Gráfok, hipergráfok és alkalmazásaik - informatikusoknak
(2019 tavaszi félév)

1. Baranyai tétele.
2. Sperner tétel és LYM egyenlőtlenség.
3. Bollobás egyenlőtlenség.
4. Ahlswede-Zhang azonosság és annak magyarázata, hogy hogyan következik belőle a LYM egyenlőtlenség.
5. Kolexikografikus rendezés. Pozitív egészek felírása r-binomiális alakban, a felírás egyértelműsége.
6. Kruskal-Katona tétel.
7. Erdős-Ko-Rado tétel (Daykin-féle és Katona-féle bizonyítással is).
8. Lovász-Kneser tétel és Greene-féle bizonyítása. Dolnyikov tétele és annak magyarázata, hogy miért következik belőle a Lovász-Kneser tétel.
9. Lovász-Kneser tétel Bárány-féle bizonyítása, Schrijver tétele.
10. Stabil párosítás fogalma, Gale-Shapley tétel.
11. Listaszínezés. A $ch(G)$ paraméter viszonya a kromatikus számhoz. Dinitz problema, Galvin tétele.
12. Síkgráfok listaszínezéséről szóló Thomassen tétel.
13. Síkgráfok listaszínezéséről szóló Voigt tétel.
14. Páratlanváros tétel és Párosváros tétel.
15. Graham-Pollak tétel.
16. Borsuk “sejtés” és Kahn-Kalai-Nilli-féle cáfolata.
17. Ramsey tétele gráfokra és uniform hipergráfokra.
18. Chvátal tétele: az $R(T, K_s)$ Ramsey szám értéke, ahol T tetszőleges t csúcsú fa.
19. Indukált Ramsey tétel páros gráfokra.
20. Indukált Ramsey tétel (Nešetřil-Rödl tétele) bizonyítása a páros gráfos analóg tétel ismeretében.

① Baranyai tétele

Tétel: Ha $r|n$, akkor $K_n^{(r)}$ 1-faktorizálható

Szemléltetés: sakkmérkőzés lejátszható $n-1$ nap alatt.
Többfős játszmáknál kell $\frac{\binom{n}{r}}{\frac{n}{r}} = \binom{n-1}{r-1}$ nap

Def (1-faktorizáció): Teljes párosítások diszjunkt uniójára bontani a gráfot. ($\forall$ fokszám 1 a színekben)

Tétel 2: Ha $r|n$ és $k \leq n$, akkor a $[k] = \{1,2,\dots k\}$ halmaznak megadható $\binom{n-1}{r-1}$ db $\frac{n}{r}$ osztályra való partíciója úgy, hogy $\forall\, S \subseteq [k]$ halmaz pontosan $\binom{n-k}{r-|S|}$-szer forduljon elő.

Tétel 1 $\Leftarrow$ Tétel 2: Ha $k=n$: $\binom{n-k}{r-|S|} = \binom{0}{r-|S|} = \begin{cases} 0 & \text{ha } |S| \neq r \\ 1 & \text{ha } |S| = r \end{cases}$

Vagyis legfeljebb 1x forduljon elő egy részhalmaz.

Biz: k-ra teljes indukció

$k=0$ ✓ triviális

$$\left.\begin{matrix} \emptyset\ \emptyset\ \emptyset \\ \emptyset\ \emptyset\ \emptyset \\ \vdots \\ \underbrace{\emptyset\ \emptyset\ \emptyset}_{\frac{n}{r}\text{ db}} \end{matrix}\right\} \binom{n-1}{r-1}$$

Indukciós lépés: $k+1$-re lépve $\forall\, S \subseteq [k]$ pontosan $\binom{n-k-1}{r-|S|-1}$ esetben kell hogy bővüljön $(k+1)$-el, és $\binom{n-k-1}{r-|S|}$ esetben ne bővüljön.

Csináljunk egy mátrixot!

pl $n=6,\ r=2,\ k=2$
akkor partíciók $\{1\}\ \{2\}\ \emptyset$ 4-szer
$\{1,2\}\ \emptyset\ \emptyset$ 1-szer

Mátrix sorai partíciók, oszlopai az osztályok (részhalmazok), 0 vagy 1 elemek a mátrixban attól függően, szerepel-e a részhalmaz a partícióban.

Ahol 1 van $\rightarrow \frac{\binom{n-k-1}{r-|S|-1}}{\binom{n-k}{r-|S|}} = \frac{r-|S|}{n-k}$ törtet írunk, akkora valószínűséggel kell bővítenünk S-t!

Ha $S=\emptyset$, ezt még szorozzuk annyival, ahányszor szerepel az $\emptyset$ a sorban!

	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset\ \{1\}\ \{2\}$	1 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{4}$	0
$\emptyset\ \{1\}\ \{2\}$	1 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{4}$	0
$\emptyset\ \{1\}\ \{2\}$	1 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{4}$	0
$\emptyset\ \{1\}\ \{2\}$	1 $\frac{1}{2}$	1 $\frac{1}{4}$	1 $\frac{1}{4}$	0
$\emptyset\ \emptyset\ \{1,2\}$	1 1	0	0	1 ezt nem bővíthetjük 0

Sorösszeg mindenhol 1, mivel mindenhol nemnulla elemek összege $\frac{n}{r}$, így

$$\sum_{\substack{S \text{ szerepel} \\ \text{a partícióban}}} \frac{r-|S|}{n-k} = \frac{\frac{n}{r}\cdot r - \sum|S|}{n-k} \underset{\sum|S|=k}{=} \frac{n-k}{n-k} = 1 \ ✓$$

tehát tényleg valószínűségi eloszlás :)

Oszlopösszegek $\binom{n-k-1}{r-|S|-1}$, mivel S oszlopában $\binom{n-k}{r-|S|}$-szer szerepel $\frac{\binom{n-k-1}{r-|S|-1}}{\binom{n-k}{r-|S|}}$ tört.

Kerekítési lemma alapján $\exists\, B$ mátrix, ahol sor és oszlopösszegek megegyeznek, de mindenhol egész számok vannak. $\Rightarrow \forall$ sorban 1 db 1-es lesz
$\Rightarrow \forall$ oszlopban $\binom{n-k-1}{r-|S|-1}$ db 1-es lesz

Azokat a részhalmazokat bővítve $(k+1)$-es elemmel, tulajdonságok ugyanúgy teljesülnek ($\exists\ (k+1)$-re is megfelelő partícionálás), tehát az indukció mehet tovább. Így elérjük el $(k=n)$-t.

Kerekítési lemma: Legyen $\underline{A}$ olyan mátrix, aminek minden eleme valós szám, és minden sorösszege és oszlopösszege egész. Akkor $\exists$ olyan $\underline{A}$-val megegyező méretű $\underline{B}$ mátrix, amire $\forall\, i,j$: $b_{ij} = \lfloor a_{ij} \rfloor$ vagy $\lceil a_{ij} \rceil$ és a sor- és oszlopösszegei $\underline{A}$-éival megegyeznek.

