335. oldalon igazoljuk):

$$\boxed{W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w[k]z^{-k}.} \quad (9.20)$$

Így a rendszer válasza a következő:

$$y[k] = W(z)z^k,$$

azaz a kimeneti jel alakja a $W(z)$ átviteli függvénytől eltekintve olyan, mint a gerjesztés alakja. Az átviteli függvényt ezért a *rendszer sajátértékének* is szokás nevezni, a z^k gerjesztés pedig az un. *sajátfüggvény*.

Így a konvolúció ismeretére támaszkodva jutottunk el a rendszer átviteli függvényének definíciójához, valamint a z-transzformációhoz. Az összegben szereplő $w[i]$ helyébe tetszőleges $s[k]$ függvényt írva definiálhatjuk az $s[k]$ jel z-transzformáltját is, ha ez a végtelen összeg létezik, azaz ha az $s[k]$ jel z-transzformálható.

A csillapítási tétel

A *csillapítási tétel* azt mondja ki, hogy egy belépő és z-transzformálható $s[k]$ jel és egy q^k exponenciálisan csökkenő jel ($|q| < 1$) szorzatának (amely csillapítja az $s[k]$ jelet) z-transzformáltja

$$\boxed{\mathcal{Z} \{s[k]q^k\} = S\left(\frac{z}{q}\right)}, \quad (9.21)$$

hiszen

$$\sum_{k=0}^{\infty} s[k]q^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} s[k] \left(\frac{z}{q}\right)^{-k} = S\left(\frac{z}{q}\right),$$

azaz az $s[k]$ jel $S(z)$ z-transzformáltjában minden z helyébe $\frac{z}{q}$ -t kell írni.

Kezdetiérték-tétel és végértéktétel

A z -transzformációnak is van két un. *végérték tétele*, melyek segítségével meghatározhatjuk az $s[k]$ jel kezdeti értékét a $k = 0$ -ban és végértékét $k \rightarrow \infty$ esetén az $S(z)$ z -transzformált ismeretében, ha ezek a határértékek léteznek:

$$\boxed{s[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} S(z), \quad s[k \rightarrow \infty] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1) S(z)].} \quad (9.22)$$

Ezen tételeket akkor kényelmes alkalmazni, ha a jel z -transzformáltja ismert és az időfüggvény határértéke a kérdés, pl. ha a válaszjel z -transzformáltját meghatározzuk. A határértékek meghatározásához tehát nem kell meghatározni az időfüggvényt.

A kezdetiérték-tétel a z -transzformáció definíciójából adódik:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s[k]z^{-k} \equiv s[0] + s[1]z^{-1} + s[2]z^{-2} + \dots,$$

ugyanis, ha ezen végtelen sorba $z \rightarrow \infty$, akkor minden $z^{-k} \rightarrow 0$, minek eredményeképp csak $s[0]$ marad.

Kapcsolat a Fourier-transzformálttal

Ha az $s[k]$ jel *belépő* és *abszolút összegezzhető*, akkor a jel $S(e^{j\vartheta})$ spektruma meghatározható a z -transzformáltból $z = e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel:

$$\boxed{S(e^{j\vartheta}) = S(z)|_{z=e^{j\vartheta}}.} \quad (9.23)$$

Ez biztosan igaz, ha a jel *belépő, korlátos és véges tartójú*, vagy ha a jel *belépő, korlátos és a $k \rightarrow \infty$ esetén exponenciálisan nullához tart*. Az összefüggés nem érvényes pl. az $\varepsilon[k]$ jelre, mert az nem abszolút összegezzhető, és ez egy feltétel. Az abszolút összegezzhető jeleket ugyanis nem kell az $e^{\sigma k}$ jellel „leszorítani”, éppen ezért $\sigma = 0$.

Ha a rendszer *gerjesztés-válasz stabilis és kauzális*, akkor az átviteli karakterisztika előállítható az átviteli függvény ismeretében:

$$\boxed{W(e^{j\vartheta}) = W(z)|_{z=e^{j\vartheta}}.} \quad (9.24)$$

9.1.2. Diszkrét idejű jelek z-transzformáltja

A következőkben néhány fontos jel z-transzformáltját fogjuk meghatározni, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

1.) Határozzuk meg először az $\varepsilon[k]$ *egységugrásjel* (a legegyszerűbb belépőjel) z-transzformáltját. Induljunk ki a z-transzformáció definíciójából és vegyük figyelembe, hogy az $\varepsilon[k]$ jel értéke 1 a $k > 0$ ütemekre:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-1})^k.$$

Használjuk fel a végtelen mértani sor összegképletét:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad (9.25)$$

ha $|q| < 1$, azaz ha $|z^{-1}| < 1$, ami teljesül az $|e^{-\sigma}| < 1$ miatt ($\sigma > 0$). Eredményünk tehát a következő:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.} \quad (9.26)$$

Jegyezzük meg, hogy ugyanez lesz pl. a $k < 0$ időpillanatokban is egységnyi értékű jel, vagy az előjelfüggvény z-transzformáltja is. Bármilyen is legyen tehát a jel értéke a $k < 0$ időpillanatokra, azt a z-transzformáció figyelmen kívül hagyja.

2.) Határozzuk meg az $\varepsilon[k]$ jel és a q^k ($|q| < 1$) jel szorzatának, azaz a csillapított egységugrásjelnek a z -transzformáltját.⁹ Induljunk ki először a definícióból és alkalmazzuk a végtelen mértani sor (9.25) összegképletét:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]q^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{q}{z}} = \frac{z}{z - q}.$$

Használhatjuk a csillapítási tételt is, ugyanis az $\varepsilon[k]q^k$ jel az $\varepsilon[k]$ csillapítottja. A csillapítási tétel pedig azt mondja ki, hogy az eredeti jel (jelen esetben az $\varepsilon[k]$) z -transzformáltjában (ami ekkor $\frac{z}{z-1}$) minden z helyébe $\frac{z}{q}$ -t kell írni, azaz

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]q^k\} = \frac{z}{z-1} \bigg|_{z \rightarrow \frac{z}{q}} = \frac{\frac{z}{q}}{\frac{z}{q}-1} = \frac{z}{z-q},$$

tehát

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]q^k\} = \frac{z}{z-q}.} \quad (9.27)$$

Ha itt elvégezzük a $q = 1$ helyettesítést, akkor pontosan az $\varepsilon[k]$ jelet kapjuk, valamint a $\frac{z}{z-1}$ transzformáltat, ami a helyes eredmény.

Deriváljuk az utóbbi kifejezés mindkét oldalát q szerint:¹⁰

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]kq^{k-1}\} = \frac{z}{(z-q)^2}.} \quad (9.28)$$

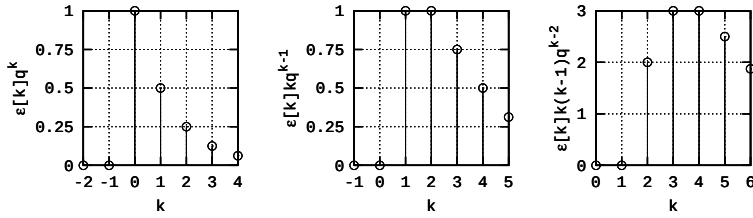
Erre az összefüggésre szükségünk lesz az inverz z -transzformáció

⁹Ugyanez lesz pl. a $q^{|k|}$ jel z -transzformáltja is, hiszen a transzformáció a $k < 0$ időpillanatokat figyelmen kívül hagyja.

¹⁰Használjuk fel, hogy $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

során. Folytassuk ezt a sort:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]k(k-1)q^{k-2}\} &= \frac{2z}{(z-q)^3}, \\ \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]k(k-1)(k-2)q^{k-3}\} &= \frac{6z}{(z-q)^4}, \\ \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]k(k-1)(k-2)(k-3)q^{k-4}\} &= \frac{24z}{(z-q)^5}, \quad \dots\end{aligned}$$



9.1. ábra. A vezetésben szereplő jelek időfüggvénye ($q = 0,5$)

Az első három jel időfüggvénye látható a 9.1. ábrán.¹¹ Általánosan a következő összefüggés írható fel:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))q^{k-m}\} = \frac{m!z}{(z-q)^{m+1}}.$$

Az $m!$ tényezővel átosztva az alkalmazások során leginkább használt alakhoz jutunk:

$$\boxed{\mathcal{Z}\left\{\varepsilon[k]\frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-(m-1))}{m!}q^{k-m}\right\} = \frac{z}{(z-q)^{m+1}}.} \quad (9.29)$$

3.) Ezek alapján állíthatjuk elő pl. az $\varepsilon[k]k$, vagy az $\varepsilon[k]k(k-1)$ jelek z-transzformáltját, ha a $q = 1$ helyettesítést alkalmazzuk:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]k\} = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]k(k-1)\} = \frac{2z}{(z-1)^3}.$$

¹¹Érdekes lehet végigkövetni, hogy kell a jeleket felvázolni.

Ha a két jelet összeadjuk, akkor a linearitás miatt a transzformáltakat is összeadhatjuk. Így kapjuk meg pl. az $\varepsilon[k]k^2 = \varepsilon[k][k + k(k-1)]$ jel z-transzformáltját:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]k^2\} = \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2z}{(z-1)^3} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

Általános formula az $\varepsilon[k]k^m$ ($m \in \mathbb{N}$) alakú jel z-transzformáltjának meghatározására nem ismert.

4.) Szükségünk lesz az $\varepsilon[k]e^{j\vartheta k}$ és az $\varepsilon[k]e^{-j\vartheta k}$ jelek z-transzformáltjára. Utóbbi eredmények alapján, $q = e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel ezek a következőképp néznek ki:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\varepsilon[k]e^{j\vartheta k}\} = \frac{z}{z - e^{j\vartheta}}, \quad \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]e^{-j\vartheta k}\} = \frac{z}{z - e^{-j\vartheta}}.} \quad (9.30)$$

Ezen eredmények segítségével pedig az $\varepsilon[k] \cos \vartheta k$ és az $\varepsilon[k] \sin \vartheta k$ jelek z-transzformáltja felírható:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k] \cos \vartheta k\} = \mathcal{Z}\left\{\varepsilon[k] \frac{e^{j\vartheta k} + e^{-j\vartheta k}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{j\vartheta}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-j\vartheta}}.$$

Hozzuk közös nevezőre az eredményt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\varepsilon[k] \cos \vartheta k\} &= \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{j\vartheta}} + \frac{1}{2} \frac{z}{z - e^{-j\vartheta}} = \frac{1}{2} \frac{z(z - e^{-j\vartheta}) + z(z - e^{j\vartheta})}{(z - e^{j\vartheta})(z - e^{-j\vartheta})} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2z^2 - z(e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta})}{z^2 - z(\cos \vartheta) + 1} = \frac{z^2 - z \cos \vartheta}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}. \end{aligned}$$

Az $\varepsilon[k] \sin \vartheta k$ jel z-transzformáltja pedig a következő:

$$\mathcal{Z}\{\varepsilon[k] \sin \vartheta k\} = \mathcal{Z}\left\{\varepsilon[k] \frac{e^{j\vartheta k} - e^{-j\vartheta k}}{2j}\right\} = \frac{1}{2j} \frac{z}{z - e^{j\vartheta}} - \frac{1}{2j} \frac{z}{z - e^{-j\vartheta}}.$$

Hozzuk közös nevezőre ismét az eredményt:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\varepsilon[k] \sin \vartheta k\} &= \frac{1}{2j} \frac{z}{z - e^{j\vartheta}} - \frac{1}{2j} \frac{z}{z - e^{-j\vartheta}} = \frac{1}{2j} \frac{z(z - e^{-j\vartheta}) - z(z - e^{j\vartheta})}{(z - e^{j\vartheta})(z - e^{-j\vartheta})} = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{z(e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta})}{z^2 - z(\cos \vartheta) + 1} = \frac{z \sin \vartheta}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}. \end{aligned}$$

Összefoglalva tehát:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\varepsilon[k] \cos \vartheta k\} = \frac{z^2 - z \cos \vartheta}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}, \quad \mathcal{Z}\{\varepsilon[k] \sin \vartheta k\} = \frac{z \sin \vartheta}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}.}$$

(9.31)

5.) A *Dirac-impulzus* z-transzformáltját kétféleképp kaphatjuk meg. A (9.2) definíció és a Dirac-impulzus definíciója alapján írhatjuk, hogy

$$\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k] z^{-k} = \delta[0] z^0 + \delta[1] z^{-1} + \dots = 1,$$

hiszen a Dirac-impulzus a $k = 0$ hely kivételével mindenhol nulla értékű.

Ha figyelembe vesszük, hogy a Dirac-impulzus az egységugrásjelből előállítható a

$$\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k - 1]$$

alakban, akkor a Dirac-impulzus z-transzformáltja az egységugrásjel z-transzformáltjának és az eltolási tétel ismeretében előállítható:

$$\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} z^{-1} = \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-1} = \frac{z-1}{z-1} = 1,$$

azaz

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\delta[k]\} = 1.} \quad (9.32)$$

Az eltolt Dirac-impulzus z-transzformáltja az eltolási tételből adódik:

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\delta[k - K]\} = z^{-K}.} \quad (9.33)$$

Helyettesítsük be most a Dirac-impulzus z-transzformáltját a (9.19) összefüggésbe:

$$Y(z) = W(z) 1,$$

azaz a Dirac-impulzusra adott válasz (ami az impulzusválasz) z -transzformáltja pontosan az átviteli függvény, és megfordítva az átviteli függvény inverz z -transzformáltja az impulzusválasz:

$$\boxed{W(z) = \mathcal{Z}\{w[k]\}, \quad w[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{W(z)\},} \quad (9.34)$$

ahogy azt a (9.20) szummával megadtuk.

6.) Határozzuk meg a *belépő, általános periodikus jel* z -transzformáltját. Az $f[k]$ függvény szerint változó periodikus jel első, K ütemből álló periódusa a következő függvénnyel állítható elő:

$$s_K[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - K]\} f[k], \quad (9.35)$$

melynek $S_K(z) = \mathcal{Z}\{s_K[k]\}$ z -transzformáltját meghatározhatjuk. Ha ezt a jelet eltoljuk iK helyekre ($i = 0, 1, \dots, \infty$), akkor megkapjuk az $s[k]$ periodikus jel időfüggvényét:

$$s[k] = \sum_{i=0}^{\infty} s_K[k - iK]. \quad (9.36)$$

Használjuk ki a z -transzformáció linearitását, azaz transzformáljuk ezt a kifejezést tagonként, majd használjuk fel a végtelen mértani sor összegképletét:

$$\boxed{S(z) = \mathcal{Z}\{s[k]\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{Z}\{s_K[k]\} z^{-iK} = \frac{1}{1 - z^{-K}} S_K(z).} \quad (9.37)$$

Ezen eredmény hasznos lehet a Fourier-sor együtthatóinak meghatározására a (7.33) összegzés kiértékelése nélkül. Ha ugyanis előállítjuk a periodikus jel első periódusának z -transzformáltját, akkor $z = e^{jp\vartheta}$ helyettesítéssel és K -val történő osztással megkapjuk a Fourier-együtthatókat:

$$\boxed{\overline{S}_p^C = \frac{1}{K} S_K(z)|_{z=e^{jp\vartheta}}.} \quad (9.38)$$

Ez a komplex Fourier-sor együtthatóinak számítására használt szumma és a z-transzformáció definíciójának összehasonlításából látható:

$$\bar{S}_p^C = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^K s_K[k] e^{-jpk\vartheta}, \quad S_K(z) = \sum_{k=0}^K s_K[k] z^{-k}.$$

A következőkben további, általánosabb példákat oldunk meg, melyekben felhasználjuk a fenti eredményeket.

1. Példa. Határozzuk meg az $s[k] = \varepsilon[k] (2 \cdot 0,9^k - 0,8^k)$ jel z-transzformáltját.

Megoldás. Az $\varepsilon[k]q^k$ jel z-transzformáltját ismerjük. Ezt kell kétszer alkalmaznunk, majd az egyes eredményeket ki kell vonnunk egymásból, hiszen a transzformáció lineáris:

$$\mathcal{Z}\{s[k]\} = 2 \frac{z}{z - 0,9} - \frac{z}{z - 0,8}.$$

Látható, hogy a 2-es szorzó a transzformáltban is megjelenik, hiszen a konstans a definícióban szereplő szumma elé kiemelhető.

2. Példa. Határozzuk meg az $s[k] = \varepsilon[k]0,7^k \cos 5k$ és az $s[k] = \varepsilon[k]0,7^k \sin 5k$ jelek z-transzformáltját.

Megoldás. Alkalmazzuk a csillapítási tételt az $\varepsilon[k] \cos \vartheta k$ és az $\varepsilon[k] \sin \vartheta k$ jelek z-transzformáltjának felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]0,7^k \cos 5k\} &= \frac{\left(\frac{z}{0,7}\right)^2 - \frac{z}{0,7} \cos 5}{\left(\frac{z}{0,7}\right)^2 - \frac{2z}{0,7} \cos 5 + 1} = \frac{z^2 - 0,19z}{z^2 - 0,39z + 0,49}, \\ \mathcal{Z}\{\varepsilon[k]0,7^k \sin 5k\} &= \frac{\frac{z}{0,7} \sin 5}{\left(\frac{z}{0,7}\right)^2 - \frac{2z}{0,7} \cos 5 + 1} = \frac{-0,67z}{z^2 - 0,39z + 0,49}, \end{aligned}$$

azaz a szinuszos és koszinuszos jelek z-transzformáltjában minden z helyébe $\frac{z}{0,7}$ -et írtunk a csillapítási tételnek megfelelően. Ha a $\cos 5$ és a $\sin 5$ értékeket numerikusan is meg akarjuk határozni, akkor figyelembe kell venni, hogy $\vartheta = 5$ radián egységben adott.