Biz:
- Ha minden elem egész ✓
- Ha $\exists\, a_{ij} \notin \mathbb{Z} \rightarrow \exists\, j'$ hogy $a_{ij'} \notin \mathbb{Z} \rightarrow \exists\, i'$ hogy $a_{i'j'} \notin \mathbb{Z}$

Páros hosszú kört bejárva visszajutunk a_{ij}-hez, minden elem tört, és szomszédos tagok felváltva egy sorban ill. oszlopban helyezkednek el.

Legyen a körben lévő $\forall\, a_{ij}$ elemre $d_{ij} = \min\{a_{ij} - \lfloor a_{ij} \rfloor, \lceil a_{ij} \rceil - a_{ij}\}$
és $D = \min d_{ij}$ a körben lévő a_{ij} elemek d_{ij} értékeinek minimuma.

Amelyik a_{ij}-re $d_{ij} = D$, kerekítsük vele egészre (hozzáadva vagy kivonva)
Majd körben mindenkit felváltva csökkentsünk-növeljünk annyival.
$\Rightarrow$ sor és oszlopösszegek nem változnak, de eggyel kevesebb tört szám van!
$\Rightarrow$ el fognak fogyni a tört számok, és megkapjuk $\underline{B}$ mátrixot.

② Sperner tétel és LYM egyenlőtlenség

Tétel: Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ hatványhalmaz olyan, hogy $\forall F, F' \in \mathcal{F}$ $F \not\subseteq F'$ és $F' \not\subseteq F$: $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

És ez éles: $\mathcal{F} = \binom{[n]}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ rendelkezik a fenti tulajdonsággal és elemszáma $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

összes $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elemű halmaz

Szemléltetés: tolmácsok, egyik se beszéli összes nyelvét mint bármelyik másik, akkor legalább ahány nyelvet tudnak összesen

Biz: $\mathcal{F}$ Sperner-rendszer. (teljesül rá a tételben szereplő feltétel)

$$B_{\mathcal{F}} := \{(F, \sigma) : F \in \mathcal{F},\ \sigma \in S_n \text{ (permutációcsoport)}\ (\sigma\ 1 \dots n \text{ elemek egy permutációja}) \text{ és } F = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(|F|)\}\}$$

$|B_{\mathcal{F}}|$ méretét becsüljük.

- Rögzített $F \in \mathcal{F}$ halmazhoz: $|F|! \cdot (n - |F|)!$ σ permutáció $\quad \underbrace{\cdots}_{F}\ \underbrace{\cdots}_{[n]\setminus F}$

$$|B_{\mathcal{F}}| = \sum_{F \in \mathcal{F}} |F|! \cdot (n - |F|)!$$

- Rögzített $\sigma \in S_n$ permutációhoz: 1 $F \in \mathcal{F}$ halmaz! Hiszen egymásnak nem részhalmazai a halmazok! (vagy egy sem...)

$$|B_{\mathcal{F}}| \leq n!$$

Tehát $|B_{\mathcal{F}}| = \sum_{F \in \mathcal{F}} |F|! \cdot (n - |F|)! \leq n!$ ⊛

Mivel $|F|! \cdot (n - |F|)! \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!$

$$|\mathcal{F}| \cdot \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \tfrac{n}{2} \rceil! \leq \sum |F|! \cdot (n - |F|)! \leq n!$$

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil!} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

LYM egyenlőtlenség: legyen $\mathcal{F}$ Sperner-rendszer n elemű alaphalmazon és jelölje f_i a pontosan i elemű halmazok számát $\mathcal{F}$-ben. Ekkor $\sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq 1$

Biz: ⊛ $\sum_{F \in \mathcal{F}} |F|! \cdot (n - |F|)! \leq n!$

$\Downarrow$ átírható így

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \cdot i!(n-i)! \leq n! \qquad /: n!$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \frac{i!(n-i)!}{n!} \leq 1 \qquad / \text{reciprok reciproka}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \frac{1}{\frac{n!}{i!(n-i)!}} \leq 1 \qquad / \text{kombináció definíciója}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq 1$$

LYM ⇒ Sperner

$$|\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{n} f_i, \quad \binom{n}{i} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq 1 \implies 1 \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq |\mathcal{F}|$$

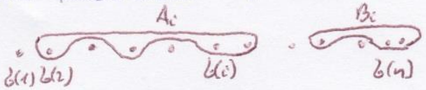
3) Bollobás egyenlőtlenség

Tétel: Legyenek az $(A_1, B_1), \dots, (A_k, B_k)$ részhalmaz párok ($\forall i$ $A_i, B_i \subseteq [n]$) véges halmazokból álló olyan párok, amikre teljesülnek az alábbiak:

1) $\forall i$ $A_i \cap B_i = \emptyset$
2) $\forall i \neq j$ $A_i \cap B_j \neq \emptyset$

Ekkor $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1$

Biz: (A_i, B_i) alkosson párt azon $\sigma \in S_n$ permutációkkal, amikre a σ szerinti felsorolásban A_i összes eleme megelőzi B_i összes elemét



- Rögzített (A_i, B_i)-hez: $\binom{n}{|A_i|+|B_i|} \cdot |A_i|! \cdot |B_i|! \cdot (n - |A_i| - |B_i|)!$
  db σ tartozhat párba

- Rögzített σ-hoz: legfeljebb 1 halmazpár a Bollobás rendszerből tartozhat hozzá

Tehát: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{|A_i|+|B_i|} \cdot |A_i|! \cdot |B_i|! \cdot (n - |A_i| - |B_i|)! \leq n!$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n!}{(|A_i|+|B_i|)!\,(n-(|A_i|+|B_i|))!} \cdot |A_i|! \cdot |B_i|! \cdot (n - |A_i| + |B_i|)! \leq n!$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n!}{(|A_i|+|B_i|)!} \cdot |A_i|! \cdot |B_i|! \leq n!$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n!}{\frac{(|A_i|+|B_i|)!}{|A_i|! \cdot |B_i|!}} \leq n!$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{|A_i|+|B_i|}{|A_i|}} \leq 1$$

Ha még azt is tudjuk, hogy $\forall i$ $|A_i| = a$ és $|B_i| = b$,
akkor $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\binom{a+b}{a}} = k \cdot \frac{1}{\binom{a+b}{a}} \leq 1 \implies k \leq \binom{a+b}{a}$

④ Ahlswede-Zhang azonosság

AZ azonosság: Legyen $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer.

Definiáljuk a $W_{\mathcal{A}}(D)$ mennyiséget minden $D \subseteq [n]$-re:

$$W_{\mathcal{A}}(D) := \Big|\bigcap_{\substack{A_i \in \mathcal{A} \\ A_i \subseteq D}} A_i\Big|$$

Ekkor
$$\sum_{D \subseteq [n]} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D| \cdot \binom{n}{|D|}} = 1$$

Biz: Legyen $\sigma \in S_n$ és jelölje $U(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$-beli halmazokat tartalmazó halmazok halmazát. $U(\mathcal{A}) = \{B \subseteq [n] : \exists A \in \mathcal{A} \text{ amire } A \subseteq B\}$

Azt mondjuk, hogy σ permutáció az $S \subseteq [n]$ halmaznál lép be $U(\mathcal{A})$-ba (vagy lép ki $U(\mathcal{A})$-ból), ha

$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots \sigma(|S|)\} = S \in U(\mathcal{A})$ és $S \setminus \sigma(|S|) \notin U(\mathcal{A})$ ...

- Rögzített S halmaz esetén: $W_{\mathcal{A}}(S) \cdot (n-|S|)! \cdot (|S|-1)!$ db S-nél belépő σ permutáció van.

Ennyi elem van benne az összes metszetben. Ennyi féle képpen hagyhatunk el S-ből úgy egy elemet, hogy a megmaradó részhalmazban már ne legyen $\mathcal{A}$-beli elem

- Rögzített σ esetén: pontosan 1 S halmaz van, ahol belép $U(\mathcal{A})$-ba

$$\Rightarrow \sum_{S \subseteq [n]} W_{\mathcal{A}}(S) (n-|S|)! \cdot (|S|-1)! = n!$$

$$\sum_{S \subseteq [n]} \frac{W_{\mathcal{A}}(S)}{\frac{n!}{(n-|S|)!(|S|-1)!}} = 1 \qquad \longrightarrow \frac{n! \cdot |S|}{(n-|S|)! \cdot |S|!} = \binom{n}{|S|} \cdot |S|$$

$$\sum_{S \subseteq [n]} \frac{W_{\mathcal{A}}(S)}{\binom{n}{|S|} \cdot |S|} = 1$$

AZ ⟹ LYM

Ha $\mathcal{A}$ Sperner rendszer, $\forall D \in \mathcal{A}$-ra $W_{\mathcal{A}}(D) = |D|$

Ezért
$$1 = \sum_{D \subseteq [n]} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D| \binom{n}{|D|}} = \sum_{D \in \mathcal{A}} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D| \binom{n}{|D|}} + \underbrace{\sum_{D \notin \mathcal{A}} \frac{W_{\mathcal{A}}(D)}{|D| \cdot \binom{n}{|D|}}}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \sum_{D \in \mathcal{A}} \frac{|D|}{|D| \binom{n}{|D|}} = \sum_{D \in \mathcal{A}} \frac{1}{\binom{n}{|D|}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\binom{n}{i}}$$

5 Kolexografikus rendezés, r-binomiális alak

Def: Az $\binom{[n]}{r}$ halmaz elemeinek kolexografikus rendezése az alábbi:
$A, B \in \binom{[n]}{r}$, $A \neq B$ között $A \underset{kolex}{<} B$ pontosan akkor, ha
$\max\{a \in A : a \notin B\} < \max\{b \in B : b \notin A\}$

Def: Egy $m \in \mathbb{N}$ szám r-binomiális felírása a következő:
$$m = \binom{m_r}{r} + \binom{m_{r-1}}{r-1} + \binom{m_{r-2}}{r-2} + \dots + \binom{m_s}{s} \quad \text{ahol } m_r > m_{r-1} > \dots > m_s$$

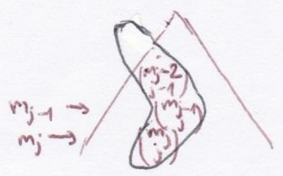
r-binomiális alak egyértelmű $\quad m_i = \max\left\{t : \binom{t}{i} \le m - \binom{m_r}{r} - \binom{m_{r-1}}{r-1} - \dots - \binom{m_{i+1}}{i+1}\right\}$

Tegyük fel, hogy valamely m-nek van két különböző felírása
$$m = \binom{m_r}{r} + \dots + \binom{m_s}{s} = \binom{m'_r}{r} + \dots + \binom{m'_{s'}}{s'}$$
Legyen j a legnagyobb olyan érték, amire $m_j \neq m'_j$

Ekkor $\binom{m_j}{j} + \dots + \binom{m_s}{s} = \binom{m'_j}{j} + \dots \binom{m'_{s'}}{s'}$

w.l.o.g: $m_j > m'_j$
$$\binom{m_j}{j} + \binom{m_{j-1}}{j-1} + \dots + \binom{m_s}{s} = \binom{m'_j}{j} + \binom{m'_{j-1}}{j-1} + \dots + \binom{m'_{s'}}{s'} \le \underbrace{\binom{m_j-1}{j} + \binom{m_j-2}{j-1} + \dots \binom{m_j-j}{1}}_{\binom{m_j}{j} - 1} \quad ↯$$

Pascal △ miatt:
$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{1 + \binom{m_j-j}{1}}_{\binom{m_j-j+1}{1}} + \binom{m_j-j+1}{2}}_{\binom{m_j-j+2}{2}} + \dots + \binom{m_j-1}{j}}_{\binom{m_j}{j}}$$



Hockey stick identity

⑥ Kruskal-Katona tétel

Def: Egy $\mathcal{A} \subseteq \binom{[n]}{r}$ halmazrendszer árnyéka a $\partial\mathcal{A} := \{B \in \binom{[n]}{r-1} : \exists A \in \mathcal{A},\ B \subseteq A\}$ halmazrendszer.

Jelölés: $b^{(r)}(m_r, m_{r-1}, \dots, m_s) := \binom{m_r}{r} + \binom{m_{r-1}}{r-1} + \dots + \binom{m_s}{s} = |B^{(r)}(m_r, \dots, m_s)|$

$$B^{(r)}(m_r, m_{r-1}, \dots, m_s) := \binom{[m_r]}{r} \cup \left(\binom{[m_{r-1}]}{r-1} \oplus \{m_r+1\}\right) \cup \left(\binom{[m_{r-2}]}{r-2} \oplus \{m_{r-1}+1, m_r+1\}\right) \cup \dots \cup \left(\binom{[m_s]}{s} \oplus \{m_{s+1}+1, \dots, m_r+1\}\right)$$

$\mathcal{F} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ esetén $\mathcal{F} \oplus \{i\}$, ahol $i \in \mathbb{N}$ jelentése: $\{F \cup \{i\} : F \in \mathcal{F}\}$

Def: $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ pozitív egészekre egy $A \in \binom{\mathbb{N}}{r}$ halmaz (i,j) rendezett pár szerinti $R_{ij}(A)$ eltoltja az $R_{ij}(A) = \begin{cases} A \setminus \{j\} \cup \{i\} & i \notin A,\ j \in A \\ A & \text{egyébként} \end{cases}$

Az $\mathcal{A} \subseteq \binom{\mathbb{N}}{r}$ halmazrendszer eltoltja $R_{ij}(\mathcal{A}) = \{R_{ij}(A) : A \in \mathcal{A}\} \cup \{A : A \in \mathcal{A},\ R_{ij}(A) \in \mathcal{A}\}$

Def: Egy $\mathcal{A} \subseteq \binom{\mathbb{N}}{r}$ halmazrendszer balra tolt, ha $\forall i<j$ esetén $R_{ij}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

Lemma: $\mathcal{A} \subseteq \binom{\mathbb{N}}{r}$-re $\forall i<j$ esetén $|\partial R_{ij}(\mathcal{A})| \le |\partial \mathcal{A}|$

Biz: Elég belátni, hogy $|\partial R_{ij}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A}| \le |\partial\mathcal{A} \setminus R_{ij}(\mathcal{A})|$

Eltolás nem változtat egy halmazrendszer méretén, ezért

$|R_{ji}(\partial R_{ij}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A})| \le |\partial\mathcal{A} \setminus R_{ij}(\mathcal{A})|$