3. Példa. Határozzuk meg az $s[k] = \varepsilon[k]k 0,6^k$ jel z-transzformáltját.

Megoldás. Az $\varepsilon[k]kq^{k-1}$ jel z-transzformáltját már meghatároztuk. Ezen jel pedig ehhez hasonló. Alakítsuk hát át a kérdéses jelet a kívánt alakra:

$$s[k] = \varepsilon[k]k 0,6^{k-1+1} = \varepsilon[k]k 0,6^{k-1} 0,6,$$

azaz „becsempésztük” a $k-1$ tagot azáltal, hogy a kitevőhöz hozzáadtunk és levontunk 1-et. Ennek a jelnek a z-transzformáltja azonban már meghatározható:

$$\mathcal{Z}\{s[k]\} = 0,6 \frac{z}{(z-0,6)^2}.$$

4. Példa. Határozzuk meg az $s[k] = \varepsilon[k-4]k 0,5^k$ z-transzformáltját (l. 9.2. ábra).

Megoldás. A jel az előző feladatban adott jelhez hasonló, csak épp a $k=4$ ütemben lép be. Az eltolási tétel akkor alkalmazható, ha a jelben szereplő összes k ugyanannyi ütemmel van eltolva. Alakítsuk át ennek megfelelően a megadott jel időfüggvényét:

$$s[k] = \varepsilon[k-4](k-4+4) 0,5^{k-4+4}.$$

Ezáltal nem módosítottunk a jelen, de a szükséges eltolásokat minden helyre bevittük. Bontsuk fel ezután a zárójelet és a kitevőt:

$$s[k] = \varepsilonk-4 0,5^{k-4} 0,5^4 + \varepsilon[k-4]4 \cdot 0,5^{k-4} 0,5^4.$$

Az első tag külön figyelmet érdemel. Ismerjük ugyanis az $\varepsilon[k]kq^{k-1}$ jel z-transzformáltját. Ha ezen jelet K -val eltoljuk, akkor az $\varepsilonk-Kq^{k-K-1}$ jelhez jutunk. Itt figyelni kell a kitevőben szereplő $(k-K-1)$ -re, esetünkben tehát még egy -1 -et be kell vinni az első tag kitevőjébe:

$$\begin{aligned} s[k] &= \varepsilonk-40,5^{k-4-1+1}0,5^4 + \varepsilon[k-4]4 \cdot 0,5^{k-4}0,5^4 = \\ &= \varepsilonk-40,5^{k-5}0,5^5 + \varepsilon[k-4]4 \cdot 0,5^{k-4}0,5^4. \end{aligned}$$

A második tag az $\varepsilon[k]q^k$ jel eltoltja 4 ütemmel, aminek a transzformáltját ismerjük. Ezt a jelet már z-transzformálhatjuk az előző feladatban is szereplő összefüggés és az eltolási tétel szerint:

$$\mathcal{Z}\{s[k]\} = 0,03125 \frac{z}{(z-0,5)^2} z^{-4} + 0,25 \frac{z}{z-0,5} z^{-4}.$$

Az eltolási tétel értelmében a jel z-transzformáltját tehát még z^{-4} -gyel be kell szorozni.

5. Példa. Határozzuk meg a következő jel z-transzformáltját (l. 9.2. ábra).

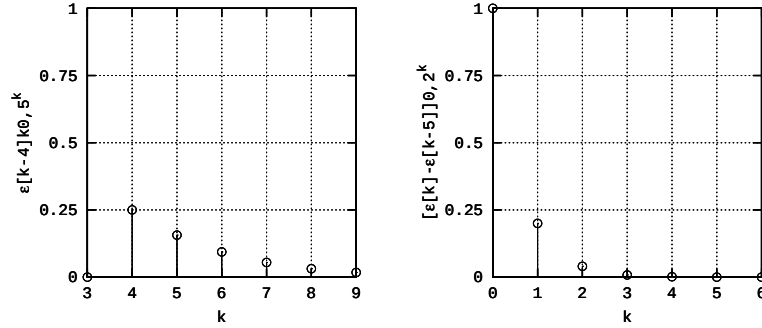
$$s[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-5])0,2^k.$$

Megoldás. Első lépésben bontsuk fel a zárójelet és alakítsuk át a jel második tagját, hogy az eltolási tételt alkalmazni tudjuk:

$$s[k] = \varepsilon[k]0,2^k - \varepsilon[k-5]0,2^{k-5+5} = \varepsilon[k]0,2^k - \varepsilon[k-5]0,2^{k-5}0,2^5.$$

A jel z-transzformáltja ebből már felírható:

$$\mathcal{Z}\{s[k]\} = \frac{z}{z-0,2} - 0,2^5 \frac{z}{z-0,2} z^{-5}.$$



9.2. ábra. A 4. és az 5. példában szereplő jelek időfüggvénye

9.2. A z-transzformáció alkalmazása

9.2.1. A válaszjel z-transzformáltjának meghatározása

Első lépésben tehát meg kell határozni az $s[k]$ gerjesztés $S(z)$ z-transzformáltját, valamint a rendszert jellemző $W(z)$ átviteli függvényt. Utóbbi vagy adott, vagy az impulzusválaszból, vagy a rendszeregyenletből, vagy az állapotváltozós leírásból meghatározható. Ezután a kettőt össze kell szorozni a (9.19) összefüggés értelmében, ami a válaszjel $Y(z)$ z-transzformáltját adja, s ezen transzformáltat inverz z-transzformálni kell, melynek eredményeképp kapjuk a válaszjel $y[k]$ időfüggvényét. A következőkben ezen lépéseket tárgyaljuk.

A példák kapcsán megfigyelhettük, hogy elemi függvények által leírt jelek z-transzformáltja általában egy tört, melynek számlálója is és nevezője is egy-egy polinom z -ben, vagy z^{-1} -ben. Eltolt függvények esetében megjelenik még egy z^{-K} szorzótényező is. Ennél bonyolultabb transzformáltakkal nem foglalkozunk.

Az átviteli függvény pedig mindig egy polinom per polinom alakú kifejezés.

A válaszjel z-transzformáltja tehát két tört szorzata, mely

szorzat mindig polinom per polinom alakú kifejezésre vezet (az esetleges z^{-K} szorzótényezővel). Végeredményben tehát egy polinom per polinom alakú kifejezés inverz z-transzformáltját kell meghatározni, amely ezen esetekben nagyon egyszerű szabályok segítségével elvégezhető. A válaszjel z-transzformáltja ebben az esetben a z , vagy a z^{-1} változó ún. *racióális függvénye*. Pontosan ezen oknál fogva nem is bonyolítjuk feleslegesen az inverziót, hanem tipikus példák kapcsán mutatjuk be azt. A z-transzformáltak esetében hasonló jellegű törtfüggvényeket kapunk, mint a Laplace-transzformáció esetén (l. 308. oldal), ezért a csoportosítást nem ismételjük meg. Ennek azonban fontos következménye, hogy csak azon z-transzformáltakhoz tartozhat időfüggvény, amelyekre igaz, hogy

$$\boxed{\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) < \infty.} \quad (9.39)$$

Ez akkor lehetséges, ha a nevező fokszáma nagyobb a számláló fokszámánál.

9.2.2. Az inverz z-transzformáció és a kifejtési tétel

A jel z-transzformáltjának ismeretében a jel időfüggvényét általánosan az ún. *inverziós integrál* segítségével számíthatjuk, amihez a következőképp jutunk. Idézzük fel előbb az inverz Fourier-transzformáció összefüggését:

$$s[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta.$$

A z-transzformációhoz a belépő és $e^{-\sigma k}$ -val szorzott jel Fourier-transzformációjával jutottunk el. Fordítsuk meg most ezt a műveletet, azaz keressük az $S(e^{\sigma+j\vartheta})$ -hoz tartozó belépő időfüggvényt:

$$\varepsilon[k] s[k] e^{-\sigma k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{\sigma+j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta.$$

Szorozzuk be mindkét oldalt $e^{\sigma k}$ -val:

$$\varepsilon[k]s[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{\sigma+j\vartheta})e^{(\sigma+j\vartheta)k} d\vartheta.$$

Mivel $z = e^{\sigma+j\vartheta} = e^{\sigma}e^{j\vartheta}$, ezért

$$dz = e^{\sigma}de^{j\vartheta} = e^{\sigma}e^{j\vartheta}jd\vartheta = e^{\sigma+j\vartheta}jd\vartheta = zjd\vartheta,$$

hiszen σ konstans. Innen $d\vartheta = \frac{dz}{jz}$ adódik. Helyettesítsük ezt az előbbi integrálba:

$$\boxed{\varepsilon[k]s[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=\sigma} S(z)z^{k-1}dz.} \quad (9.40)$$

Ez az un. *inverziós integrál*, ami definiálja az inverz z-transzformációt. Ez az integrál $k < 0$ esetén nulla értéket ad. A körintegrál abból adódik, hogy míg az inverz Fourier-transzformáció integrálja $-\pi$ -től, π -ig fut a ϑ változó szerint, addig mindez az $e^{j\vartheta}$ komplex változóban pontosan egy kört jelent, melynek sugara pontosan e^{σ} , hiszen $z = e^{\sigma}e^{j\vartheta}$. Az inverz z-transzformációt a következő operátor jelöli:

$$\boxed{s[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{S(z)\}.} \quad (9.41)$$

Az alkalmazások szempontjából ezen integrál kiértékelésére azonban nincs szükségünk.

A válaszjel z-transzformáltja tehát a (9.19) alapján határozható meg. Ennek inverze, azaz a válaszjel időfüggvénye esetünkben az inverz Laplace-transzformációhoz hasonlóan az un. *kifejtési tétel* segítségével határozható meg.

Vizsgáljuk meg ezen lehetőségeket példákkal illusztrálva.

1. Példa. Egy rendszer átviteli függvénye és gerjesztésének időfüggvénye a következő. Határozzuk meg a rendszer válaszát.

$$W(z) = \frac{z}{z^2 + 0,4z - 0,05}, \quad s[k] = 2\varepsilon[k]0,3^k.$$

Megoldás. Első lépésben hozzuk az átviteli függvény nevezőjét szorzat alakra. A nevező polinomjának két együtthatója $p_1 = 0, 1$ és $p_2 = -0, 5$, azaz

$$W(z) = \frac{z}{(z - 0, 1)(z + 0, 5)}.$$

A gerjesztés időfüggvényének z -transzformáltja pedig a következő:

$$S(z) = \frac{2z}{z - 0, 3}.$$

A válaszjel z -transzformáltja a konvolúció z -transzformáltjának megfelelően ezen két z -transzformált szorzata. Ezután a számlálóból a z elsőfokú tagját emeljük ki a törtfüggvény elé (ennek okára a feladat végén visszatérünk), azaz

$$Y(z) = W(z)S(z) = z \frac{2z}{(z - 0, 1)(z + 0, 5)(z - 0, 3)}.$$

A törtfüggvényt a Laplace-transzformáció alkalmazása során ismertetett módon bontsuk fel parciális törtek szorzatára. Ezt megtehetjük, hiszen a törtfüggvény valódi, mivel a számláló fokszáma (ami 1) kisebb a nevező fokszámánál (ami pedig 3). Közben azonban ne feledkezzünk el a kiemelt z tényezőről:

$$Y(z) = z \left(\frac{A}{z - 0, 1} + \frac{B}{z + 0, 5} + \frac{C}{z - 0, 3} \right).$$

Az A , B és C együtthatókat ezután letakarással határozhatjuk meg.¹² Szorozzunk vissza ezután a kiemelt z tényezővel, s a válaszjel z -transzformáltja a következő lesz:

$$Y(z) = \frac{-1, 67z}{z - 0, 1} + \frac{-2, 08z}{z + 0, 5} + \frac{3, 75z}{z - 0, 3}.$$

¹² $A = \frac{2 \cdot 0, 1}{(0, 1 + 0, 5)(0, 1 - 0, 3)} = -1, 67$, $B = \frac{2(-0, 5)}{(-0, 5 - 0, 1)(-0, 5 - 0, 3)} = -2, 08$, $C = \frac{2 \cdot 0, 3}{(0, 3 - 0, 1)(0, 3 + 0, 5)} = 3, 75$. Természetesen alkalmazhatjuk az egyenlő együtthatók módszerét is.

Ezen tagokban már felismerhetjük a $\frac{z}{z-q}$ alakú törtfüggvényt, ami pontosan az $\varepsilon[k]q^k$ függvény z-transzformáltja. Látható, hogy a z tényező kiemelésére mindig szükség van, pont azért, hogy a parciális törtekre bontás után vele viasszaszorozva megkapjuk a szükséges z-transzformáltakat. Így a válaszjel időfüggvénye a következő:

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(-1,67 \cdot 0,1^k - 2,08(-0,5)^k + 3,75 \cdot 0,3^k \right).$$

Fontos itt is megjegyezni, hogy a z-transzformációval számított válaszjel belépő függvény, hiszen a gerjesztés belépő függvény és a rendszer kauzális (impulzusválasza is belépő függvény).

2. Példa. Egy rendszer impulzusválasza és gerjesztése a következő. Határozzuk meg a rendszer válaszjelének időfüggvényét.

$$w[k] = \varepsilon[k] \left(0,2^k + 2 \cdot 0,5^k \right), \quad s[k] = \varepsilon[k] 0,5^k.$$

Megoldás. Első lépésben határozzuk meg az impulzusválasz és a gerjesztés z-transzformáltját az ismert összegfüggések alapján:

$$W(z) = \frac{z}{z-0,2} + \frac{2z}{z-0,5} = \frac{3z^2 - 0,9z}{(z-0,2)(z-0,5)}, \quad S(z) = \frac{2z}{z-0,5}.$$

Ne felejtjük el, hogy az impulzusválasz z-transzformáltja pontosan az átviteli függvény. A válaszjel z-transzformáltját ezen két transzformált szorzata adja, de közben emeljük ki az előző feladatban már említett z szorzótényezőt:

$$Y(z) = W(z)S(z) = z \frac{6z^2 - 1,8z}{(z-0,2)(z-0,5)^2}.$$

A törtfüggvény valódi, mivel a számláló fokszáma 2, a nevező fokszáma pedig 3, de a nevezőben kétszeres gyök is szerepel. A törtfüggvényt a következőképp lehet parciális törtekre bontani:

$$Y(z) = z \left(\frac{A}{z-0,2} + \frac{B}{z-0,5} + \frac{C}{(z-0,5)^2} \right).$$

A Laplace-transzformációnál tárgyaltakhoz hasonlóan, ebben az esetben is csak az A és a C együttható számítható közvetlenül letakarással, hiszen ha csak a $z - 0,5$ polinomot (és nem a $(z - 0,5)^2$ polinomot) takarjuk le, akkor nullával osztanánk.¹³ A B együtthatót tehát mindenképp az egyenlő együtthatók módszerével kell meghatározni. Hozzuk hát közös nevezőre a három parciális tört összegét:

$$\frac{A(z - 0,5)^2 + B(z - 0,2)(z - 0,5) + C(z - 0,2)}{(z - 0,2)(z - 0,5)^2}.$$

Ennek számlálóját egyenlőre kell legyen az eredeti z -transzformált számlálójával:

$$A(z^2 - z + 0,25) + B(z^2 - 0,7z + 0,1) + C(z - 0,2) = 6z^2 - 1,8z,$$

ahonnan az együtthatók egyenlőségéből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{array}{rcl} A + B & = & 6 \\ -A - 0,7B + C & = & -1,8 \\ 0,25A + 0,1B - 0,2C & = & 0 \end{array} \right\}$$

és pl. az első egyenletből a hiányzó B együttható számolható: $B = 6 - A = 7,33$. Természetesen az egyenletrendszer megoldásából is megkaphatjuk a három együtthatót, de akkor azt meg kell oldanunk. A letakarás kissé egyszerűsíti a megoldás menetét. Visszaszorozva a kiemelt z tényezővel a z -transzformált alakja tehát a következő:

$$Y(z) = \frac{-1,33z}{z - 0,2} + \frac{7,33z}{z - 0,5} + \frac{2z}{(z - 0,5)^2},$$

amelyből az időfüggvény felírható:

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(-1,33 \cdot 0,2^k + 7,33 \cdot 0,5^k + 2k \cdot 0,5^{k-1} \right).$$

¹³ $A = \frac{6 \cdot 0,2^2 - 1,8 \cdot 0,2}{(0,2 - 0,5)^2} = -1,33$, $C = \frac{6 \cdot 0,5^2 - 1,8 \cdot 0,5}{0,5 - 0,2} = 2$.

Az utolsó tag ugyanis pontosan az $\varepsilon[k]k q^{k-1}$ függvény z-transzformáltja.