$\Uparrow$

$R_{ji}(\partial R_{ij}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A}) \subseteq \partial\mathcal{A} \setminus R_{ij}(\mathcal{A})$

w.l.o.g. $i=1$, $j=2$, $C \in \binom{\mathbb{N}}{r-2}$

Ha $B \in R_{21}(\partial R_{12}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A}) \Rightarrow 1 \notin B,\ 2 \in B$, $B = C \cup \{2\}$

Ekkor $C \cup \{1\} \in \partial R_{12}(\mathcal{A}) \setminus \partial\mathcal{A} \Rightarrow C \cup \{1\} \notin \partial\mathcal{A}$ ⊗, $C \cup \{2\} \in \partial\mathcal{A}$

Ha $C \cup \{2\} \in \partial R_{12}(\mathcal{A})$ is igaz lenne $\underset{\text{így}}{\Rightarrow}$ $C \cup \{1,2\} \in R_{12}(\mathcal{A}) \Rightarrow C \cup \{1,2\} \in \mathcal{A}$; $C \cup \{2,3\} \in R_{12}(\mathcal{A}) \Rightarrow C \cup \{1,3\} \in \mathcal{A}$ ⊗ ↯

Tétel: Ha $\mathcal{A} \subseteq \binom{\mathbb{N}}{r}$, $|\mathcal{A}| = m = b^{(r)}(m_r, \dots, m_s)$ akkor $|\partial\mathcal{A}| \ge |\partial B^{(r)}(m_r, \dots, m_s)|$

Biz: indukcióval

$r=1$ esetén $\forall m$-re igaz ✓

$m=1$ esetén $\forall r$-re igaz

Indukciós feltevés: $r' < r$ esetén $\forall m$-re igaz; $m' < m$ esetén $\forall r$-re igaz

Lemma alapján feltehetjük, hogy $\mathcal{A}$ balra tolt.

Bontsuk fel $\mathcal{A}$-t: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$: $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} : 1 \notin A\}$, $\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : 1 \in A\}$

$$\partial\mathcal{A} = \partial\mathcal{A}_0 \cup \partial\mathcal{A}_1 = \partial\mathcal{A}_1$$

Balra toltság miatt $\partial\mathcal{A}_0 \subseteq \partial\mathcal{A}_1$

Ezért $|\partial\mathcal{A}| = |\partial\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}| + |\partial(\mathcal{A}_1 \ominus \{1\})| = |\mathcal{A}_1| + |\partial(\mathcal{A}_1 \ominus \{1\})|$ ⊛

$\partial\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1 \ominus \{1\} \cup (\partial(\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}) \oplus \{1\})$

Állítás: $|\mathcal{A}_1| \ge b^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1)$

Biz: Indirekten, tegyük fel, hogy $|\mathcal{A}_1| < b^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1)$

Ekkor $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}| - |\mathcal{A}_1| > m - b^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1) = b^{(r)}(m_r-1, \dots, m_s-1)$

$\Downarrow$ indukciós feltevés miatt

$$|\partial\mathcal{A}_0| \ge |\partial B^{(r)}(m_r-1, \dots, m_s-1)| = b^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1) \overset{\text{indirekt feltevés}}{>} |\mathcal{A}_1|$$

↯ Ellentmondás, mert $\partial\mathcal{A}_0 \subseteq (\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}) \Rightarrow |\partial\mathcal{A}_0| \le |\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}| = |\mathcal{A}_1|$

⊛ $\ge b^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1) + |\partial(\underbrace{\mathcal{A}_1 \ominus \{1\}}_{\subseteq \binom{\mathbb{N}}{r-1}})| \overset{\text{indukciós feltevés}}{\ge} b^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1) + |\partial B^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1)| =$

$= b^{(r-1)}(m_r-1, \dots, m_s-1) + b^{(r-2)}(m_r-1, \dots, m_s-1) = b^{(r-1)}(m_r, \dots, m_s) = |\partial B^{(r)}(m_r, \dots, m_s)|$

Tehát $|\partial\mathcal{A}| \ge |\partial B^{(r)}(m_r, \dots, m_s)|$

(7) Erdős – Ko – Rado tétel

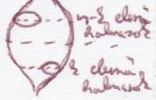
Tétel: Ha $\mathcal{F}\subseteq\binom{[n]}{k}$ metsző halmazrendszer $(\forall F,F'\in\mathcal{F}: F\cap F'\neq\emptyset)$ és $k<\frac{n}{2}$, akkor $|\mathcal{F}|\le\binom{n-1}{k-1}$ és ez éles.

Biz (Daykin)

Éles eset: „leszórt" rendszer: $\mathcal{F}:=\{F\in\binom{[n]}{k}: 1\in F\}$ → $\binom{n-1}{k-1}$ db elem

Bizonyítsuk, hogy $\mathcal{F}$ metsző rendszer esetén $|\mathcal{F}|\le\binom{n-1}{k-1}$

Legyen $\mathcal{F}^c:=\{F^c\in\binom{[n]}{n-k}: F=[n]\setminus F^c\in\mathcal{F}\}$, $|\mathcal{F}^c|=|\mathcal{F}|$



Indirekten tegyük fel, hogy $|\mathcal{F}|=|\mathcal{F}^c|>\binom{n-1}{k-1}=\binom{n-1}{n-k}$

Kruskal-Katona tétel alapján $|\partial\mathcal{F}^c|\ge\binom{n-1}{n-k-1}$

$$\Downarrow$$

$$|\partial(\partial\mathcal{F}^c)|\ge\binom{n-1}{n-k-2}$$

$\Downarrow$ k. szinten lévő árnyéka

$$\mathcal{G}:=\partial^{(n-2k)}\mathcal{F}^c = |\underbrace{\partial(\partial(\dots(\partial\mathcal{F}^c)))}_{n-2k}|\ge\binom{n-1}{k}$$

$\mathcal{F}$ metsző tulajdonsága miatt $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}=\emptyset$, mert ha $F,F'\in\mathcal{F}$ akkor $F\cap F'\neq\emptyset$ és így $F'\not\subseteq F^c$, azaz az $\mathcal{F}^c$ halmaz $\partial^{(n-2k)}\mathcal{F}^c$ árnyéka nem tartalmazhat $\mathcal{F}$-beli halmazt.

Tudjuk, hogy $|\mathcal{F}|>\binom{n-1}{k-1}$ (indirekt feltevés). és $|\mathcal{G}|\ge\binom{n-1}{k}$

$$|\mathcal{F}|+|\mathcal{G}|>\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}\Longrightarrow \mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$$, több halmaz $\left(\mathcal{F}\subseteq\binom{[n]}{k}\right)$ van, van fedés!

↯

Ellentmondás, $|\mathcal{F}|\le\binom{n-1}{k-1}$

Biz (Katona)

Az $\mathcal{F}\subseteq\binom{[n]}{k}$ metsző rendszer elemeit hozzárendeljük párként olyan π ciklikus permutációjához az $[n]=\{1,2,\dots,n\}$ elemeinek, ahol a megfelelő $F\in\mathcal{F}$ elemei „ívet" alkotnak


ív

Kétféleképpen számoljuk le (F,π) párokat

- Rögzített F-hez: $|F|!\cdot(n-|F|)!$ db π tartozik
- Rögzített π körpermutációhoz: legfeljebb k db $F\in\mathcal{F}$ tartozik

Mert: Rögzítsünk egy $F\in\mathcal{F}$-et ami párja π-nek.
Minden más, π-vel párban álló $F'\in\mathcal{F}$ „kezdőpontja" az F-beli „közök" egyike
$k-1$ „köz" van, és $k<\frac{n}{2}$,
ezért mindegyikből csak az egyik irányba induló k-as szerepelhet
$\forall F$, tehát összesen max k párja lehet π-nek.

Tehát $\sum_{F\in\mathcal{F}}|F|!\cdot(n-|F|)!=|\mathcal{F}|\,k!\,(n-k)!\le k(n-1)!$

$$|\mathcal{F}|\le\frac{k\cdot(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\binom{n-1}{k-1}$$

⑧ Lovász-Kneser tétel, Greene bizonyítása, Dolnyikov tétele

Tétel: Kneser sejtés igaz: $\chi(KG(n,k)) = n-2k+2$

Def: $n \ge 2k$ esetén a $KG(n,k)$ Kneser gráf: $V(KG(n,k)) = \binom{[n]}{k}$

$E(KG(n,k)) = \{\{a,b\} : a,b \in \binom{[n]}{k}, a \cap b = \emptyset\}$

Biz (Greene)

Vegyünk egy S^{n-2k+1} gömböt és rajta n általános helyzetű pontot. ($\nexists$ $n-2k+1$-nél több 1 főkörön)

Vegyük $KG(n,k)$-nak egy rögzített jó színezését az $1,2,\dots,m$ színekkel.

Definiáljuk az $A_i \subseteq S^{n-2k+1}$ nyílt halmazokat az alábbi módon:

$A_i = \{x \in S^{n-2k+1}$: $H(x)$ tartalmaz az n pontból k olyat, amely által alkotott k-as, mint $KG(n,k)$ csúcsa az i. színt kapta a színezésben.$\}$

$x \in S^d$ esetén az x középpontú nyílt félgömb jele $H(x)$

- $\forall i$ A_i nyílt
- $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ nem fedi a gömböt
  $B := S^{n-2k+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ – (B zárt)
  } Nyilván definíció szerint $B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = S^{n-2k+1}$
- $\forall i$, $\forall x \in S^{n-2k+1}$: ha $x \in A_i$, akkor $-x \notin A_i$, mert:
  - ha $x \in A_i \Rightarrow$ van $H(x)$-en k pont, amelyek színe i
  - ha $-x \in A_i$ igaz lenne $\Rightarrow$ $H(-x)$-en is lenne k pont, de $H(x) \cap H(-x) = \emptyset$, tehát élt alkotnának $KG(n,k)$ két csúcsaként ezért nem lenne jó színezés! ↯

Megmutatjuk, hogy $x \in B \Rightarrow -x \notin B$

Mivel ha $x \in B \Rightarrow H(x)$ max $k-1$ pontot tartalmaz az n közül. Ha $-x \in B$ is igaz lenne, $H(-x)$-re is igaz lenne. Ekkor azonban $H(x)$-et és $H(-x)$-et elválasztó főkörön lenne legalább $n-2(k-1)$ pont, ami ellentmondás ↯ $n-2k+2 > n-2k+1$

⊛ Tehát $\boxed{LS_{mixed}}$ alkalmazható, és azt adja, hogy:

$m+1 \ge n-2k+1+2 \Rightarrow m \ge n-2k+2 \Rightarrow \chi(KG(n,k)) \ge n-2k+2$ ⊛

m db A_i 1 db B

⊛ **Tétel:** LS_{mixed}: (Borsuk-Ulam tétel Lyusternik-Shnirel'man verziója)

Ha $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq S^d$, amelyekre igaz, hogy

1) $\forall i$ A_i zárt (vagy nyílt ← mixed verzió)
2) $\forall i$ $\nexists x \in S^d$, hogy $x, -x \in A_i$ (antipodális pontpár mentesek az A_i-k)
3) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S^d$

akkor $m \ge d+2$

Def: Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer. Az $\mathcal{F}$-hez tartozó $KG(\mathcal{F})$ általánosított Kneser gráf a következő: $V(KG(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$

$E(KG(\mathcal{F})) = \{\{A,B\} : A,B \in \mathcal{F}, A \cap B = \emptyset\}$

Def: Egy $\mathcal{F} = (V(\mathcal{F}), E(\mathcal{F}))$ hipergráfhoz a $cd_2(\mathcal{F})$ ún. 2-es „coloring deficiency" mennyiség a következő:

$cd_2(\mathcal{F}) := \min\{|U| : U \subseteq V(\mathcal{F}), \chi(\mathcal{F}[V(\mathcal{F}) \setminus U]) \le 2\}$

Tétel: Dolnyikov

Tetszőleges $\mathcal{F}$ hipergráfon $\chi(KG(\mathcal{F})) \ge cd_2(\mathcal{F})$

Dolnyikov ⇒ Lovász-Kneser

$cd_2\left(\binom{[n]}{k}\right) = \underbrace{n-2(k-1)}_{} = n-2k+2$ $\left(k \le \frac{n}{2}\right)$

annyi a minimális U elemszáma, amit elhagyva ≤ 2 lesz a gráf kromatikus száma

k pontot ugyanolyanra színezve lenne egy egyszínű él!

⊛ $\chi(KG(n,k)) \le n-2k+2$ ezt már Kneser is észrevette: Mohó algoritmus!

$i = 1,2,\dots, n-2k+1$

ha $i = \min a$ ahol $a \in V(KG(n,k))$ akkor legyen $c(a) = i$

és ha $\min a > n-2k+1$, akkor $c(a) = n-2k+2$

ez egy jó színezés!

(9) Lovász-Kneser tétel, Bárány bizonyítása, Schrijver tétele

Def: $n \geq 2k$ esetén a $KG(n,k)$ Kneser gráf: $V(KG(n,k)) = \binom{[n]}{k}$

$$E(KG(n,k)) = \left\{\{a,b\} : a,b \in \binom{[n]}{k},\ a \cap b = \emptyset\right\}$$

Tétel: Kneser sejtés igaz: $\chi(KG(n,k)) = n-2k+2$

Lemma (Gale): $n \geq 2k$ esetén az S^{n-2k} gömbön elhelyezhető n pont úgy, hogy minden nyílt félgömbön legyen közülük legalább k.

Biz (Bárány, Lovász-Kneser tételhez)

Tekintsük $KG(n,k)$ egy jó színezését az $1,2,\dots,m$ színekkel és egy S^{n-2k} gömböt rajta az alaphalmaz n pontjával azonosított n ponttal, amik a Gale lemma szerint vannak elhelyezve.