3. Példa. Egy rendszer rendszeregyenlete és gerjesztése a következő. Határozzuk meg a rendszer válaszelét és határozzuk meg a rendszer impulzusválaszát is.

$$\begin{aligned} y[k] - 0,7y[k-1] + 0,1y[k-2] &= 3s[k] - 0,9s[k-1], \\ s[k] &= \{1 - \varepsilon[k]\} 2 + \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4]\} 0,4^k. \end{aligned}$$

Megoldás. A rendszer gerjesztése nem belépő.¹⁴ Ezen oknál fogva a nem belépő jelre vonatkozó eltolási tételt kell alkalmaznunk a rendszeregyenletre $S = S(z)$ és $Y = Y(z)$ jelölésekkel:

$$\begin{aligned} Y - 0,7\{y[-1] + Yz^{-1}\} + 0,1\{y[-2] + y[-1]z^{-1} + Yz^{-2}\} &= \\ = 3S - 0,9\{s[-1] + Sz^{-1}\}. \end{aligned}$$

A z-transzformáció értelmében ez az egyenlet a $k \geq 0$ ütemekre adja meg a válaszel időfüggvényét, ugyanakkor szükségünk van az $s[-1]$, az $y[-1]$ és az $y[-2]$ értékekre is. Ezeket a $k < 0$ ütemekre felírt rendszeregyenletből határozhatjuk meg, ahol a gerjesztés értéke 2. Feltehetjük, hogy elegendő idő eltelt már ahhoz, hogy a tranziens összetevő lecsengjen, feltéve, hogy a rendszeregyenlet sajátértékei egységsugarú körön belül helyezkednek el. Ellenőrizzük hát a rendszer gerjesztés-válasz stabilisát:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 0,7\lambda + 0,1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0,5, \lambda_2 = 0,2.$$

Ez tehát teljesül. Ebben az esetben a rendszer stacionárius állapotára igaz, hogy $y = y[k] = y[k-1] = y[k-2]$ és $s = s[k] = s[k-1]$, hiszen *konstans* gerjesztéshez konstans válasz tartozik, azaz

¹⁴Gyakorlasképp érdemes megoldani a példát úgy is, ha $s[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-4]\} 0,4^k$, azaz ha a gerjesztés belépő.

tetszőleges k ütemre mind a gerjesztés, mind a válasz konstans értékű:

$$y - 0,7y + 0,1y = 3s - 0,9s = 3 \cdot 2 - 0,9 \cdot 2 = 4,2 \quad \Rightarrow \quad y = 10,5,$$

ami a rendszer gerjesztett válasza. Így tehát $y[-1] = y[-2] = 10,5$ és $s[-1] = 2$. Ezeket felhasználva írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} Y - 0,7 \{10,5 + Yz^{-1}\} + 0,1 \{10,5 + 10,5z^{-1} + Yz^{-2}\} = \\ = 3S - 0,9 \{2 + Sz^{-1}\}. \end{aligned}$$

Bontsuk fel a zárójelet, szorozzunk be z^2 -tel és rendezzük a kapott egyenletet:

$$Y(z^2 - 0,7z + 0,1) = S(3z^2 - 0,9z) + 4,5z^2 - 1,05z.$$

Ezen egyenletbe már csak be kell írunk a gerjesztés z -transzformáltját, miáltal megkapjuk a válaszjel z -transzformáltját. A gerjesztés z -transzformáltja pedig a következő:

$$S = \frac{z}{z - 0,4} - 0,4^4 \frac{z}{z - 0,4} z^{-4}.$$

Mielőtt ezt beírnánk a rendszeregyenlet z -transzformáltjába, gondolkodjunk: a z -transzformált második tagja majdnem ugyanaz, mint az első, csak épp szerepel benne egy konstans szorzótényező és egy időbeli eltolás. Ha tehát meghatározzuk a válaszjelet csak az első tagra vonatkoztatva, majd abból levonjuk ennek $0,4^4$ -szeresét és 4 ütemmel eltoltját, akkor megkapjuk a teljes válaszjelet. Ezt a rendszer linearitása és kauzalitása miatt tehetjük meg. Azaz $y[k] = y_1[k] - 0,2^4 y_1[k - 4]$, ahol $y_1[k]$ csak az első tagnak megfelelő válaszjel, amelyre kapjuk, hogy

$$Y_1(z^2 - 0,7z + 0,1) = \frac{z}{z - 0,4} (3z^2 - 0,9z) + 4,5z^2 - 1,05z.$$

Hozzuk először közös nevezőre a jobb oldalt, majd osszunk át a bal oldalon lévő polinommal. Ennek eredményeképp kapjuk az $y_1[k]$ z-transzformáltját:

$$Y_1 = z \frac{7,5z^2 - 3,75z + 0,42}{(z^2 - 0,7z + 0,1)(z - 0,4)} = z \frac{7,5z^2 - 3,75z + 0,42}{(z - 0,5)(z - 0,2)(z - 0,4)}.$$

Ennek inverz z-transzformáltja lesz a keresett $y_1[k]$ időfüggvénye a $k \geq 0$ időpillanatokban. A racionális törtfüggvény valódi, tehát a szokásos módon parciális törtekre bonthatjuk és alkalmazhatjuk a „letakarásos módszert”:¹⁵

$$Y_1 = \frac{14z}{z - 0,5} + \frac{-0,5z}{z - 0,2} + \frac{-6z}{z - 0,4},$$

amelynek a következő időfüggvény felel meg:

$$y_1[k] = \varepsilon[k] \left\{ 14 \cdot 0,5^k - 0,5 \cdot 0,2^k - 6 \cdot 0,4^k \right\}.$$

A válaszjel tehát a következő:¹⁶

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(14 \cdot 0,5^k - 0,5 \cdot 0,2^k - 6 \cdot 0,4^k \right) - 0,2^4 \varepsilon[k - 4] \left(14 \cdot 0,5^{k-4} - 0,5 \cdot 0,2^{k-4} - 6 \cdot 0,4^{k-4} \right).$$

Ez az időfüggvény megadja a helyes 10,5 értéket a $k = 0$ és $k = -1$ ütemekre a $k \geq m - n = 1 - 2 = -1$ összefüggésnek megfelelően, de a $k < -1$ -re természetesen nem ad helyes értéket. Az összefüggés alapvetően a $k \geq 0$ ütemekre ad helyes eredményt.

Az impulzusválasz meghatározásához írjuk fel a rendszeregyenlet z-transzformáltját belépő gerjesztés esetén:

$$Y - 0,7Yz^{-1} + 0,1Yz^{-2} = 3S - 0,9Sz^{-1},$$

¹⁵ $A = \frac{7,5 \cdot 0,5^2 - 3,75 \cdot 0,5 + 0,42}{(0,5 - 0,2)(0,5 - 0,4)} = 14$, $B = \frac{7,5 \cdot 0,2^2 - 3,75 \cdot 0,2 + 0,42}{(0,2 - 0,5)(0,2 - 0,4)} = -0,5$, $C = \frac{7,5 \cdot 0,4^2 - 3,75 \cdot 0,4 + 0,42}{(0,4 - 0,5)(0,4 - 0,2)} = -6$.

¹⁶ A feladatot célszerű összetevőkre bontással is megoldani és a kapott eredményeket összevetni.

majd szorozzunk be z^2 -tel és emeljük ki Y -t és S -et:

$$Y(z^2 - 0,7z + 0,1) = S(3z^2 - 0,9z),$$

ahonnan a rendszer átviteli függvénye:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{S(z)} = \frac{3z^2 - 0,9z}{z^2 - 0,7z + 0,1} = z \frac{3z - 0,9}{(z - 0,5)(z - 0,2)}.$$

Tudjuk, hogy az impulzusválasz az átviteli függvény inverz z -transzformáltja. Bontsuk fel a fenti valódi törtet parciális törtek összegére:¹⁷

$$W(z) = \frac{2z}{z - 0,5} + \frac{z}{z - 0,2},$$

azaz az impulzusválasz a következő:

$$w[k] = \varepsilon[k] \left(2 \cdot 0,5^k + 0,2^k \right).$$

4. Példa. Határozzuk meg az $x[k]$ jel értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ütemekre, ha a jel z -transzformáltja adott.

$$X(z) = \frac{2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1}{z^4 - 0,6z^3 + 0,05z^2}.$$

Megoldás. Abban az esetben, ha nincs szükségünk az időfüggvényre, csak a jel értékére az első néhány ütemben, akkor célszerű polinomosztást végezni. Ezt z pozitív hatványival lehet kényelmesen elvégezni:

$$\begin{array}{ll} (2z^3 - 1,2z^2 + 1,1z - 1,1) : (z^4 - 0,6z^3 + 0,05z^2) & \stackrel{(1)}{=} 2z^{-1} \stackrel{(4)}{+} 1z^{-3} \\ (2) \quad \underline{(2z^3 - 1,2z^2 + 0,1z)} & \stackrel{(7)}{-} 0,5z^{-4} \\ (3) \quad & z - 1,1 \\ (5) \quad & \underline{(z - 0,6 + 0,05z^{-1})} \\ (6) \quad & -0,5 - 0,05z^{-1} \end{array}$$

¹⁷ $A = \frac{3 \cdot 0,5 - 0,9}{0,5 - 0,2} = 2, B = \frac{3 \cdot 0,2 - 0,9}{0,2 - 0,5} = 1.$

Az (1) lépésben osszuk el a számláló legmagasabb fokú tagját a nevező legmagasabb fokú tagjával: $\frac{2z^3}{z^4} = 2z^{-1}$, és az eredményt írjuk le az egyenlőségjel után. A (2) lépésben szorozzuk be ezen értékkel a nevező minden tagját, és a szorzatot írjuk le a számláló alá, majd a (3) lépésben vonjuk ki a számlálóból a kapott szorzatot. Ez lesz a $z - 1,1$ polinom. Ismételjük meg a műveletet, azaz a (4) lépésben a $z - 1,1$ polinom legmagasabb fokú tagját osszuk el a nevező legmagasabb fokú tagjával: $\frac{z}{z^4} = z^{-3}$ és a kapott eredményt (előjelhelyesen) adjuk hozzá az egyenlőségjel mögött álló polinomhoz. Az (5) lépésben ismét szorozzuk be a nevezőt a z^{-3} taggal ($z - 0,6 + 0,05z^{-1}$) és írjuk le ezt a polinomot a $z - 1,1$ polinom alá, majd a (6) lépésben vonjuk ki a kapott polinomot a felette lévőből. Ez lesz a $-0,5 - 0,05z^{-1}$. A (7) lépésben osszuk el megint az utolsó polinom legmagasabb fokú tagját a nevező legmagasabb fokú tagjával: $\frac{-0,5}{z^4} = -0,5z^{-4}$, majd adjuk ezt hozzá az egyenlőségjel mögött álló polinomhoz.

Hányszor kell elvégezni a műveletet? Annyiszor kell ismételni a polinomosztást, amíg a kapott polinom kitevőjében meg nem jelenik a kívánt legmagasabb ütem, ameddig ki akarjuk számolni a függvény értékét. Jelen esetben tehát z^{-4} -ig. A kapott eredménynek megfelelő időfüggvény ugyanis az eltolási tétel értelmében a Dirac-impulzus eltoltjait tartalmazza. Az időfüggvény ezen része tehát a következő:

$$x[k] = 2\delta[k - 1] + \delta[k - 3] - 0,5\delta[k - 4],$$

azaz $x[0] = 0$, $x[1] = 2$, $x[2] = 0$, $x[3] = 1$, $x[4] = -0,5$.¹⁸

¹⁸Gyakorlásképp érdemes a feladatot parciális törtekre bontással is megoldani és az eredményeket ellenőrizni.

9.2.3. Az átviteli függvény pólus-zérus elrendezése, a rendszer stabilitása

Láttuk, hogy az átviteli függvény egy polinom per polinom alakú kifejezés, és mint ilyen felírható gyöktényezős alakban is:

$$\boxed{W(s) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)},} \quad (9.42)$$

ahol a számláló gyökei alkotják a *zérusokat*, a nevező gyökei pedig a *pólusokat*, K pedig egy kiemelhető konstans. A zérusok nullává, a pólusok végtelenné teszik az átviteli függvényt. A nevező polinomja a $|z\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ által definiált determináns, ami $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ alakban már megjelent az időtartománybeli analízis során is, vagy alakilag a rendszeregyenlethez rendelhető karakterisztikus polinommal egyezik meg. A sajátértékek és a pólusok tehát megegyeznek, vagyis a pólus-zérus elrendezésből következtetni lehet a rendszer gerjesztés-válasz stabilitására: *a rendszer akkor és csakis akkor gerjesztés-válasz stabilis, ha átviteli függvényének minden pólusa abszolút értékben egynél kisebb:*

$$\boxed{|p_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n,} \quad (9.43)$$

azaz, ha minden sajátértéke egységsugarú körön belül van.

Diszkrét idejű rendszerek esetében is elmondható az, hogy ha egy rendszer aszimptotikusan stabil, akkor biztosan gerjesztés-válasz stabil is, fordítva azonban ez nem biztos, hogy igaz. Ha egy rendszer aszimptotikusan nem stabil, akkor még lehet gerjesztés-válasz stabil, ami a $\mathbf{B}$ oszlopvektortól és a $\mathbf{C}$ sorvektortól függ.

5. rész Kapcsolat a folytonos és a diszkrét idejű rendszerek között

Ebben a részben folytonos idejű jelek mintavételezésével és a mintavett jelek rekonstrukciójával, valamint folytonos idejű rendszerek diszkrét idejű szimulációjával foglalkozunk.

Folytonos idejű jelek továbbításának és feldolgozásának alapvető módszerei alapszanak a jel *mintavételezésén* és *rekonstrukálásán*. A jel mintavételezésén a folytonos idejű jel adott t_k időpillanatokban vett mintáinak rögzítését értjük. A legegyszerűbb esettel foglalkozunk, amikor a mintavételezés azonos időközönként történik adott T_s mintavételezési periódusidővel, azaz $t_k = kT_s$, ahol k egész szám. A folytonos idejű jelet tehát ekvidisztáns minták reprezentálják. Látni fogjuk, hogy a mintavételezési periódusidő megválasztása kulcskérdés és szoros kapcsolatban áll a jel spektrumával. Bevezetjük a *mintavételi tételt*. Az így kialakított diszkrét idejű jelet kvantálás után továbbítják, majd a vett jelet visszaalakítják folytonos idejű és folytonos értékű jellé. Ez utóbbi a jel rekonstrukciója.

A részt a folytonos idejű rendszerek diszkrét idejű szimulációjának lehetőségeivel zárjuk.

10. fejezet

Mintavételezés és rekonstrukció

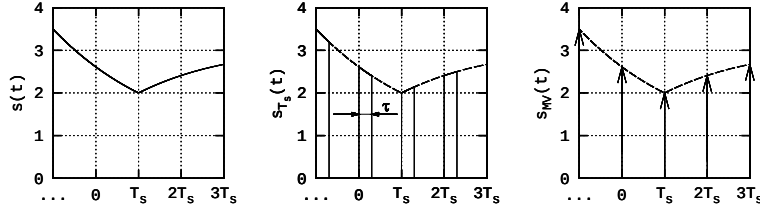
10.1. A mintavételezett jel időfüggvénye

A mintavételezés illusztrálása a 10.1. ábrán látható. Az $s(t)$ folytonos idejű jel mintavételezését végző legegyszerűbb eszköz úgy működik, hogy T_s időközönként τ ideig átengedi a folytonos idejű jelet, egyébként kimenetén nulla értékű jelet ad. Fontos azonban, hogy $\tau \ll T_s$. Az így kialakuló $s_{T_s}(t)$ jel tehát T_s időközönként τ ideig az eredeti jellel egyezik meg, majd értéke nulla, s ez periódikusan ismétlődik. Az ábra alapján írhatjuk, hogy

$$s_{T_s}(t) = \begin{cases} s(t), & \text{ha } kT_s \leq t < kT_s + \tau; \\ 0, & \text{ha } kT_s + \tau \leq t < (k+1)T_s. \end{cases} \quad (10.1)$$

A kT_s időpillanat pontosabban a $kT_s + 0$ időpillanatot jelenti. Ez a jel leírható ablakozott jelek összegeként is:

$$s_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\varepsilon(t - kT_s) - \varepsilon(t - (kT_s + \tau))] s(t). \quad (10.2)$$



10.1. ábra. A mintavételezett jel bevezetésének illusztrálásához

Osszuk el ezt az összefüggést τ -val és szorozzuk is meg vele:

$$s_{T_s}(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon(t - kT_s) - \varepsilon(t - (kT_s + \tau))}{\tau} s(t).$$

Ha τ értékét nagyon kicsire választjuk¹, akkor $s(t)$ értéke konstansnak is vehető a $kT_s \leq t < kT_s + \tau$ időpillanatokban és $s(kT_s)$ -sel jelölhető, továbbá ráismerhetünk a Dirac-impulzust bevezető összefüggésre. Így juthatunk el az $s(t)$ jel $s_{MV}(t)$ ideálisan mintavételezett leírásához (matematikai mintavételezésnek is nevezik):²

$$s_{MV}(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) s(kT_s) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) s[k]. \quad (10.3)$$

Az $s(kT_s)$ jelsorozat gyakorlatilag az $s(t)$ jel mintáit jelenti, ezért jelölhetjük úgy, mint a diszkrét idejű jeleket, azaz $s[k] = s(kT_s)$. Ez azt jelenti, hogy egy $s(t)$ folytonos idejű jelhez egy $s[k]$ diszkrét idejű jelet rendelünk, melynek k -adik ütembeli értéke megegyezik az $s(t)$ jel $t = kT_s$ időpontbeli helyettesítési értékével.

¹Úgy kell megválasztani, hogy a jel ezen τ idő alatt csak kicsit változzon. Mindez tehát a jel változási sebességétől is függ.

²Egyes irodalmakban az $\frac{1}{\tau} s_{MV}(t)$ jelet használják. Ennek azonban nincs jelentősége.

Az összefüggésben tehát vegyesen fordul elő a folytonos idejű és a diszkrét idejű leírás. Vizsgáljunk meg egy egyszerű példát.

Példa. Legyen $s(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$. Határozzuk meg a hozzá rendelhető $s[k] = s(kT_s)$ diszkrét idejű jelet és az $s_{MV}(t)$ mintavételezett jelet.

Megoldás. A t változó helyébe tehát helyettesítsünk kT_s -t:

$s(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow kT_s} s(kT_s) = \varepsilon(kT_s)e^{-\alpha kT_s} = \varepsilon(kT_s) (e^{-\alpha T_s})^k$,
amelyből $q = e^{-\alpha T_s}$ helyettesítéssel megkapjuk a diszkrét idejű jelet:

$$s[k] = \varepsilon[k]q^k, \quad \text{ahol} \quad q = e^{-\alpha T_s}.$$

A mintavételezett jel időfüggvénye (10.3) alapján tehát a következő:

$$s_{MV}(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \varepsilon[k]q^k = \tau \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_s) q^k.$$

Legyen a továbbiakban $\alpha = 2 \frac{1}{s}$. Ha pl. $T_s = 10$ ms, és $\tau = \frac{T_s}{10}$, akkor a jel megváltozása a $t = 0$ időpillanatban (itt a legnagyobb a változás) vett minta során $e^0 - e^{-2 \cdot 0,001} = 1 - 0,998 = 0,002$, ami elég kicsi változást jelent és a jel értéke 1-nek vehető ezen időintervallumban.