Definiáljuk az $A_i \subseteq S^{n-2k}$ nyílt halmazokat az alábbi módon:

$A_i = \{x \in S^{n-2k} : H(x)$ tartalmaz az n pont közül k darabot, amely által alkotott k-as, mint $KG(n,k)$ csúcsa az i. színt kapta a színezésben. $\}$

$x \in S^d$ esetén az x középpontú nyílt félgömb jele $H(x)$

- $\forall i$ A_i nyílt.
- $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S^{n-2k}$, mivel $\forall x \in S^{n-2k}$-ra $H(x)$ tartalmaz legalább k pontot és a rajta lévő k-asnak van valamilyen színe $KG(n,k)$ csúcsaiból
- $\forall i$, $\forall x \in S^{n-2k}$: ha $x \in A_i$, akkor $-x \notin A_i$, mert:
  - ha $x \in A_i \Rightarrow$ van $H(x)$-en k pont, aminek színe i
  - ha $-x \in A_i$ igaz lenne $\Rightarrow$ $H(-x)$-en is lenne k pont, de $H(x) \cap H(-x) = \emptyset$, ezért élt alkotnak $KG(n,k)$ beli csúcsként, de ez így nem lenne jó színezés, ellentmondás! ↯

Tehát (*) $\boxed{LS_0}$ alkalmazható, és azt adja, hogy:

$$m \geq n-2k+2 \quad \Rightarrow \quad \chi(KG(n,k)) \geq n-2k+2$$

$\chi(KG(n,k)) \leq n-2k+2$, ezt már Kneser is észrevette: Mohó algoritmus!

$i = 1,2,\dots,n-2k+1$

ha $i = \min a$, ahol $a \in V(KG(n,k))$, akkor legyen $c(a) = i$

és ha $\min a > n-2k+1$, akkor legyen $c(a) = n-2k+2$

Ez egy jó színezés!

(*) **Tétel:** LS_0 (Borsuk-Ulam tétel Lyusternik-Shnirelman verziója)

Ha $A_1,\dots,A_m \subseteq S^d$, amikre igaz hogy

1) $\forall i$ A_i nyílt
2) $\forall i$ $\nexists x \in S^d$, hogy $x, -x \in A_i$ (antipodális pontpár mentesek az A_i-k)
3) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S^d$

akkor $m \geq d+2$

Def: $n \geq 2k$ esetén az $SG(n,k)$ Schrijver gráf a $KG(n,k)$ Kneser gráfnak azon feszített részgráfja, amelynek csúcsai a

$$V(SG(n,k)) := \left\{A \in \binom{[n]}{k} : \{i,i+1\} \not\subseteq A\ (i=1,\dots,n-1),\ \{1,n\} \not\subseteq A\right\}$$

$$E(SG(n,k)) = E(KG(n,k))$$

Tétel: Schrijver

$$\chi(SG(n,k)) = n-2k+2$$

Lemma: (Erős Gale)

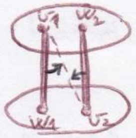
S^{n-2k} gömbön elhelyezhető n pont úgy, hogy minden nyílt félgömbön legyen olyan k pont, amik stabil k-as halmazt alkotnak.

Biz: (Schrijver tétele)

Bárány bizonyításával megegyezik, Erős Gale lemmát használva!

⑩ Stabil párosítás

Def: Adott G gráf, M párosítás és minden $v \in V(G)$ csúcshoz egy preferencia sorrend a többi csúcs valamilyen sorrendezésével.
M stabil párosítás, ha $\nexists\, v_1, v_2 \in V(G)$, akiknek M párosításban párjuk $w_1, w_2 \in V(G)$, de v_1 preferencia listájában v_2 előrébb szerepel, mint w_1, és v_2 preferencia listájában v_1 előrébb szerepel, mint w_2.



pl. egy páros gráfban

! Nem csak páros gráfban beszélhetünk stabil párosításról.
! Nem biztos, hogy létezik stabil párosítás.

Tétel: (Gale-Shapley)
Páros gráfban mindig van stabil párosítás.

Biz: Algoritmus az előállításához: 2 részes menetek

1). • ∀ férfi preferencia listáján szereplő első helyezettet felkéri házasságra
 • ∀ nő válaszol a számára legkedvesebb felkérőnek, és elutasítja a többit
2). • ∀ férfi, aki pozitív választ kapott, várakozik
 • ∀ férfi, akit elutasítottak, felkéri a listáján soron következő nőt
 • ∀ nő az újonnan érkezett felkérésekkel felülírhatják eddigi partnerüket, ha az új kérő kedvesebb számukra.

Ezek a lépések ismétlődnek, míg van változás.

Az algoritmus helyes eredményt ad.
Indirekten tegyük fel, hogy a kapott párosítás nem stabil.
Tehát van egy férfi és egy nő akik egymást jobban kedvelik, mint a végleges párjukat.

2 eset van:
1) A férfi küldött levelet a nőnek.
A nőnek akkor őt kellett volna választania a többi helyett.
Mivel nem tette, volt más ajánlata, akit jobban kedvelt. Ellentmondás.
2) A férfi nem küldött levelet a nőnek.
Tehát volt más nő, akit jobban kedvelt, és aki őt is elfogadta.
Ellentmondás.

Tehát nem történhet meg a feltételezett eset.

! Algoritmus más párosításokat ad a két irányból futtatva!

Szemléltetés: hallgatók jelentkezése iskolákba
kit hova vesznek fel végül: hallgatók felől futtatjuk az algoritmust

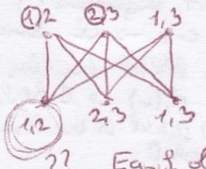
(11) Listaszínezés, Dinitz probléma, Galvin tétele

Def: Adott G gráf, és minden v csúcsához egy $L(v)$ színlista. G-nek adott listákból való listaszínezése egy olyan
$c: V(G) \to \bigcup_{v \in V(G)} L(v)$ függvény, amire $\forall v \in V(G)$ $c(v) \in L(v)$
és $uv \in E(G) \Rightarrow c(u) \neq c(v)$

Def: Egy G gráf $ch(G)$ listaszínezési száma (choice number) az a minimális $k \in \mathbb{N}$, amire igaz, hogy ha $\forall v \in V(G)$ $|L(v)| \geq k$, akkor G-nek létezik (jó) listaszínezése az adott listákból.

$ch(G) \geq \chi(G)$

- Nem lehet kisebb, ha $\chi(G)$-nél kevesebb színt tartalmaznak a listák, nem lehet jól kiszínezni a listákból.
- Nem lehet egyenlő, van ellenpélda, ahol $\chi(G)$ méretű listákkal van olyan színlista, amivel nem kiszínezhető a gráf: $K_{3,3}$



Egyik oldalon kettőt lefixálva másik oldalon lesz olyan csúcs, amit már nem tudunk jól kiszínezni.

Dinitz-probléma

Adott $n \times n$-es táblázat, $m \geq n$ különböző szimbólum, táblázat cellánként m szimbólum közül n.