Kérdés még a T_s mintavételi periódusidő helyes megválasztása. Ebben lesz segítségünkre a mintavételezett jel spektruma.

10.2. A mintavételezett jel spektruma

10.2.1. Kapcsolat a mintavételezett jel spektruma és a diszkrét idejű jel spektruma között

Ha az $s(t)$ jel abszolút integrálható, akkor az $s_{MV}(t)$ jel abszolút összegezhető, azaz képezhetjük a mintavételezett jel Fo-

urier-transzformáltját, vagy spektrumát:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{s_{\text{MV}}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{MV}}(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) s[k] \right) e^{-j\omega t} dt.\end{aligned}$$

Az integrálás szempontjából a k szerinti összegzés és a τ -val történő szorzás kiemelhető:

$$\mathcal{F}\{s_{\text{MV}}(t)\} = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) e^{-j\omega t} dt.$$

Az integrál az eltolts Dirac-impulzus Fourier-transzformáltját jelenti, amit a transzformáció eltolási-tételének értelmében határozhatunk meg: $\mathcal{F}\{\delta(t - kT_s)\} = e^{-j\omega kT_s}$, azaz az

$$\mathcal{F}\{s_{\text{MV}}(t)\} = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-jk\omega T_s}$$

összefüggés megadja a mintavételezett jel spektrumát. Hasonlítunk ezt össze a diszkrét idejű jel

$$\mathcal{F}\{s[k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s[k] e^{-jk\vartheta}$$

spektrumával. A két összefüggésből adódik, hogy

$$\boxed{\mathcal{F}\{s_{\text{MV}}(t)\} = \tau \mathcal{F}\{s[k]\}|_{\vartheta=\omega T_s} \Rightarrow S_{\text{MV}}(j\omega) = \tau S(e^{j\vartheta})|_{\vartheta=\omega T_s}}, \quad (10.4)$$

azaz a mintavételezett jel spektruma a folytonos idejű jel mintáiból képzett diszkrét idejű jel spektrumából úgy képezhető, hogy elvégezzük a $\vartheta = \omega T_s$ helyettesítést, majd a végeredményt τ -val beszorozzuk. A folytonos idejű jelet tehát diszkrét idejű jellel jellemeztük. Folytassuk ennek megfelelően a már elkezdett példát, amely egy nagyon fontos konklúzióval zárul.

Példa. Határozzuk meg az $s(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ folytonos idejű jelből mintavételezéssel kapott jel spektrumát az $s[k] = s(kT_s)$ diszkrét idejű jel ismeretében. Ábrázoljuk az amplitúdóspektrumot is.

Megoldás. A már meghatározott $s[k]$ jel időfüggvényéből a jel spektruma felírható:

$$S(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1 - qe^{-j\vartheta}}.$$

Végezzük el a (10.4) összefüggésnek megfelelő átalakítást, melynek eredményeképp kapjuk a mintavételezett jel spektrumát:

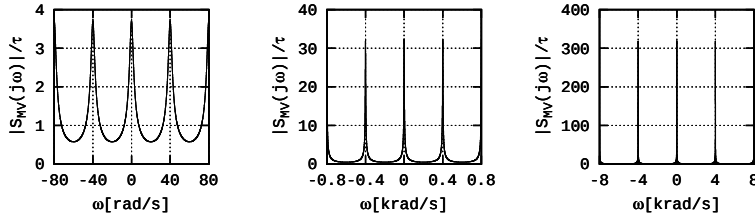
$$S_{MV}(j\omega) = \tau \frac{1}{1 - qe^{-j\omega T_s}} = \tau \frac{1}{1 - q \cos(\omega T_s) + jq \sin(\omega T_s)}.$$

Korábban (l. 223. oldal) már megjegyeztük, hogy a jel sávszélessége és a mintavételezés periódusideje között szoros kapcsolat van. Most ezt vizsgáljuk meg, később pedig igazoljuk is a mintavételi tételt.

Ha megszabjuk, hogy az $S(j\omega)$ amplitúdóspektrum maximumának 1%-ánál kisebb értéke elhanyagolható, akkor az $s(t)$ jel sávszélessége $\Delta\omega_s \simeq 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Tekintsük így a spektrumot sávkorlátozottnak az $\Omega = \Delta\omega_s$ sávkorláttal. Annyit már most is tudunk, hogy a mintavételezés körfrekvenciája legfeljebb $\frac{\pi}{\Omega}$ lehet. Rajzoljuk fel az $\frac{1}{\tau} S_{MV}(j\omega)$ spektrum abszolút értékét (amplitúdóspektrumát) $T_s = \frac{\pi}{20}$ s, $T_s = \frac{\pi}{200}$ s és $T_s = \frac{\pi}{2000}$ s mintavételi periódusidőket választva. Az eredmények a 10.2. ábrán láthatók.

Az $|S(j\omega)|$ amplitúdóspektrum maximuma az $\omega = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ körfrekvencián $|S(j0)| = 0,5$. A megadott mintavételi periódusidővel mintavételezett jel amplitúdóspektrumának maximuma ugyanezen körfrekvencián 3, 7092, 32, 334 és 318, 81, amely értékek a 0, 5-nek kb. az $\frac{1}{T_s}$ -szerese (ennek hamarosan az okát is látni fogjuk). Látható, hogy a mintavételezett jelek spektruma $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ szerint periodikus, és ezen mintavételi körfrekvencia növekszik, azaz a

spektrum szélesedik. Az egyes esetekben $\omega_s = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega_s = 400 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ és $\omega_s = 4000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.



10.2. ábra. A mintavételezett jel spektrumának meghatározása (10.4) alapján, egyre csökkenő mintavételi periódusidők mellett

A 7. fejezet ismeretében tudjuk, hogy a diszkrét idejű, valós értékű jel spektruma 2π szerint periodikus, amplitúdóspektruma páros, fázisspektruma pedig páratlan függvény. Azt is láttuk, hogy a spektrumot elegendő a $\vartheta \in [0, \dots, \pi]$ intervallumban ismerni, hiszen ennek ismeretében a spektrum tetszőleges ϑ körfrekvencián meghatározható. Ha most ϑ helyébe az ωT_s helyettesítést írjuk, akkor a mintavételezett jel spektruma az ωT_s változóban lesz 2π szerint periodikus és a mintavételezett valós értékű jel amplitúdóspektrumát és fázisspektrumát elegendő csak az $\omega T_s \in [0, \dots, \pi]$ intervallumban ismerni. Írjuk fel ezek alapján a periodicitás feltételét:

$$\omega T_s = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T_s}, \quad (10.5)$$

azaz a mintavételezett jel amplitúdóspektruma az ω változóban valóban $\frac{2\pi}{T_s}$ szerint periodikus, ami a T_s mintavételezési periódusidőhöz tartozó mintavételezési körfrekvencia, és ezért ω_s -sel jelöljük:

$$S_{MV}(j(\omega \pm n\omega_s)) = S_{MV}(j\omega), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10.6)$$

Pontosan ez az összefüggés látható a 10.2. ábrán is.

10.2.2. Kapcsolat a mintavételezett jel spektruma és a folytonos idejű jel spektruma között

Az utóbbi példában az $s(t)$ jelhez rendelt diszkrét idejű $s[k]$ jel ismeretében határoztuk meg a mintavételezett jel spektrumát. Sok esetben azonban csak az $s(t)$ jel $S(j\omega)$ spektruma ismert. Vizsgáljuk meg tehát azt, hogy milyen összefüggés van az eredeti folytonos idejű jel $S(j\omega)$ spektruma és a mintavételezett jel $S_{MV}(j\omega)$ spektruma között. Azt ugyanis már tudjuk, hogy a mintavételezett jel spektruma periodikus, de jó lenne olyan összefüggést találni, amely megadja $S_{MV}(j\omega)$ és $S(j\omega)$ kapcsolatát.

A levezetés során szükségünk lesz *két függvény szorzatának spektrumára*. Először ezt vezetjük be.

Két jel szorzatának spektruma. Ha ismert az $u(t)$ és a $v(t)$ jelek $U(j\omega)$ és $V(j\omega)$ spektruma, akkor a *két jel szorzatának spektruma* kifejezhető spektrumaik segítségével a következő frekvenciatarománybeli konvolúciós összefüggéssel:

$$\mathcal{F}\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\lambda)V(j[\omega - \lambda]) d\lambda = \frac{1}{2\pi} U(j\omega) * V(j\omega). \quad (10.7)$$

A bizonyítás érdekében képezzük a két jel szorzatának Fourier-transzformáltját:

$$\mathcal{F}\{u(t)v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) e^{-j\omega t} dt,$$

majd használjuk fel az $u(t)$ időfüggvényt előállító inverz Fourier-transzformáció formuláját a λ változó segítségével (ω már foglalt):

$$\mathcal{F}\{u(t)v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda \right) v(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Ha $v(t)$ Fourier-transzformálható (márpedig jelen alkalmazásban

az), akkor az integrálok sorrendje felcserélhető:

$$\mathcal{F}\{u(t)v(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j(\omega-\lambda)t} dt \right) d\lambda.$$

A belső integrál pedig pontosan a $V(j[\omega - \lambda])$ spektrum kifejezése, és így igazoltuk a tételt.

Térjünk most vissza eredeti célunkhoz, azaz próbáljunk összefüggést találni a $S(j\omega)$ és az $S_{MV}(j\omega)$ spektrumok között.

A mintavételezett folytonos idejű jelet a (10.3) alapján a következőképp írtuk fel:

$$s_{MV}(t) = \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) s[k] = \left(\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \right) s(t).$$

A zárójelben lévő kifejezés pontosan az egységnyi értékű, nem belépő jel mintavételezésének eredménye, jelöljük ezt $e_{MV}(t)$ -vel:

$$s_{MV}(t) = e_{MV}(t) s(t).$$

Használjuk fel a két jel szorzatának spektrumát adó tételt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s_{MV}(t)\} &= \mathcal{F}\{e_{MV}(t) s(t)\} = \frac{1}{2\pi} E_{MV}(j\omega) * S(j\omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{MV}(j\lambda) S(j[\omega - \lambda]) d\lambda. \end{aligned}$$

Ehhez azonban szükségünk van az $E_{MV}(j\omega)$ spektrumra. Vegyük figyelembe, hogy az $e_{MV}(t)$ jel folytonos idejű ugyan, de mintavételezett, spektruma pedig a diszkrét idejű, egységnyi értékű, nem belépő jel spektrumának ismeretében a (10.4) összefüggés felhasználásával határozható meg. Pontosán a mintavétel miatt nem alkalmazhatjuk a folytonos idejű, egységnyi értékű jel spektrumát. A diszkrét idejű, egyséni értékű jel spektrumát ismerjük:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - i 2\pi).$$

Ehhez (10.4) alapján a következő folytonos idejű, valós értékű spektrum rendelhető:

$$\begin{aligned} E_{\text{MV}}(j\omega) &= 2\pi\tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega T_s - i2\pi) = 2\pi\tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(T_s \left[\omega - i\frac{2\pi}{T_s}\right]\right) = \\ &= 2\pi\frac{\tau}{T_s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\omega_s). \end{aligned}$$

Utóbbi lépés a Dirac-impulzus $\delta(\alpha\omega) = \frac{1}{\alpha}\delta(\omega)$ ($\alpha > 0$) tulajdonságából következik. Helyettesítsük be a kapott eredményt a frekvenciatartománybeli konvolúciós összefüggésbe:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s_{\text{MV}}(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2\pi\frac{\tau}{T_s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - i\omega_s) \right) S(j[\omega - \lambda]) d\lambda = \\ &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - i\omega_s) S(j[\omega - \lambda]) d\lambda. \end{aligned}$$

Az integrálban szereplő Dirac-impulzus a $\lambda = i\omega_s$ hely kivételével mindenütt nulla, és az integrál pontosan az $S(j[\omega - i\omega_s])$ helyettesítési értéket adja, azaz

$$\boxed{S_{\text{MV}}(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} S(j[\omega - i\omega_s])}. \quad (10.8)$$

Ez az összefüggés a következőt jelenti. Az $s_{\text{MV}}(t)$ mintavételezett jel $S_{\text{MV}}(j\omega)$ spektruma előállítható az $s(t)$ jel $S(j\omega)$ spektrumának ismeretében úgy, hogy azt az $i\omega_s$ ($i = -\infty, \dots, \infty$) helyekre eltoljuk és a kapott összetevőket összegezzük. Az eltolás $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ közönként történik, ami pontosan a mintavételezési körfrekvenencia. Ez megegyezik a (10.6) összefüggéssel, és ezt láthatjuk a 10.2. ábrán is.

Az $i = 0$ indexhez tartozó spektrum az un. *főeloszlás*, az összes többi az oldalsávokban elhelyezkedő un. *járulékos eloszlás*.

A (10.8) összefüggés csak akkor érvényes, ha a jel mindenhol folytonos, azaz sehol nincs ugrása. Ha a belépő $s(t)$ jelnek csak a $t = 0$ időpillanatban van ugrása, akkor az összefüggés a következőképp módosul (ezt itt nem bizonyítjuk):

$$S_{MV}(j\omega) = \frac{s(0)\tau}{2} + \frac{\tau}{T_s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} S[j\omega - i\omega_s], \quad (10.9)$$

ahol a $t = 0$ időpillanat természetesen a $t = +0$ -t jelenti.

Példa. Határozzuk meg az $s(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ jel mintavételezésével kapott jel spektrumát $S(j\omega)$ és az (10.9) összefüggés alapján.

Megoldás. A jel spektrumát már ismerjük:

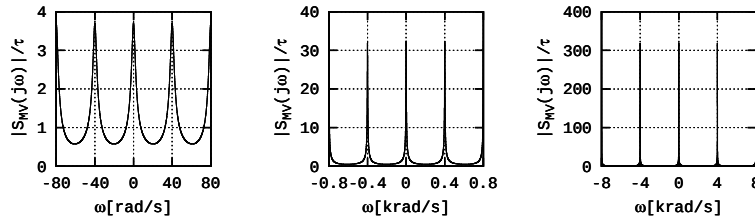
$$S(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Helyettesítsük ezt az (10.9) összefüggésbe $\frac{s(+0)}{2} = \frac{1}{2}$:

$$S_{MV}(j\omega) = \frac{1}{2}\tau + \frac{\tau}{T_s} \left[\dots + \frac{1}{\alpha + j(\omega + 2\omega_s)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega + \omega_s)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_s)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega - 2\omega_s)} + \dots \right].$$

Az $|S_{MV}(j\omega)|/\tau$ amplitúdóspektruma látható a 10.3. ábrán a 357. oldalon található példában is szereplő mintavételi periódusidőkre.³ A végtelen tagú összegben elegendő csak pár ta-

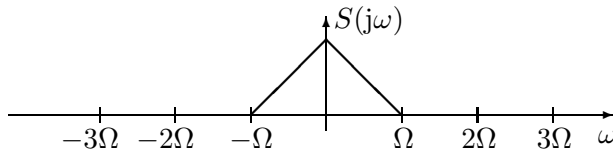
³Fontos megjegyezni, hogy az összegzés a spektrumra, és nem az amplitúdóspektrumra vonatkozik. Az eredőként kapott spektrum abszolút értéke tehát nem egyenlő az egyes amplitúdóspektrumok összegével, azt ugyanis az összeadások elvégzése után kell képezni. A fázisspektrumra természetesen ugyanez vonatkozik.



10.3. ábra. A mintavételezett jel spektrumának alakulása a (10.9) összefüggés alapján az $i = -10, \dots, 10$ tagokat figyelembevéve

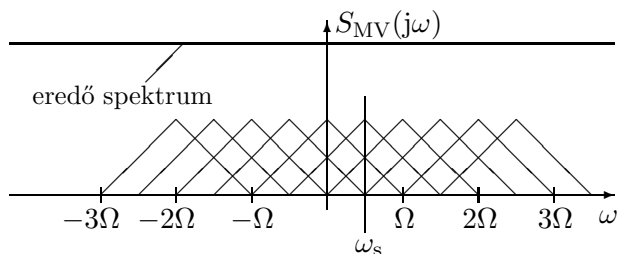
got szimmetrikusan figyelembe venni, amely tagok az ábrán egy-egy csúcshoz felelnek meg. Az eredmények természetesen megegyeznek a 10.2. ábrán felrajzoltakkal.

Vizsgáljuk meg most ezen összeg képzését a következő valós értékű és Ω sávkorlátú $S(j\omega)$ spektrumon:⁴

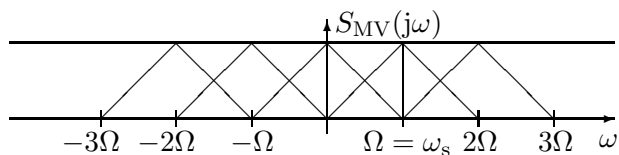


Az itt elmondottak általánosan is igazak. A következő ábrán (ahogy a 10.3. ábra első ábráján is) a mintavételi periódusidő túlságosan nagy, azaz a mintavételi körfrekvencia túlságosan kicsi, következésképp az (10.8) összefüggésben szereplő spektrumok közel esnek a szomszédos tagokhoz és egymásra hatást gyakorolnak, *átlapolódnak*. Ez az ún. *aliasing*:

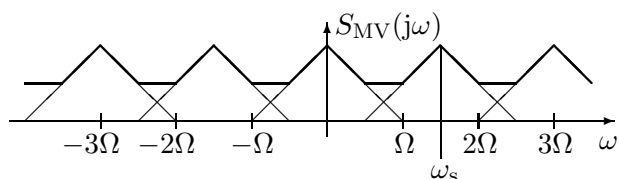
⁴A fenti példában szereplő spektrum nem valós, pontosan ezért nem lehet egyszerűen összeadni az egyes tagok amplitúdóspektrumát. Pl. az $s(t) = e^{-\alpha|t|}$ jel spektruma valós.



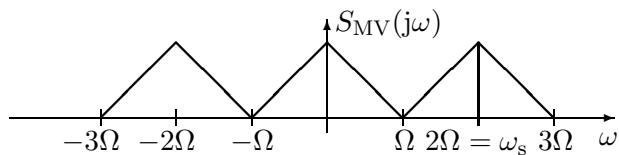
Ekkor tehát kevés számú mintát veszünk a jelből. Ha ezen spektrumokat távolabbra helyezzük egymástól, azaz csökkentjük a mintavételi periódusidőt (növeljük a mintavételezés körfrekvenciáját), akkor egyre kisebb mértékben lapolódnak át a szomszédos spektrumok, hiszen a csúcsok távolabbra kerülnek egymástól:



és



Az 10.3. ábrán is ez a tendencia figyelhető meg. Ha a jel spektruma egy bizonyos Ω körfrekvencia felett nullának tekinthető (sávkorlátozott jel, ahogy ezen illusztrációban is), és a mintavételezés körfrekvenciája ennek legalább kétszerese, akkor a szomszédos spektrumok egyáltalán nem gyakorolnak hatást egymásra:



Tovább növelve a mintavételi körfrekvenciát, az egyes spektrumok egyre távolabb kerülnek egymástól, s még csak nem is érintkeznek. Ezt fogalmazza meg az utóbbi ábráról is leolvasható tétel. A Shannon-féle mintavételezési tétel kimondja, hogy ha az ω_s mintavételezési körfrekvencia legalább a sávkorlát kétszerese, akkor a (10.8) összegben szereplő spektrumok az $\omega \leq \Omega$ intervallumban nem lapolódnak át, azaz ebben az intervallumban elegendő egyetlen tagot figyelembe venni ($i = 0$):⁵

$$S_{MV}(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} S(j\omega), \quad \text{ha } \omega \leq \frac{\omega_s}{2}, \quad (10.10)$$

ahonnan $S(j\omega)$ rekonstruálható:

$$S(j\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{\tau} S_{MV}(j\omega), & \text{ha } \omega < \Omega \leq \frac{\omega_s}{2}; \\ 0, & \text{ha } \omega > \Omega, \end{cases} \quad (10.11)$$

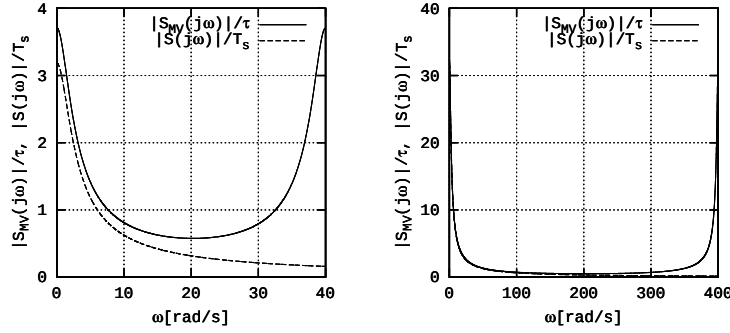
ha

$$\omega_s \geq 2\Omega \quad \Rightarrow \quad \Omega \leq \frac{\omega_s}{2} \quad \Rightarrow \quad T_s \leq \frac{\pi}{\Omega} \quad \Rightarrow \quad f_s \geq \frac{\Omega}{\pi}. \quad (10.12)$$

Ezt a frekvenciát *Nyquist-frekvenciának* is szokták nevezni és f_N -nel jelölni.

Példa. Az eddig is vizsgált példánál maradva, vázoljuk fel az $i = 0$ indexhez tartozó $S(j\omega)/T_s$ spektrum abszolút értékét és a mintavételezett jel $|S_{MV}(j\omega)|/\tau$ amplitúdóspektrumát a $T_s = \frac{\pi}{20}$ s és a $T_s = \frac{\pi}{200}$ s mintavételi periódusidők mellett ($\omega_s = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ és $\omega_s = 400 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$) a (10.10) összefüggés illusztrálása céljából. Az eredmények a 10.4. ábrán láthatók. Látható, hogy az $\omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ körfrekvenciákon a mintavételezett jel spektruma és az eredeti jel spektruma (itt jó közelítéssel) akkor egyezik meg, ha a mintavételezési tételben rögzített feltételeket betartjuk. Az első ábrán

⁵Nem sávkorlátozott jelek esetében ez csak közelítőleg érvényes.



10.4. ábra. A mintavételezett jel spektruma és az eredeti jel spektruma az $\omega \leq \omega_s$ intervallumban

ugyanis az egyes spektrumok átlapolódásának eredményeképp az $|S_{MV}(j\omega)|/\tau$ amplitúdóspektrum nagyobb, mint az eredeti jel amplitúdóspektruma, a második ábrán azonban ezek jó közelítéssel megegyeznek az $\omega \leq \frac{\omega_s}{2} = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ intervallumban, annak ellenére, hogy az $\varepsilon(t)e^{-\alpha t}$ jel nem sávkorlátozott.

Ezen mintavételezési tételt kihasználjuk a jel visszaállítása, vagy másnéven rekonstrukciója során.

10.3. Mintavételezett jel rekonstrukciója

A rekonstrukció célja, hogy előállítsuk az ismeretlen $y(t)$ jel egy $\hat{y}(t)$ közelítését az ismeretlen $y(t)$ jel ismert $y[k]$ mintáira, vagy az $y_{MV}(t)$ mintavételezett jelre támaszkodva. Erre két alapvető módszert mutatunk be. Az ismeretlen $y(t)$ jel lehet pl. egy mintavételezett jellel gerjesztett rendszer kimeneti jele.

10.3.1. Nulladrendű tartószerv

A nulladrendű tartószerv az $y[k] = y(kT_s)$ minták között szakaszonként állandó (nulladrendű) értékkel közelíti az $y(t)$ jelet. Az

eredmény tehát egy lépcsős görbe:

$$\hat{y}(t) = y_0(t) = y(kT_s), \quad \text{ha} \quad kT_s \leq t < (k+1)T_s. \quad (10.13)$$

A közelítő jelet egy adott intervallumban tehát a legközelebb eső bal oldali minta értéke adja (nulladrendű extrapoláció). A rekonstrukció hibája akkor kicsi, ha maga a visszaállítandó $y(t)$ jel is közel konstans értékű, vagy legalábbis kis mértékben változik. A mintavételi időpillanatokban a rekonstrukció azonban pontos: $y_0(kT_s) = y(kT_s)$. Értelemszerű tehát, hogy pl. az $\varepsilon(t)$ jelet a nulladrendű tartó hibátlanul rekonstruálja.

A nulladrendű tartószerv egy Dirac-impulzusra tehát egy T_s szélességű impulzussal felel. A mintavételezés hatására a jelben megjelenik egy τ szorzótényező, amit azonban ki kell ejteni a rekonstrukció során. Ezt egy $\frac{1}{\tau}$ konstanssal lehet megtenni. A nulladrendű tartószerv impulzusválasza így a következő:

$$w_0(t) = \frac{1}{\tau} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_s)]. \quad (10.14)$$

Ezen szerv tehát a $\tau \delta(t)$ jelre egy T_s szélességű és egységnyi magasságú impulzussal válaszol. A nulladrendű tartószerv átviteli karakterisztikája az eddigi ismeretek alapján felírható:⁶

$$W_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_s}}{j\omega\tau} \stackrel{(1)}{=} \frac{T_s e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}}{\tau} \frac{e^{j\omega \frac{T_s}{2}} - e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}}{2j\omega \frac{T_s}{2}} = \stackrel{(2)}{=} \frac{T_s}{\tau} \frac{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}{\frac{\omega T_s}{2}} e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}, \quad (10.15)$$

átviteli függvénye pedig a következő:

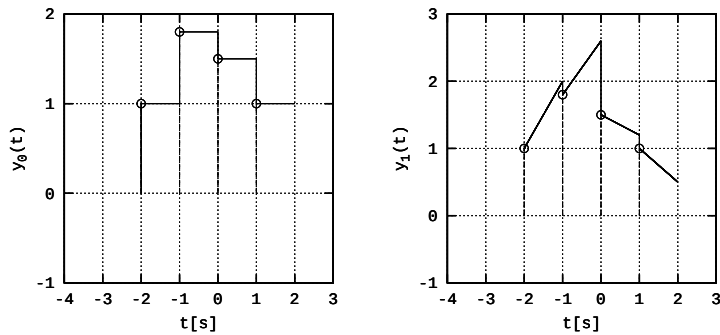
$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s\tau}. \quad (10.16)$$

⁶Az (1) lépésben emeljünk ki a számlálóból $e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}$ -t, a nevezőbe pedig csempésszünk be egy T_s tényezőt és egy 2-es szorzót. Ezen átalakításokra a (2) lépésben alkalmazott Euler-formula miatt van szükség.

Az átviteli függvény nem polinom per polinom alakú racionális kifejezés, ezért a nulladrendű tartószerv nem valósítható meg, csak közelítőleg.

Példa. Legyen egy egyszerű mintavételezett jelsorozat a következő: $y[-2] = 1$, $y[-1] = 1,8$, $y[0] = 1,5$, $y[1] = 1$ és $T_s = 1$ s. Vizsgáljuk meg a nulladrendű tartó kimenetét ezen bemeneti jelsorozatra.

Megoldás. A lépcsős megoldás a 10.5. első ábráján látható. A



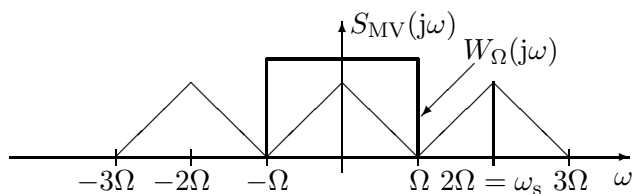
10.5. ábra. A nulladrendű és az elsőrendű tartó által rekonstruált jel

másik ábrán a ritkán használt elsőrendű tartó által rekonstruált, szakaszonként lineáris jel látható. Fontos megjegyezni, hogy ezen tartószerv a $t \in [t_k, t_{k+1}]$ időpillanatbeli értékeket a $k - 1$ -edik és a k -edik mintákra támaszkodó egyenessel közelíti, ahogy az az ábrán is látható, de a mintavételi időpontokban pontos. Például a $t \in [-1, 0]$ időpillanatokban rajzolt egyenes a megelőző intervallum két végpontja, azaz az 1 és az 1,8 értékek által meghatározott egyenes. Ez azért fontos, mert ezen intervallumban az 1,5 még nem ismert érték. A tartó hibája akkor kicsi, ha a jel közel lineárisan változik. Maximumok és minimumok környe-

zetében azonban kifejezetten rossz rekonstrukciót realizál, ahogy az 1,8 érték környékén is látható. Az elsőrendű tartó pl. az $\varepsilon(t)t$ jelet hibátlanul rekonstruálja.

10.3.2. Aluláteresztő szűrő

Ha egy Ω sávkorlátú sávkorlátozott jelet legalább $\omega_s = 2\Omega$ mintavételi körfrekvenciával mintavételezünk, akkor az eredeti jel spektruma az $\omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ intervallumban előállítható a mintavételezett jel spektrumából a (10.11) összefüggés segítségével. Az (10.8) összefüggésnek megfelelő $S_{MV}(j\omega)$ eredő spektrumból kézenfekvő megoldás lehet az $\omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ intervallum megtartása és az $\omega > \frac{\omega_s}{2}$ intervallum elnyomása, azaz a spektrum alkalmas karakterisztikával történő beszorzása a következőképp:



Mindez a következő átviteli karakterisztikával bíró aluláteresztő szűrő alkalmazását jelenti:

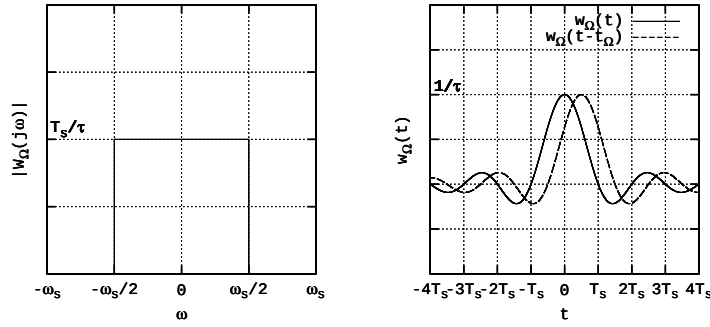
$$W_\Omega(j\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{\tau}, & \text{ha } |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}; \\ 0, & \text{ha } |\omega| > \frac{\omega_s}{2}, \end{cases} \quad (10.17)$$

melynek segítségével $S(j\omega)$ előállítható az $|\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}$ intervallumban az $S(j\omega) = W_\Omega(j\omega) S_{MV}(j\omega)$ szerint. A szűrő impulzusválasza az átviteli karakterisztika inverz Fourier-transzfor-

málásával határozható meg:⁷

$$\begin{aligned}
 w_{\Omega}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{W_{\Omega}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} \frac{T_s}{\tau} e^{j\omega t} d\omega \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{T_s}{\tau} \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt} \right]_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} = \\
 &= \frac{2}{2\pi} \frac{T_s}{\tau} \frac{e^{j\frac{\omega_s}{2}t} - e^{-j\frac{\omega_s}{2}t}}{2jt} \stackrel{(2)}{=} \frac{T_s}{\tau} \frac{\sin \frac{\omega_s t}{2}}{\pi t} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\tau} \frac{\sin \frac{\pi t}{T_s}}{\frac{\pi t}{T_s}}.
 \end{aligned}$$

A kapott impulzusválaszban nem szerepel az $\varepsilon(t)$ függvény, azaz az aluláteresztő szűrő impulzusválasza nem belépő jel, és a $t < 0$ időpillanatokban nullától különböző értékeket vesz fel. Ez a rendszer nem kauzális, hiszen az impulzusválasz már akkor is értéket ad, amikor a $\delta(t)$ gerjesztés még be sem lép (l. 10.6. ábra). Az ilyen rendszer nem megvalósítható, csak közelítőleg. Ezért ezt *ideális aluláteresztő szűrő*nek is nevezik.



10.6. ábra. Az ideális aluláteresztő szűrő amplitúdókarakterisztikája és impulzusválasza

Ha az ideális aluláteresztő szűrő alakhú jelátvitelt biztosít az áteresztő sávban, akkor karakterisztikája általánosan a következő

⁷Az (1) lépésben meghatározzuk az integrandusz primitív függvényét. Itt arra kell vigyáznunk, hogy az integrálás az ω változó szerint történik. A (2) lépésben pedig alkalmazzuk az Euler-formulát, majd a (3) lépésben az $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ összefüggést.

alakot ölti:

$$W_{\Omega,1}(j\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{\tau} e^{-j\omega t_\Omega}, & \text{ha } |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}; \\ 0, & \text{ha } |\omega| > \frac{\omega_s}{2}, \end{cases} \quad (10.18)$$

amelynek a Fourier-transzformáció eltolási tétele értelmében a következő impulzusválasz felel meg (a 10.6. ábrán ezt az időfüggvényt is feltüntettük):

$$w_{\Omega,1}(t) = w_\Omega(t - t_\Omega) = \frac{1}{\tau} \frac{\sin \frac{\pi(t-t_\Omega)}{T_s}}{\frac{\pi(t-t_\Omega)}{T_s}}. \quad (10.19)$$

A 10.6. ábrán is látható, de a $\sin \frac{\pi t}{T_s} = 0$ egyenletből is meghatározható, hogy az impulzusválasz nullhelyei a $\frac{\pi t}{T_s} = k\pi$ egyenletnek megfelelően a $t = kT_s$ helyeken van. Ennek –ahogy látni fogjuk– nagyon fontos szerepe van a jelvisszaállításban. A fáziskésést is realizáló aluláteresztő szűrő nullhelyei pedig a $t = kT_s - t_\Omega$ időpillanatokban vannak.

Ha ezen ideális aluláteresztő szűrő bemenete az $y_{MV}(t)$ mintavételezett jel és impulzusválasza $w_\Omega(t)$, akkor $y_\Omega(t)$ kimenete a konvolúciós integrállal meghatározható (az integrálás τ helyett ξ szerint végezzük, mert τ itt a mintavételező szerv bekapcsolási idejét jelöli):

$$\begin{aligned} y_\Omega(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_{MV}(\xi) w_\Omega(t - \xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - kT_s) y[k]}_{y_{MV}(\xi)} \underbrace{\frac{1}{\tau} \frac{\sin \frac{\pi(t-\xi)}{T_s}}{\frac{\pi(t-\xi)}{T_s}}}_{w_\Omega(t-\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Az integrálban τ -val lehet egyszerűsíteni. Az összegzés és az integrálás pedig megcserélhető, mivel az összeget tagonként is in-

tegrálhatjuk:

$$y_{\Omega}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - kT_s) \frac{\sin \frac{\pi(t-\xi)}{T_s}}{\frac{\pi(t-\xi)}{T_s}} d\xi.$$

Az integrál az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) f(\tau) d\tau = f(t)$$

összefüggés alapján a $\xi = kT_s$ helyettesítéssel a következő összefüggést adja:

$$y_{\Omega}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T_s} - k \right)}{\pi \left(\frac{t}{T_s} - k \right)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_s) \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T_s} - k \right)}{\pi \left(\frac{t}{T_s} - k \right)}. \quad (10.20)$$

Ez az összefüggés azt jelenti, hogy a szűrő kimenetén megjelenő folytonos $y_{\Omega}(t)$ jel úgy áll elő, hogy a k ütemekben, azaz a kT_s időpillanatokban az ismert $y[k]$ értékével súlyozott $\frac{\sin x}{x}$ jellegű függvényeket helyezünk, majd ezeket összeadjuk.