Kérdés: kiválasztható-e minden cellában egy szimbólum úgy, hogy latin négyzetet kapjunk? (Minden sorban és oszlopban különböző szimbólumok legyenek)

Más megfogalmazással: $n \times n$-es táblázat $\approx$ páros gráf élmátrixa

Kérdés: $ch(L(K_{n,n})) \overset{?}{=} n$ (ahol $L(K_{n,n})$ $K_{n,n}$ gráf élgráfja)

Def: $L(G)$ gráf élgráfja: $V(L(G)) = E(G)$
$E(L(G)) = \{ef : e \cap f \neq \emptyset\}$

Tétel: (Galvin)
Ha F páros gráf, $G = L(F)$-re igaz, hogy $ch(G) = \chi(G)$

Következmény: Galvin $\Rightarrow$ Dinitz

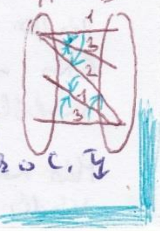
Def: Egy D irányított gráfban kernel egy olyan $U \subseteq V(D)$ csúcshalmaz, amire teljesülnek az alábbiak:
1) U független halmaz,
2) $\forall v \in V(D) \setminus U$ $\exists u \in U$, hogy $\vec{vu} \in E(D)$

Lemma: Legyen G és $\forall v \in V(G)$-hez egy $L(v)$ színlista.
Ha G irányítható úgy, hogy a következők teljesüljenek:
1) $\forall v \in V(G)$ $|L(v)| \geq d_+(v) + 1$ ($d_+(v)$: kimenő fokszám)
2) $\forall$ feszített részgráfban van kernel

Biz: Teljes indukcióval $|G|$-re.
① $|G| = 1$ $L(v) \geq 1$, kiszínezhető. ✓
② Legyen c egy szín ami szerepel a listákban.
$U := \{v \in V(G) : c \in L(v)\}$
U-ban van kernel 2. feltétel miatt, függetlenek, kiszínezhetjük őket c-vel.
Többi $v \in U$ listájából töröljük c-t. Legyen kernel U_c
Töröljük kiszínezett csúcsokat $\to$ 1) feltétel továbbra is teljesül, hisz $|L(v)|$ és $d_+(v)$ is 1-gyel csökkent minden $v \in U \setminus U_c$ csúcsnál.
2) feltétel is továbbra is teljesül.
Indukciós feltétel miatt új gráf színezhető.

Biz: Lemmára vezetjük vissza, irányítást keresünk
Rögzítünk egy jó színezést F élein (G csúcsain): $1, 2, \ldots \chi(G)$ színekkel
Irányítás: $e, f \in V(G) = EF$
$\{e, f\} \in E(G)$ esetén $e \to f$, ha $\begin{cases} e \cap f \in A \text{ és } c(e) < c(f) \\ e \cap f \in B \text{ és } c(e) > c(f) \end{cases}$

$\forall v \in V(G)$-re egy $|L(v)| = \chi(G)$ méretű listát véve teljesülnek Lemma feltételei:
1) $|L(v)| \geq d_+(v) + 1$, mivel kimenő él csak vagy kisebb vagy nagyobb színű élbe mutathat, ami $\chi(G) - 1$ lehetőség



2) Minden részgráfban jó kernel egy stabil párosítás F-ben!
Indirekten tegyük fel, hogy $\exists$ BC él, ami nem mutat kernelbe
a) ha B-nek és C-nek sincs kernel beli éle ↯, BC-t bevettük volna!
b) csak C-nek van $\to$ BC nem mutat kernelbe $=$ C-nek B preferáltabb, B-nek is C, ↯
c) mindkettőnek másik szomszédja van kernelben ↯

(12) Thomassen tétel

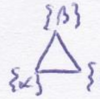
Tétel: G síkgráf $\Longrightarrow ch(G) \le 5$

Biz: Erősebbet bizonyítunk: – ha G „majdnem háromszögelés" (véges tartományokat 3 él határolja)
– és a következő módon vannak színlisták,
$\Rightarrow$ van jó listaszínezés!

- Külső tartomány határán rögzítünk két csúcsot, a és b
  $L(a)=\{\alpha\}$, $L(b)=\{\beta\}$, $\alpha \neq \beta$
- Minden más v csúcsra a külső tartományon $|L(v)|=3$
- Minden belső v csúcsra $|L(v)|=5$.

Teljes indukcióval (indukciós lépéshez kell a szigorúbb feltétel)
$n=|V(G)|$-re:

1) $n=3$ van jó listaszínezés



$\leftarrow$ 3 szín közül biztos van $l_i \neq \alpha$ $l_i \neq \beta$

2) indukciós lépés, két lehetséges eset:

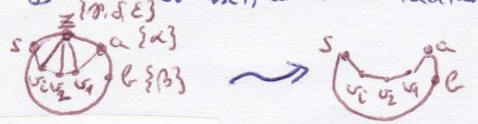
a) van hosszú átló

$|V(G_1)|<|V(G)|$
$|V(G_2)|<|V(G)|$

G_1-en vagy G_2-n ott van a és b $\xRightarrow[\text{lépés}]{\text{indukciós}}$ őt már kiszíneztük korábban jól

Ekkor hosszú átlón lévő két csúcs színt kap $\Rightarrow$ rögzített lett, így már rá is igaz egy korábbi eset, amit ki tudtunk színezni!

b) nincs hosszú átló



Z csúcsnál még van legalább 2 szín, ami nem α.
Válasszunk 2-t, $\{\gamma, \delta\}$, és ezeket töröljük v_i belső csúcsok listáiról. $\forall v_i$ listáján így is marad legalább 3 engedélyezett szín.
Z csúcsot törölve ugyanilyen tulajdonságú síkgráfot kapunk: a és b rögzített, külső tartomány többi csúcsánál lista ≥ 3 elemű kiszínezhető tehát úgy, ahogy korábban kiszíneztük.

Z csúcsot is ki tudjuk színezni, hiszen $\{\gamma, \delta\}$ egyik v_i listáján sem szerepelt, nem kaphatták ezeket a színeket, így engedélyezettek maradtak. Z másik külső szomszédja S legfeljebb egy színt tilt le a kettő közül, így marad egy szín amivel kiszínezhetjük Z-t.

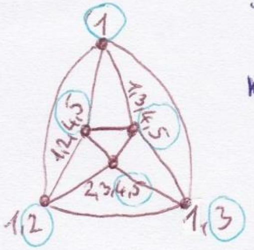
Így haladva az indukcióval tehát eljutunk a teljes gráf kiszínezéséig.

Mivel ezekkel a megszorításokkal rendelkező síkgráfnak van jó listaszínezése, ha minden lista legfeljebb 5 elemű, az általánosabb síkgráfoknak is létezik jó listaszínezése 5 elemű listák esetén.

13 Voigt tétel

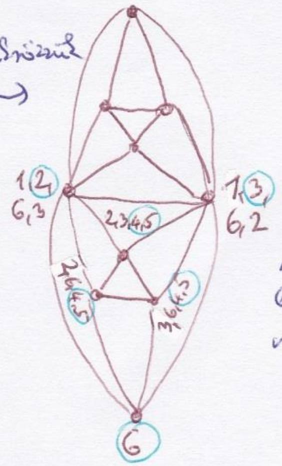
Tétel: $\exists$ G síkgráf, amire $ch(G) > 4$

Biz: Mutatunk egy síkgráfot, amelynél, ha minden lista legfeljebb 4 elemű, tudunk úgy színlistákat adni a csúcsoknak, hogy ne lehessen jól kiszínezni a gráfot.