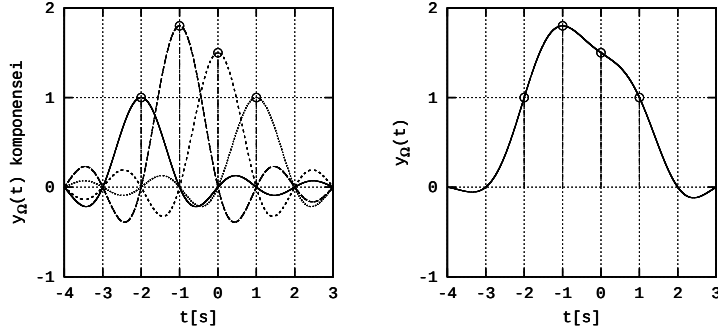
Ha figyelembe vesszük a t_{Ω} eltolást, akkor a következő jelet kapjuk az aluláteresztő szűrő kimenetén:

$$y_{\Omega,1}(t) = y_{\Omega}(t - t_{\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_s) \frac{\sin \pi \left(\frac{t-t_{\Omega}}{T_s} - k \right)}{\pi \left(\frac{t-t_{\Omega}}{T_s} - k \right)}. \quad (10.21)$$

Ez az összefüggés ugyanazt jelenti, mint az előző, azzal a különbséggel, hogy a $\frac{\sin x}{x}$ jellegű függvények t_{Ω} értékkel jobbra tolódnak, azaz késnek.

Példa. Legyen egy egyszerű mintavételezett jelsorozat a következő: $y[-2] = 1$, $y[-1] = 1,8$, $y[0] = 1,5$, $y[1] = 1$ és $T_s = 1$ s. Vizsgáljuk meg az aluláteresztő szűrő kimenetét ezen bemeneti jelsorozatra.

Megoldás. A megoldás a 10.7. ábrán látható. Az egyes komponensek láthatók az első ábrán. Ezek a kT_s időpillanatokba eltoltt $y(kT_s) = y[k]$ magasságú $\frac{\sin x}{x}$ jellegű tagok. Az is jól látható, hogy a k -adik komponens az lT_s ($l \neq k$) ütemekben nulla értéket ad, azaz a k -adik mintavételezési időpillanatban csak a k -adik minta értéke adódik, következésképp a kimenet a mintavételezési időpillanatokban pontos. Ezen komponensek összege adja a második ábrán látható jelet, amely a bejelölt mintavételezési időpillanatokban valóban pontos.



10.7. ábra. A szűrő kimeneti jelét felépítő komponensek és az $y_Ω(t)$ kimeneti jele

Ha figyelembe vesszük a fáziskésést is, akkor a kimeneti jel alakja pontosan ugyanez, csak épp $t_Ω$ értékkel késik.

Ebben az esetben ismertnek tételeztük a rendszer kimeneti jelének diszkrét idejű időfüggvényét, amit aztán rekonstrukciónak vetettünk alá. Ezt a diszkrét idejű jel spektrumából is meghatározhatjuk:

$$y[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_s}}^{\frac{\pi}{T_s}} Y(e^{j\omega T_s}) e^{j\omega T_s k} d\omega..$$

Itt alkalmaztuk a $\vartheta = \omega T_s$ helyettesítést, azaz $d\vartheta = d\omega T_s$. Az integrálási határok az $\omega = \frac{\vartheta}{T_s}$ -nek megfelelően változnak.

11. fejezet

Diszkrét idejű szimuláció

Folytonos idejű, lineáris, invariáns és kauzális rendszerek diszkrét idejű szimulációjának célja, hogy a konstruált diszkrét idejű szimulátor viselkedése minél jobban megközelítse a folytonos idejű rendszer viselkedését. A szimulátor $s[k]$ diszkrét idejű gerjesztése a folytonos idejű rendszer $s(t)$ gerjesztéséből T_s mintavételi időközönként vett $s(kT_s)$ mintáit jelenti. A szimuláció célja, hogy a szimulátor ezen $s[k]$ gerjesztésre adott $y[k]$ diszkrét idejű válasza minél jobban megközelítse a folytonos idejű rendszer $y(t)$ válaszából T_s mintavételi időközönként vett $y(kT_s)$ mintáit. Az előző fejezetben láttuk, hogy a T_s mintavételezési periódusidő megválasztása kulcskérdés a mintavételezési folyamatok során.

Ideálisnak nevezzük a szimulátort, ha a diszkrét idejű válasz pontosan a folytonos idejű válasz mintáit jelenti, azaz $y[k] = y(kT_s)$. Amint azt látni fogjuk, ilyen azonban csak közelítőleg létezik.

Ebben a fejezetben a folytonos idejű rendszert jellemző impulzusválasz és átviteli függvény szimulációjával foglalkozunk. Az elmondottakat ugyanazon példával illusztráljuk, s látni fogjuk, hogy a két módszer különböző szimulátorra vezet, melyek kimenete azonban jól követi a folytonos idejű rendszer kimenetét.

11.1. Az impulzusválasz szimulációja

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns és kauzális rendszer belépő gerjesztésre adott belépő válasza meghatározható a rendszer impulzusválaszának segítségével a konvolúció alapján:

$$y(t) = \int_{-0}^t s(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_{-0}^t w(\tau)s(t-\tau)d\tau. \quad (11.1)$$

A levezetés során a második alakot fogjuk használni. Mivel a folytonos idejű rendszert diszkrét idejű rendszerrel akarjuk szimulálni, ezért a fenti alakot a következő diszkrét idejű konvolúció alakjára kívánjuk hozni:

$$y[k] = \sum_{i=0}^k s[i]w[k-i] = \sum_{i=0}^k w[i]s[k-i]. \quad (11.2)$$

Láttuk, hogy az általunk vizsgált folytonos idejű rendszerek impulzusválasza általánosan egy konstanssal szorzott Dirac-impulzust és egy belépő függvényt tartalmaz:

$$w(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)f(t),$$

ahol $f(t)$ egy folytonos függvény és D értéke természetesen lehet nulla. Feltesszük még, hogy $s(t)$ nem tartalmaz Dirac-impulzust. Helyettesítsük vissza ezen alakot a konvolúció kifejezésébe:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-0}^t [D\delta(\tau) + \varepsilon(\tau)f(\tau)] s(t-\tau)d\tau = \\ &= D \int_{-0}^t \delta(\tau)s(t-\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)s(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

A második integrál alsó integrálási határa azért 0, mert az $s(t)$ gerjesztés nem tartalmaz Dirac-impulzust. Az első integrál kiértékelhető, hiszen az $s(t-\tau)$ tagban a τ helyébe 0-t írva $s(t)$ kie-

melhető (t és így $s(t)$ is az integrálás szempontjából konstans) és így ennek értéke $Ds(t)$.¹

Annak érdekében, hogy a folytonos idejű leírásból áttérhessünk a diszkrét idejű leírásba, vegyük a t -ben folytonos idejű jelek mintáit a kT_s időpillanatokban ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$y(kT_s) = Ds(kT_s) + \int_0^{kT_s} f(\tau)s(kT_s - \tau)d\tau,$$

azaz

$$y(kT_s) = \begin{cases} Ds(0), & k = 0; \\ Ds(kT_s) + \int_0^{kT_s} f(\tau)s(kT_s - \tau)d\tau, & k > 0. \end{cases}$$

Az integrált közelítsük téglányösszeggel a következőképp:

$$y(kT_s) \simeq \begin{cases} Ds(0), & k = 0; \\ Ds(kT_s) + \sum_{i=1}^k f(iT_s)s(kT_s - iT_s)T_s, & k > 0. \end{cases}$$

Ha a $t = kT_s$ és $t = iT_s$ folytonos idejű időpillanatokot diszkrét idejű időpillanatokra, azaz ütemekre írjuk át, akkor kapjuk a diszkrét idejű szimulátor által adott válaszjel diszkrét mintáit:

$$y[k] = \begin{cases} Ds[0], & k = 0; \\ Ds[k] + T_s \sum_{i=1}^k f[i]s[k - i], & k > 0. \end{cases}$$

A $Ds[k]$ tag a $Ds(t)$ jel mintáit jelenti. Az erre adott válasz pedig a $D\delta(t)$ impulzusválasszal számolt válasz mintái, tehát ennek $D\delta[k]$ impulzusválasz felel meg. A második tag pedig a diszkrét idejű konvolúció, csak az összegzés $i = 1$ -től megy, ami egy eltolásnak feleltethető meg. Összegezve tehát a $w(t)$ folytonos idejű impulzusválaszhoz az alábbi módon rendelhetünk $w[k]$ diszkrét idejű impulzusválaszt:

$$\boxed{w(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)f(t) \Rightarrow w[k] = D\delta[k] + T_s\varepsilon[k - 1]f(kT_s).} \quad (11.3)$$

¹ $D \int_{-0}^t \delta(\tau)s(t - \tau)d\tau = D \int_{-0}^t \delta(\tau)s(t)d\tau = Ds(t) \int_{-0}^t \delta(\tau)d\tau = Ds(t).$

Fontos megjegyezni, hogy a stabil folytonos idejű impulzusválaszhoz rendelt diszkrét idejű impulzusválasz is stabil rendszert jellemez. A szimulátor kimenetének számítása során tartsuk szem előtt, hogy a k -adik ütemhez a $t = kT_s$ időpillanat tartozik, azaz $y[k] = y(kT_s)$. Ugyanez igaz a gerjesztésre is, azaz $s[k] = s(kT_s)$. Ha a jel szakadást tartalmaz, akkor a jobb oldali határértéket szokás a minta értékének választani, azaz $s[k] = s(kT_s + 0)$ és $y[k] = y(kT_s + 0)$. A közelítés annál pontosabb, minél kisebb T_s értéke. Az elmondottakat a következő példával illusztráljuk.

Példa. Határozzuk meg az impulzusválaszával adott folytonos idejű rendszer diszkrét idejű szimulátorának impulzusválaszát és a rendszer szimulátorával számított válaszjelét ha $T_s = 0,02$ s.²

$$w(t) = 3\varepsilon(t)e^{-2t}, \quad s(t) = \varepsilon(t)e^{-5t}.$$

Megoldás. Határozzuk meg először a folytonos idejű rendszer válaszjelének időfüggvényét Laplace-transzformációval (így kaphatunk leggyorsabban és legegyszerűbben eredményt):

$$Y(s) = \frac{3}{s+2} \frac{1}{s+5} = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+5},$$

amelyhez a következő időfüggvény tartozik:

$$y(t) = \varepsilon(t) (e^{-2t} - e^{-5t}).$$

Határozzuk meg ezután a diszkrét idejű szimulátor impulzusválaszát (11.3) alapján:

$$w[k] = 3T_s \varepsilon[k-1]e^{-2kT_s} = 0,06\varepsilon[k-1]e^{-0,04k},$$

amit azonban tovább kell alakítanunk, hogy z-transzformálhassuk:

$$\begin{aligned} w[k] &= 0,06\varepsilon[k-1]e^{-0,04(k-1+1)} = 0,06\varepsilon[k-1]e^{-0,04(k-1)}e^{-0,04} = \\ &= 0,0576\varepsilon[k-1](e^{-0,04})^{k-1} = 0,0576\varepsilon[k-1]0,961^{k-1}, \end{aligned}$$

²Ez a mintavételezési idő a kisebb időállandó század része.

amelynek z-transzformáltja a szimulátor átviteli függvénye:

$$W(z) = 0,0576 \frac{z}{z - 0,961} z^{-1}.$$

A válaszjel z-transzformáltjának kifejezéséhez z-transzformálnunk kell az $s(t)$ jel mintáiból képzett diszkrét idejű jelet is:

$$\begin{aligned} s(t) = \varepsilon(t)e^{-5t} \quad \Rightarrow \quad s[k] &= \varepsilon[k]e^{-5kT_s} = \varepsilon[k]e^{-0,1k} = \\ &= \varepsilon[k](e^{-0,1})^k = \varepsilon[k]0,905^k, \end{aligned}$$

azaz

$$S(z) = \frac{z}{z - 0,905}.$$

A szimulátor válaszána z-transzformáltja tehát a következő:

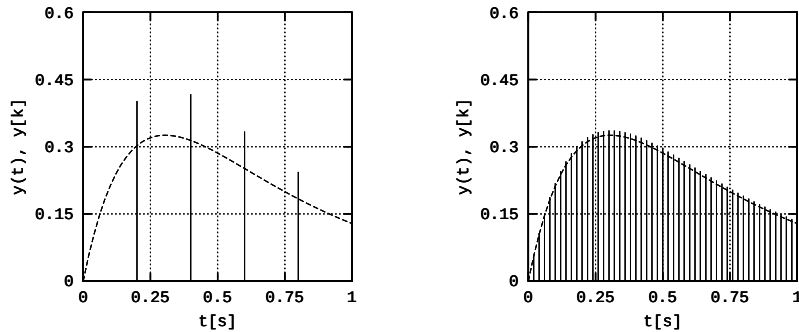
$$\begin{aligned} Y(z) &= 0,0576 \frac{z}{z - 0,961} z^{-1} \frac{z}{z - 0,905} = \\ &= 0,0576z \left(\frac{17,857}{z - 0,961} + \frac{-17,857}{z - 0,905} \right), \end{aligned}$$

amelyhez a következő diszkrét idejű időfüggvény rendelhető:

$$y[k] = 1,029\varepsilon[k] \left(0,961^k - 0,905^k \right).$$

Hasonlítsuk össze a kapott folytonos idejű válaszjelet és a diszkrét idejű szimulátorral kapott válaszjelet (11.1. ábra). A T_s értékétől való függés érzékeltetése érdekében ábrázoltuk a $T_s = 0,2$ s-hoz tartozó szimulált válaszjelet is, amely nyilván jobban eltér a valódi időfüggvénytől.³ Az ábrán látható, hogy a szimulátor kimeneti jele kicsit nagyobb, mint a valódi válaszjel. Megjegyezzük, hogy pontosabb közelítő integrálással (pl. trapézsabály) még pontosabb eredmény kapható.

³Ebben az esetben a szimulátor kiemelésének időfüggvénye: $y[k] = 1,331\varepsilon[k] (0,67^k - 0,368^k)$. Gyakorlásképp érdemes ezt is kiszámolni.



11.1. ábra. A valódi válaszcél és szimulált válaszcél összehasonlítása $T_s = 0,2\text{ s}$ és $T_s = 0,02\text{ s}$ esetekre

11.2. Az átviteli függvény szimulációja

Ha adott egy folytonos idejű rendszer $W(s)$ átviteli függvénye és keressük az ezen rendszert szimuláló diszkrét idejű rendszer $W(z)$ átviteli függvényét, akkor a levezetés mellőzésével a következő ún. *bilineáris transzformációt* alkalmazhatjuk:

$$W(z) = W(s) \Big|_{s=\frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}}, \quad (11.4)$$

azaz a folytonos idejű rendszer átviteli függvényében minden s helyébe $s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$ -et kell helyettesíteni. Ez a *Tustin-képlet*nek is nevezett transzformáció ugyanis biztosítja, hogy a stabil folytonos idejű rendszerhez stabil diszkrét idejű rendszer tartozzék, azaz az s komplex számsík bal félsíkját a z komplex számsíkon az egységsugarú kör belsejébe, a jobb félsíkot pedig azon kívülre transzformálja. A formula igazolására a következő alfejezetben visszatérünk.

Példa. Határozzuk meg az előző feladatban vizsgált folytonos idejű rendszer átviteli függvényéhez rendelhető diszkrét idejű át-

viteli függvényt és határozzuk meg ezen szimulátor kimenetének időfüggvényét, ha a gerjesztés ugyanaz és $T_s = 0,02$ s.

Megoldás. A folytonos idejű rendszer átviteli függvényében szereplő s helyébe tehát $s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$ -t kell helyettesíteni:

$$W(z) = \frac{3}{\frac{2}{0,02} \frac{z-1}{z+1} + 2} = 0,029 \frac{z+1}{z-0,96}.$$

Határozzuk meg ezután a szimulátor válaszjelének z -transzformáltját:

$$Y(z) = 0,029 \frac{z+1}{z-0,96} \frac{z}{z-0,905} = 0,029 \left(\frac{35,636z}{z-0,96} + \frac{-34,636z}{z-0,905} \right),$$

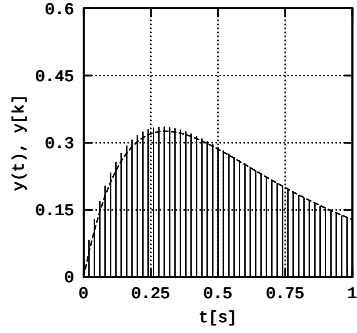
azaz

$$y[k] = \varepsilon[k] \left(1,033 \cdot 0,96^k - 1,004 \cdot 0,905^k \right).$$

Ezen időfüggvény nem egyezik meg pontosan az előző feladatban számítottal, azonban ha felrajzoljuk, láthatjuk, hogy majdnem ugyanazon eredményt kapjuk (11.2. ábra). A kicsi eltérés oka az, hogy különböző módon tértünk át a folytonos idejű rendszerről a diszkrét idejű rendszerre. Ez a szimulátor pl. jobban közelíti a folytonos idejű jelet a $t > 0,5$ s időpillanatokban, de a $t = 0$ időpillanatban, azaz a $k = 0$ ütemben egyik szimulátor sem adja a helyes 0 eredményt.

11.3. Differenciáló és integráló operátorok mintavételes közelítése

Végül bemutatjuk milyen diszkrét idejű rendszerrel és hálózattal lehet megvalósítani a deriválást és integrálást végző eszközöket. Segítségükkel a folytonos idejű rendszereket leíró differenciálegyenletek átírhatók diszkrét idejű differenciaegyenletekké. A bemeneti jel az $s(t)$ időfüggvény, a kimenet pedig ennek deriváltja, vagy határozott integrálja, amit $y(t)$ -vel jelölünk.



11.2. ábra. A valódi válaszjel és szimulált válaszjel összehasonlítása

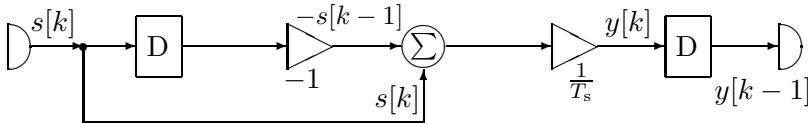
Ábrákon a meghatározott rendszeregyenletek által leírt rendszerek *hálózattal történő realizációját* is bemutatjuk.

Előretartó differenciaséma. Az előretartó differenciaséma a következő differenciahányadossal közelíti a deriváltat:

$$y(t) = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow y(t) \simeq \frac{s(t + T_s) - s(t)}{T_s}, \quad (11.5)$$

azaz a görbe meredekségét két szomszédos mintára támaszkodva közelíti. Írjuk át ezen közelítést $t = kT_s$ helyettesítéssel diszkrét időbe, és írjuk fel a rendszeregyenletet:⁴

$$y[k] = \frac{s[k+1] - s[k]}{T_s} \Rightarrow y[k-1] = \frac{1}{T_s}s[k] - \frac{1}{T_s}s[k-1].$$



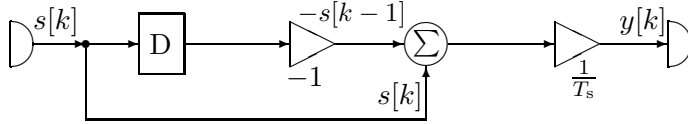
⁴A rendszeregyenletben csak a k -adik és a megelőző ütembeli értékek szerepelhetnek, $k+1$ pedig nem. Ezért el kell tolni az egyenletet.

Hátratarató differenciaséma. A hátratarató differenciaséma a megelőző mintára támaszkodva képezi a differenciahányadost:

$$y(t) = \frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow y(t) \simeq \frac{s(t) - s(t - T_s)}{T_s}. \quad (11.6)$$

Az ennek megfelelő diszkrét idejű összefüggés és a rendszeregyenlet a következő:

$$y[k] = \frac{s[k] - s[k-1]}{T_s} \Rightarrow y[k] = \frac{1}{T_s} s[k] - \frac{1}{T_s} s[k-1].$$

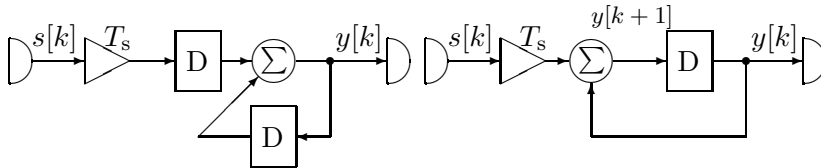


Bal oldali téglalapszabály. A határozott integrált T_s szélességű elemi területek összegeként állítja elő, és a megelőző mintára támaszkodik:

$$y(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau \Rightarrow y(t) \simeq \sum_{k=0}^{n-1} s(kT_s) T_s. \quad (11.7)$$

Az integrálás eredményét a $t = kT_s$ időpillanatban képezhetjük úgy is, hogy az eddigi közelítő értékhez hozzáadjuk a soron következő téglalap területét:

$$y[k+1] = y[k] + s[k]T_s \Rightarrow y[k] = y[k-1] + s[k-1]T_s.$$



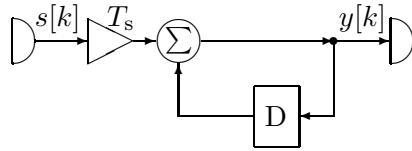
Itt két ekvivalens realizációt is felrajzolhatunk. Utóbbi csak egy késleltetőt tartalmaz, s benne az első egyenletre ismerhetünk.

Jobb oldali téglalapszabály. A határozott integrált T_s szélességű elemi területek összegeként állítja elő, és a következő mintára támaszkodik:

$$y(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau \Rightarrow y(t) \simeq \sum_{k=1}^n s(kT_s) T_s = \sum_{k=0}^{n-1} s([k+1]T_s) T_s. \quad (11.8)$$

Ezen közelítésnek a következő diszkrét idejű rendszeregyenlet felel meg:

$$y[k+1] = y[k] + s[k+1]T_s \Rightarrow y[k] = y[k-1] + s[k]T_s.$$

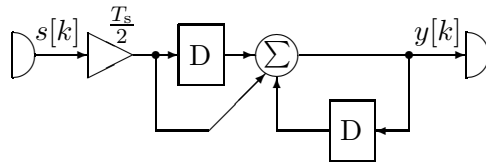


Trapézsabály. A határozott integrált T_s szélességű intervallum két végpontjára támaszkodó trapézok területének összegeként állítja elő:

$$y(t) = \int_0^t s(\tau) d\tau \Rightarrow y(t) \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(kT_s) + s([k+1]T_s)}{2} T_s, \quad (11.9)$$

és a rendszeregyenlet:

$$y[k+1] = y[k] + \frac{T_s}{2}s[k] + \frac{T_s}{2}s[k+1] \Rightarrow y[k] = y[k-1] + \frac{T_s}{2}s[k-1] + \frac{T_s}{2}s[k].$$



Vizsgáljuk meg a trapézszabálynak megfelelő differenciaegyenlet z-transzformáltját:

$$zY(z) = Y(z) + \frac{S(z) + zS(z)}{2} T_s \quad \Rightarrow \quad Y(z) = \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} S(z).$$

Tudjuk ugyanakkor, hogy $y(t)$ az $s(t)$ integrálja, amelynek Laplace-transzformáltja $Y(s) = \frac{1}{s} S(s)$. A két összefüggés összehasonlítása a már ismertetett Tustin-formulát adja:

$$\frac{1}{s} = \frac{T_s}{2} \frac{z+1}{z-1} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}.$$

6. rész Nemlineáris rendszerek néhány számítási módszere

Az eddigi fejezetekben csak lineáris rendszerekkel foglalkoztunk. A gyakorlatban előforduló objektumok viselkedése bizonyos körülmények között kellő pontossággal valóban leírható, modellezhető lineáris rendszerek segítségével. Ez függhet pl. a gerjesztés nagyságától. Az objektumok nagy része azonban nemlineáris, és szükség lehet a nemlineáris jelleg minél pontosabb leírására. Ezen fejezetben a nemlineáris rendszerek vizsgálatának legegyszerűbb módszereit tárgyaljuk röviden.

A nemlineáris rendszer bizonyos körülmények között helyettesíthető egy lineáris rendszerrel. Ezt a nemlineáris rendszer *linearizálásának* nevezzük, a „bizonyos körülmények” fogalmat pedig a rendszer *munkapontja* jelenti. A munkaponti linearizálás módszere közel áll az eddig megismert módszerekhez, ezért ezzel nyitjuk a fejezetet.

A nemlineáris rendszerek vizsgálata leginkább numerikusan lehetséges, amikor elkészítjük a nemlineáris rendszer egy modelljét, és numerikus, közelítő módszerekkel oldjuk meg a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert. Ezt számítógéppel, szoftver úton célszerű megvalósítani. Erről a ma is dinamikusan fejlődő területről a legegyszerűbb módszer bemutatásával adunk ízelítőt.

12. fejezet

FI nemlineáris rendszerek analízise

12.1. Az állapotváltozós leírás fogalma

Folytonos idejű lineáris rendszerek esetében megismertük az állapotváltozós leírás fogalmát, amely egy lineáris, elsőrendű, állandó együtthatós differenciálegyenletekből álló differenciálegyenlet-rendszer. Nemlineáris rendszerek esetében az állapotváltozók deriváltja, valamint a rendszer válaszjele nem fejezhető ki egyszerűen az állapotváltozók és a gerjesztés lineáris kombinációjaként, hanem azok nemlineáris függvényeként adható meg. SISO-rendszerek esetében az állapotváltozós leírás normálalakja tehát a következő:

$$\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, s), \\ y = g(\mathbf{x}, s), \end{array} \quad (12.1)$$

ahol $\mathbf{f}$ ismert többváltozós függvények együttese, azaz vektor értékű függvény, g pedig egy többváltozós függvény. A függvények többváltozósak, hiszen független változójuk az $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ állapotvektor és az $s = s(t)$ gerjesztés, függő változójuk pe-

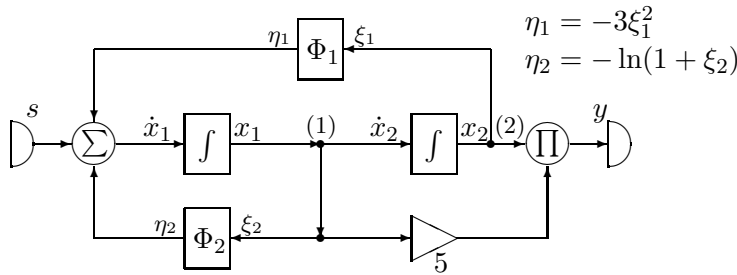
dig az állapotvektor deriváltja, valamint a rendszer $y = y(t)$ kimenete. A függvények nem függenek a t időtől, a rendszer tehát invariáns. Variáns és MIMO nemlineáris rendszerek esetében mindez a következő alakot ölti:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t), \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t). \end{cases} \quad (12.2)$$

Első lépésben az állapotvektor időfüggvényét, un. *trajektóriát* kell meghatározni, majd annak ismeretében a rendszer válasza is számítható.

12.2. Az állapotváltozós leírás előállítása a hálózati reprezentáció alapján

A nemlineáris rendszert reprezentáló hálózat alapján előállítható az állapotváltozós leírás normálalakja, amit a következő példán keresztül mutatunk be. A hálózat két nemlineáris erősítőt tartalmaz (melyek karakterisztikája adott), és egy szorzócsomópontot:



Először is jelöljük be az állapotváltozókat és azok deriváltját. Az (1) jelzésű csomópont egy elágazócsomópont, azaz $\dot{x}_2 = x_1$. Ez megfelel a kívánt alaknak, hiszen jobb oldalán csak az állapotváltozó, bal oldalán pedig az állapotváltozó deriváltja szerepel a

már ismert lineáris kapcsolat szerint. Az x_1 lesz a bemenete a Φ_2 nemlineáris karakterisztikával leírható erősítőnek: $\xi_2 = x_1$, melynek kimenete $\eta_2 = -\ln(1 + x_1)$, ami az egyik bemenete a bal oldali összegzőnek. A (2) jelzésű csomópont szintén elágazó, aminek következtében a Φ_1 karakterisztikával bíró nemlineáris erősítő bemenete az x_2 : $\xi_1 = x_2$, kimenete pedig $\eta_1 = -3x_2^2$. Ez lesz a bal oldali összegző másik bemenete. Az $\dot{x}_1$ tehát a következő nemlineáris differenciálegyenlettel írható fel:

$$\dot{x}_1 = -\ln(1 + x_1) - 3x_2^2 + s.$$

A rendszer kimenete egy szorzó kimenete, amelynek bemeneteit ismerjük:

$$y = 5x_1x_2.$$

Az állapotváltozós leírás normálalakja és a bennük szereplő függvények tehát a következőképp adódnak:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\ln(1 + x_1) - 3x_2^2 + s, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ y = 5x_1x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = -\ln(1 + x_1) - 3x_2^2 + s, \\ f_2 = x_1, \\ g = 5x_1x_2. \end{cases}$$

12.3. Az állapotváltozós leírás linearizálása

Abban az esetben, ha a rendszer gerjesztése egy $\bar{s}$ állandó és egy kis értékkel változó (kisjelű) $\tilde{s}(t)$ jel összegeként írható fel:

$$\boxed{s(t) = \bar{s} + \tilde{s}(t)}, \quad (12.3)$$

akkor a nemlineáris rendszer az állandó gerjesztés által meghatározott ún. *egyensúlyi állapotban linearizálható*. Ekkor a rendszer állapotvektora és válasza is két részből tevődik össze:

$$\boxed{\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}(t), \quad y(t) = \bar{y} + \tilde{y}(t)}. \quad (12.4)$$

A rendszer egyensúlyi állapotát, vagy másnéven *munkapontját* tehát a gerjesztés $\bar{s}$ állandó összetevője határozza meg, amelyre a

nemlineáris rendszer válasza $\bar{y}$. Ha ez a munkapont stabil (amit meg kell vizsgálni), akkor a nemlineáris rendszer ezen munkapont környezetében helyettesíthető egy lineáris rendszerrel, amely rendszer alkalmas a kisjelű $\tilde{s}(t)$ gerjesztésre adott kisjelű $\tilde{y}(t)$ válasz számítására. Ezután a két eredményt össze kell adni. A megoldás tehát három lépésből áll:

1. Az egyensúlyi állapotok (munkapontok) meghatározása.
2. Az egyensúlyi állapot stabilitásának vizsgálata.
3. A linearizált rendszer válaszána meghatározása.

A következőkben ezen lépéseket vizsgáljuk.

Egyensúlyi állapotok meghatározása

Az egyensúlyi állapot tehát a gerjesztés állandó összetevője által meghatározott. Az $\bar{s}$ állandó gerjesztés hatására az állapotvektor egy $\bar{\mathbf{x}}$ állandó értékhez tart, következésképp a válasz az $\bar{y}$ állandó lesz. Az állandó állapotvektor deriváltja nullvektor, azaz $\bar{\mathbf{x}}$ értéke, és ismeretében a rendszer válaszána állandó összetevője (12.1) alapján meghatározható:

$$\boxed{\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}), \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}).} \quad (12.5)$$

Egy rendszernek több munkapontja is lehet, hiszen azt az $\mathbf{f}$ függvény határozza meg. Előfordulhat olyan gerjesztés is, amelyhez nem tartozik egyensúlyi állapot.

Egyensúlyi állapotok stabilitása

Az egyensúlyi állapot stabilitásának vizsgálata céljából állítsuk elő az $\mathbf{f}(\mathbf{x}, s)$ függvény $\mathbf{A}$ ún. *Jacobi-mátrixát* a munkapontban:

$$\boxed{\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}}.} \quad (12.6)$$

Ez pl. egy két állapotváltozóval jellemezhető rendszer esetében a következőképp néz ki:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, s) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, s) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, s)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, s)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2, s)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, s)}{\partial x_2} \end{array} \right] \bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{s}},$$

azaz az egyes parciális deriváltak elvégzése után a kapott mátrix elemeit alkotó függvények argumentumába be kell helyettesíteni a kapott munkaponti értékeket. Így a munkapontoknak megfelelő számú kvadratikus mátrixot kapunk. A Jacobi-mátrix általánosan a következőképp tölthető fel:

$$\boxed{\mathbf{A}_{ij} = \frac{\partial f_i(x_1, x_2, \dots, x_N, s)}{\partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}, s=\bar{s}}}, \quad (12.7)$$

ahol i és j jelöli a mátrix sor- és oszlopindexét, feltéve természetesen, hogy az $f_i(\cdot)$ függvények differenciálhatók a munkapontban.

Vezessük be ezután az egyensúlyi állapottól való eltérést (12.4) alapján:

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}},$$

amit okozhat pl. a gerjesztés kisjelű összetevője, vagy egyéb zaj. Helyettesítsük a változással terhelt munkaponti értéket vissza az $\mathbf{f}(\mathbf{x}, s)$ függvénybe, és közelítsük azt elsőfokú Taylor-polinomjával az $\bar{\mathbf{x}}$ munkapont környezetében:¹

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \Rightarrow \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}, \bar{s}) \simeq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, s)}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}) + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}.$$

Helyettesítsük vissza ezen közelítést a (12.1) nemlineáris differenciálegyenletbe:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}} + \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}) + \mathbf{A} \tilde{\mathbf{x}}.$$

¹ $f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots$

Az egyensúlyi pontban azonban (12.5) szerint teljesül a $\mathbf{0} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s})$, azaz az $\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{0}$ egyenlet, aminek következtében a fenti összefüggés a következő állapotegyenletté egyszerűsödik:

$$\boxed{\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}}, \quad (12.8)$$

amely megegyezik a lineáris rendszerek állapotegyenletével. Ha ezen lineáris rendszer stabil, akkor $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow 0$, amelynek következtében a munkapontból (pl. zavar által) kimozdított állapotvektor visszatér a munkapontba. Ez tehát egy stabil egyensúlyi helyzet, azaz a munkapont akkor stabil, ha a Jacobi-mátrix sajátértékei a bal félsíkon helyezkednek el:

$$\boxed{\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \quad i = 1, \dots, N.} \quad (12.9)$$

Ezt minden munkapontban számított Jacobi-mátrixra el kell végezni. Ha valamely munkapont nem stabil, akkor a következő pontban tárgyalt eljárás nem alkalmazható.

A linearizált rendszer válaszáinak számítása

A nemlineáris rendszer $\mathbf{A}$ Jacobi-mátrixa megegyezik a linearizált rendszer rendszermátrixával. Ezért is jelöljük $\mathbf{A}$ -val. A lineáris rendszer $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}^T$ vektora és a D skalár a következőképp határozható meg a vizsgált munkapontban:

$$\boxed{\mathbf{b}_i = \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, s)}{\partial s} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}}, \quad \mathbf{c}_j^T = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, s)}{\partial x_j} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}}, \quad D = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, s)}{\partial s} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}}}, \quad (12.10)$$

hiszen $\mathbf{b}$ elemei és D a gerjesztést, $\mathbf{c}^T$ elemei pedig az állapotváltozókat súlyozza. Az így előálló lineáris rendszer az egyensúlyi állapot környezetében érvényes, és a kisjelű tagokra a jól ismert normálalak írható fel:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\tilde{s}, \\ \tilde{y} &= \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} + D\tilde{s}. \end{aligned}} \quad (12.11)$$

Ez pedig a lineáris rendszerek témakörben tárgyalt valamely módszerrel megoldható. A válasz számítását az állapotvektor ismeretében elvégezhetjük az itt kapott linearizált egyenlettel, vagy a $g(\cdot)$ függvénybe történő visszahelyettesítéssel. A teljes válasz pedig az egyensúlyi állapotban számított válasz és ezen kisjelű tag összege lesz (l. (12.4) összefüggés).

Példa. Legyen az előbbi állapotváltozós leírással adott rendszer gerjesztése az alábbi. Határozzuk meg a válaszjel időfüggvényét.

$$s(t) = \bar{s} + \tilde{s}(t) = 27 + 2 \cos \omega t, \quad \omega = 2 \frac{\text{krad}}{\text{s}}.$$

Megoldás. Határozzuk meg először a rendszer egyensúlyi állapotát (állapotait) a (12.5) összefüggés szerint, és vegyük figyelembe, hogy $\bar{s} = 27$:

$$\begin{cases} 0 = -\ln(1 + \bar{x}_1) - 3\bar{x}_2^2 + 27, \\ 0 = \bar{x}_1, \\ \bar{y} = 5\bar{x}_1\bar{x}_2. \end{cases}$$

A második egyenlet szerint $\bar{x}_1 = 0$. Ezt helyettesítsük vissza az elsőbe: $-3\bar{x}_2^2 + 27 = 0$, ahonnan $\bar{x}_{2_1} = 3$ és $\bar{x}_{2_2} = -3$ lehet. Az $\bar{y}$ munkaponti érték mindkét esetben 0. Vizsgáljuk meg ezután, hogy ezen munkapontok stabilak, vagy sem. A rendszer Jacobi-mátrixa a következő:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, s)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, s)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2, s)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2, s)}{\partial x_2} \end{array} \right] \bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{s}} = \left[\begin{array}{cc} \frac{-1}{1+\bar{x}_1} & -6\bar{x}_2 \\ 1 & 0 \end{array} \right].$$

A két munkapontnak megfelelő mátrix és a sajátértékek a következők:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & -18 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -0,5 + j4,21, \\ \lambda_2 = -0,5 - j4,21, \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 18 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -4,77, \\ \lambda_2 = 3,77, \end{cases}$$

Az első munkapont tehát egy stabilis munkapont, a második viszont nem az. A továbbiakban tehát csak az első esetet vizsgáljuk. Állítsuk elő ezen munkapontban a nemlineáris rendszer linearizált modelljét (12.10) alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, s)}{\partial s} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2, s)}{\partial s} \end{array} \right] \bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{s}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}^T &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g(x_1, x_2, s)}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x_1, x_2, s)}{\partial x_2} \end{array} \right] \bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{s}} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix}, \\ D &= \frac{\partial g(x_1, x_2, s)}{\partial s} \bigg|_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{s}} = 0. \end{aligned}$$

A lineáris rendszer az első munkapontban tehát a következő állapotváltozós leírással adható meg:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -18 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{s}, \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Ennek felhasználásával határozhatjuk meg a kisjelű $\tilde{y}(t)$ időfüggvényt, amit az $\tilde{s}(t)$ gerjeszt. Mivel utóbbi szinuszos, alkalmazzuk a tanult átviteli karakterisztikát és a gerjesztés komplex csúcserékét. Az átviteli karakterisztika és az átviteli együttható értéke a megadott körfrekvencián a következő:

$$W(j\omega) = \frac{15j\omega}{(j\omega)^2 + j\omega + 18}, \quad \overline{W} = 2,12 e^{j81,87^\circ}.$$

A válaszjel komplex csúcseréke tehát

$$\tilde{\overline{Y}} = \overline{W} \tilde{\overline{S}} = 2,12 e^{j81,87^\circ} 2 = 4,24 e^{j81,87^\circ}$$

lesz, amiből a teljes válasz időfüggvénye felírható:

$$y(t) = \overline{y} + \tilde{y}(t) = 4,24 \cos(\omega t + 81,87^\circ).$$

12.4. Az állapotváltozós leírás numerikus, közelítő megoldása

Ezen módszerek főként számítógéppel történő számítások elvégzésére alkalmasak, és a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer időbeli diszkretizálásán alapszanak. A numerikus megoldás során adott t_k időpillanatokban valamilyen séma szerint közelítőleg oldjuk meg a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert, azaz ezen időpillanatokban az állapotvektor $\mathbf{x}(t_k)$ értékeit numerikusan meghatározzuk. Ezen értékekre támaszkodva aztán a válaszjel ugyanezen időpontokban számítható.

A többféle közelítő eljárás közül csak a legegyszerűbb *egylépéses Euler-algoritmus*okat mutatjuk be.² Az egylépéses jelző azt jelenti, hogy a megoldás a t_{k+1} időpillanatban csak az ezt megelőző t_k időpontbeli megoldásra támaszkodik és az $\mathbf{x}(t_0)$ ismert.

Az *előrelépéses Euler-algoritmus* a derivált differenciálással történő átírásával fogalmazható meg:

$$\frac{\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)}{\Delta t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), s(t_k)), \quad (12.12)$$

ahonnan az algoritmus a a következő:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k), s(t_k)). \quad (12.13)$$

A *hátralépéses Euler-algoritmus* pedig a következőképp:

$$\frac{\mathbf{x}(t_{k+1}) - \mathbf{x}(t_k)}{\Delta t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k+1}), s(t_{k+1})), \quad (12.14)$$

ahonnan

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_{k+1}), s(t_{k+1})). \quad (12.15)$$

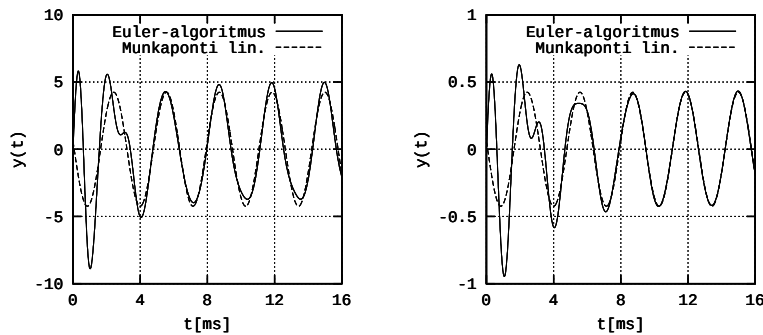
Ebből még $\mathbf{x}(t_{k+1})$ kifejezését meg kell határozni, hiszen az a jobb oldalon is szerepel. Az előrelépő módszer felülbecsüli, a hátralépő módszer pedig alulról közelíti az egzakt megoldást.

²Más hatékonyabb, de bonyolultabb módszerek: Runge–Kutta-módszer, prediktor-korrektor módszer, Newton–Raphson iteráció stb.

Példa. Oldjuk meg az előbbi feladatot az előrelépéses Euler-algoritmussal:

$$\begin{aligned}x_1(t_{k+1}) &= x_1(t_k) + \Delta t \left(-\ln(1 + x_1(t_k)) - 3x_2^2(t_k) + s(t_k) \right), \\x_2(t_{k+1}) &= x_2(t_k) + \Delta t x_1(t_k), \\y(t_{k+1}) &= 5x_1(t_{k+1})x_2(t_{k+1}),\end{aligned}$$

és használjuk az $x_1(t_0 = 0) = 0$, $x_2(t_0 = 0) = 3$, $y(t_0 = 0) = 0$ kiindulási értékeket, valamint legyen $\Delta t = 0,01$ ms és ábrázoljunk $N = 1600$ időpillanatot. Megjegyezzük, hogy csökkenő Δt értékek mellett egyre pontosabb megoldást kapunk. A munkaponti linearizálással kapott és a numerikusan számított válaszjel összehasonlítása látható a 12.1. ábrán. Utóbbi esetben a gerjesztés



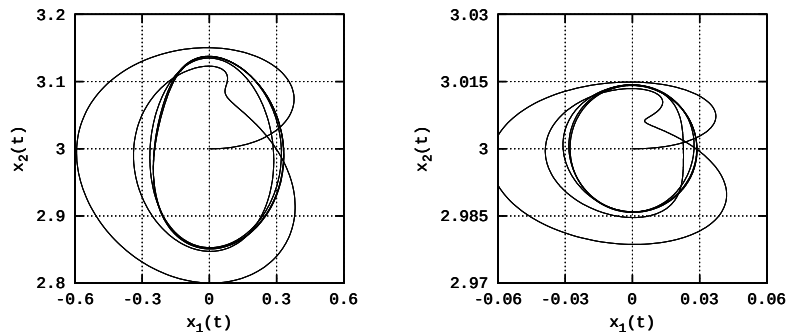
12.1. ábra. A munkaponti linearizálással kapott válasz és az Euler-algoritmussal kapott válasz összehasonlítása $\tilde{s}_{max} = 2$ és $\tilde{s}_{max} = 0,2$ esetekben

váltakozó $\tilde{s}(t)$ tagjának amplitúdója tizede a korábban alkalmazottnak. Ebben az esetben látható, hogy a két megoldás a második periódus után gyakorlatilag megegyezik. A munkaponti linearizálás tehát helyes eredményt ad, a rendszer ezen gerjesztés mellett valóban lineárisnak tekinthető, az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ függvények itt lineáris függvénnyel helyettesíthetők. Az előbbi esetben azonban

a különbség nagyobb, mert a linearizált modell a nagyobb amplitúdó miatt nem teljes érvényű, hiszen a rendszer ebben a tartományban már nem tekinthető lineárisnak. A linearizált modell alkalmazása tehát meglehetősen korlátozott $\tilde{s}(t)$ nagysága által.

Az első két periódusban láthatóan nagy az eltérés a két megoldás között. Ennek oka, hogy a linearizált modell alapján számított megoldás csak a stacionárius válasz, az Euler-algoritmussal kapott közelítő megoldás pedig a tranziens is tartalmazza.³ Ez pedig az első néhány periódusban érzékelhető.

Az állapotvektor *trajektóriája* látható a 12.2. ábrán az előbbi két esetben. Látható, hogy $x_1(0) = 0$ és $x_2(0) = 3$ a kiindulási érték és bizonyos idő múltán a trajektória egy zárt periodikusan ismétlődő görbéhez, az un. *határciklushoz* tart. Ennek eredményeképp lesz a válasz is periodikus. *Az állapottrajektória tehát a rendszer állapotvektorának időbeli változását ábrázolja egy görbével.* Nyilvánvaló, hogy ez csak másodrendű rendszer esetében ad szemléletes ábrázolást.



12.2. ábra. Az állapottrajektória az állapotsíkon ábrázolva

³Emlékezzünk vissza, hogy a teljes megoldás a tranziens összetevő és a stacionárius összetevő összege.

13. fejezet

DI nemlineáris rendszerek analízise

13.1. Az állapotváltozós leírás fogalma

Diszkrét idejű lineáris rendszerek esetében is definiáltuk az állapotváltozós leírás normálalakját, amely egy lineáris, elsőrendű, állandó együtthatós differenciaegyenletekből álló differenciaegyenlet-rendszer. Nemlineáris rendszerek esetében az állapotváltozók $(k + 1)$ -edik ütembeli értéke, valamint a rendszer válaszjele a k -adik ütemben az állapotváltozók és a gerjesztés k -adik ütembeli értékének nemlineáris függvényeként adható meg:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}[k + 1] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], s[k]), \\ y[k] &= g(\mathbf{x}[k], s[k]).\end{aligned}} \quad (13.1)$$

Teljesen általános diszkrét idejű (variáns és MIMO-) rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja a következő:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{x}[k + 1] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], \mathbf{s}[k], k), \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{g}(\mathbf{x}[k], \mathbf{s}[k], k).\end{aligned}} \quad (13.2)$$

Első lépésben az állapotvektor időfüggvényét, vagyis trajektoriáját kell meghatározni, majd annak ismeretében a rendszer válasza is számítható.

13.2. Az állapotváltozós leírás linearizálása

Diszkrét idejű nemlineáris rendszerek esetében hasonlóan alkalmazhatjuk a munkaponti linearizálást, ha a rendszer gerjesztése egy $\bar{s}$ állandó és egy kisjelű $\tilde{s}[k]$ jel összegeként írható fel:

$$\boxed{s[k] = \bar{s} + \tilde{s}[k].} \quad (13.3)$$

Az állapotvektor és a válasz szintén két részből tevődik össze:

$$\boxed{\mathbf{x}[k] = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}[k], \quad y[k] = \bar{y} + \tilde{y}[k].} \quad (13.4)$$

A rendszer $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapotát a gerjesztés $\bar{s}$ állandó összetevője határozza meg, amelyre a nemlineáris rendszer válasza $\bar{y}$. A nemlineáris rendszer ezen munkapont környezetében helyettesíthető egy lineáris rendszerrel, amely rendszer segítségével a kisjelű $\tilde{s}[k]$ gerjesztésre adott kisjelű $\tilde{y}[k]$ válasz számítható, majd a két eredményt össze kell adni. A megoldás szintén három lépésből áll.

Egyensúlyi állapotok meghatározása

Az $\bar{s}$ állandó gerjesztés hatására az állapotvektor az $\bar{\mathbf{x}}[k] = \bar{\mathbf{x}}$ munkaponti értékhez tart, és az eltolt $\bar{\mathbf{x}}[k + 1]$ állapotvektor is ugyanez az $\bar{\mathbf{x}}$ állandó lesz, azaz $\bar{\mathbf{x}}[k + 1] = \bar{\mathbf{x}}[k] = \bar{\mathbf{x}}$, hiszen az állapotvektor ekkor nem változik. A (13.1) alapján a munkapont meghatározható:

$$\boxed{\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}), \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = g(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}).} \quad (13.5)$$

Egy rendszernek több munkapontja is lehet, hiszen azt az $\mathbf{f}$ függvény határozza meg. Előfordulhat olyan gerjesztés is, amelyhez nem tartozik egyensúlyi állapot.

Egyensúlyi állapotok stabilitása

Az egyensúlyi állapot stabilitásának vizsgálata céljából állítsuk elő az $\mathbf{f}(\mathbf{x}[k], s[k])$ függvény $\mathbf{A}$ *Jacobi-mátrixát* a munkapontban.¹

Vezessük be ezután az egyensúlyi állapottól való eltérést (13.4) alapján:

$$\mathbf{x}[k] = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}[k] \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}[k] = \mathbf{x}[k] - \bar{\mathbf{x}},$$

amit okozhat pl. a gerjesztés kiszámított összetevője, vagy egyéb zaj. Helyettesítsük a változással terhelt munkaponti értéket vissza az $\mathbf{f}(\mathbf{x}[k], s[k])$ függvénybe, és közelítsük azt elsőfokú Taylor-polinomjával az $\bar{\mathbf{x}}$ munkapont környezetében:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], s[k]) &\Rightarrow \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}[k], \bar{s}) \simeq \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], s[k])}{\partial \mathbf{x}[k]} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}} \tilde{\mathbf{x}}[k] \\ &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}[k]. \end{aligned}$$

Helyettesítsük vissza ezen közelítést a (13.1) nemlineáris differenciaegyenletbe:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}[k], s[k]) \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}[k+1] = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s}) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}[k].$$

Az egyensúlyi pontban azonban (13.5) szerint teljesül a $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{s})$, aminek következtében a fenti összefüggés a következő állapotegyenletté egyszerűsödik:

$$\boxed{\tilde{\mathbf{x}}[k+1] = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}[k]}, \quad (13.6)$$

amely megegyezik a lineáris rendszerek állapotegyenletével. Ha ezen lineáris rendszer stabil, akkor $\tilde{\mathbf{x}}[k] \rightarrow 0$, amelynek következtében a munkapontból kimozdított állapotvektor visszatér a munkapontba. Ez tehát egy stabil egyensúlyi helyzet, azaz a munkapont akkor stabil, ha a Jacobi-mátrix sajátértékei egységsugarú körön belül helyezkednek el:

$$\boxed{|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, N.} \quad (13.7)$$

¹Ezt ugyanúgy kell számítani, ahogy a folytonos idejű rendszereknél bemutatottuk (l. 389. oldal).

A linearizált rendszer válaszána számítása

A nemlineáris rendszer $\mathbf{A}$ Jacobi-mátrixa megegyezik a linearizált rendszer rendszermátrixával, a lineáris rendszer $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}^T$ vektora és a D skalár ugyanúgy számítható, ahogy azt a folytonos idejű rendszereknél bemutattuk (l. (12.10) összefüggések). Az így előálló lineáris rendszer az egyensúlyi állapot környezetében érvényes, és a kisjelű tagokra a jól ismert normálalak írható fel:

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}[k+1] &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{b}\tilde{s}[k], \\ \tilde{y}[k] &= \mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}}[k] + D\tilde{s}[k].\end{aligned}} \quad (13.8)$$

Ez pedig a lineáris rendszerek témakörben tárgyalt valamely módszerrel megoldható. A válasz számítását az állapotvektor ismeretében elvégezhetjük az itt kapott linearizált egyenlettel, vagy a $g(\cdot)$ függvénybe történő visszahelyettesítéssel. A teljes válasz pedig az egyensúlyi állapotban számított válasz és ezen kisjelű tag összege lesz (l. (13.4) összefüggés).

13.3. Az állapotváltozós leírás megoldása „lépésről lépésre”-módszerrel

A diszkrét idejű nemlineáris rendszer állapotváltozós leírásának kézenfekvő megoldási eljárása a „lépésről lépésre”-módszer. Ez inkább gépi számításokra alkalmas. A megoldás menete az $\mathbf{x}[0]$ kezdeti állapot ismeretében pár ütemre a következő:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[1] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[0], s[0]), & y[0] &= g(\mathbf{x}[0], s[0]), \\ \mathbf{x}[2] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[1], s[1]), & y[1] &= g(\mathbf{x}[1], s[1]), \\ \mathbf{x}[3] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}[2], s[2]), & y[2] &= g(\mathbf{x}[2], s[2]), & \dots\end{aligned}$$