Ez így nem kiszínezhető ✓

Megtükrözzük

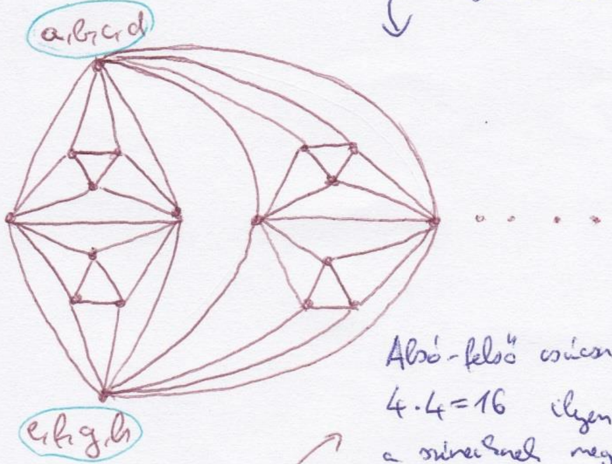


Ez sem kiszínezhető ✓

Alsó-felső csúcson kívül mindegyik lista 4 elemű ✓

Alsó-felső csúcsnál hogyan legyen úgy 4 szín, hogy ne lehessen kiszínezni?

Megsokszorozzuk



Alsó-felső csúcsnál 4-4 szín

$4 \cdot 4 = 16$ ilyen "banánt" alkotunk a színeknek megfelelően

$16+1=17$ ilyen "banán" jó konstrukció (130 csúcs van)

Mindegyik letilt egy színt a listáról, 17 „banán" esetén nincs jó színezés

(14) Páratlanváros és párosváros tétel

Tétel (1-2): Ha $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ úgy, hogy

1) $\forall F \in \mathcal{F}$ esetén [páratlan / páros]

2) $\forall F, F' \in \mathcal{F}$, $F \neq F'$ esetén $|F \cap F'|$ páros

akkor [$|\mathcal{F}| \leq n$ / $|\mathcal{F}| \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$], és ez éles.

Biz: Páratlan

Élesség: $\mathcal{F} := \{\{i\} : i = 1, \dots, n\}$ jó konstrukció, $|\mathcal{F}| = n$

Tehát mindenki egymaga egy csoport, $|F \cap F'| = 0$

Tekintsük a klubbok egy feltételeknek megfelelő rendszerét, és $\forall F \in \mathcal{F}$-nek a karakterisztikus vektorát: $\lambda_{F,i} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in F \\ 0 & \text{ha } i \notin F \end{cases}$

Ezek a vektorok $GF(2)$ felett lineárisan függetlenek.
kételemű test, Galois Field

Mivel: Lin. függetlenek, ha $\sum_{i=1}^{|\mathcal{F}|} \alpha_i \lambda_F = 0$ egyenletnek nincs megoldása a triviálison kívül. ($\alpha_i = 0$)

Szorozzuk be egyenletet $\lambda_{F'}$-vel

$\alpha_i \cdot (\lambda_F \cdot \lambda_{F'})$ skalár szorzatok összege a bal oldal.

Vegyük észre, hogy $\lambda_F \cdot \lambda_{F'} = |F \cap F'| \pmod 2 = \begin{cases} 0 & \text{ha } F \neq F' \\ 1 & \text{ha } F = F' \end{cases}$

$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\lambda_F \cdot \lambda_{F'}) = \underline{0}$ egyenlet bal oldalán így az összetevők

$\alpha_i \cdot 0$ minden $F \neq F'$ esetén, és $\alpha_i \cdot 1$ $F = F'$ esetén.

Hogy az összeg 0 legyen, α_i-nek 0-nak kell lennie.

Ez eljátszható $\forall F \in \mathcal{F}$-re, így kijön, hogy $\forall i$ $\alpha_i = 0$, ami az egyenlet triviális megoldását adja, a vektorok tehát valóban függetlenek!

Mivel n dimenziós térben legfeljebb n lineárisan független vektor van, $|\mathcal{F}| \leq n$ valóban igaz.

Biz: Páros

Élesség: elemeket párokba állítjuk (ha páratlan sok van, egyet figyelmen kívül hagyunk)

vesszük az összes részhalmazt, ami a párokat egy elemként kezeli (vagy mindkét tagját tartalmazza, vagy egyiket se)

$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ilyen részhalmaz van, $|\mathcal{F}| = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

Tekintsük a klubbok egy feltételeknek megfelelő rendszerét és $\forall F \in \mathcal{F}$-nek a karakterisztikus vektorait: $\lambda_{F,i} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \in F \\ 0 & \text{ha } i \notin F \end{cases}$

Legyen U az ezek által kifeszített altér $GF(2)$ felett
Kételemű test, Galois Field

Legyen $U^\perp$ az az altér, mely vektorai merőlegesek U vektoraira.

$U^\perp = \{\underline{v} \in \{0,1\}^n : \underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \ \forall \underline{u}\}$

Tekintsük $\mathcal{F}$-beli halmazok karakterisztikus vektoraiból mint sorokból álló mátrixot, mint egy lineáris leképezés mátrixát ($\underline{\underline{A}}$)

Ennek a lineáris leképezésnek a magtere az $U^\perp$ altér

Vegyük észre, hogy a feltételek miatt $U \subseteq U^\perp$

(Mivel minden $|F|$ és $|F \cap F'|$ páros, önmagukra és egymásra is merőlegesek!)

Dimenziótétel alapján $\dim(\mathrm{Ker}\, \underline{\underline{A}}) + \dim(\mathrm{Im}\, \underline{\underline{A}}) = n$

Tudjuk, hogy $\dim(\mathrm{Im}\, \underline{\underline{A}}) = \dim U$ és $\dim(\mathrm{Ker}\, \underline{\underline{A}}) = \dim U^\perp$

$U \subseteq U^\perp$ miatt $\dim U \leq \dim U^\perp$

Tehát $n = \dim U^\perp + \dim U \geq 2 \cdot \dim U$

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq \dim U$$

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geq |U|$$

$$\Downarrow$$

$$|\mathcal{F}| \leq 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

(15) Graham – Pollak tétel

Tétel: Ha $F_1, \dots, F_m$ teljes páros gráfok úgy, hogy $\forall i$-re $V(F_i) \subseteq [n]$ és $\bigcup_{i=1}^{m} E(F_i) = E(K_n)$ és $\forall i \neq j$-re $E(F_i) \cap E(F_j) = \emptyset$
(F_i teljes páros gráfok partícionálják K_n élhalmazát)
akkor $m \geq n-1$. Ez éles, hiszen $n-1$ csillag elég.

Biz: Rendeljük $x_1, \dots, x_n$ változókat a csúcsokhoz

Legyenek a partícionáló páros gráfok színosztályai $\underset{\text{left}}{L_i}$ és $\underset{\text{right}}{R_i}$

Tekintsük $c = 1, \dots, n$ változókra felírt $m+1$ db egyenletet:

(*) • $\sum_{i \in L_j} x_i = 0 \qquad j = 1, 2, \dots, m$

(**) • $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Egyenletrendszerek létező megoldása: $\forall i \quad x_i = 0$

Megmutatjuk, hogy ez az egyetlen.

Legyen $c_1, c_2, \dots, c_n$ egy tetszőleges megoldás.

F_j-k partícionáló tulajdonsága miatt $\sum_{i \neq j} c_i c_j = \sum_{j=1}^{m} \left[\left(\sum_{i \in L_j} c_i \right) \left(\sum_{i \in R_j} c_i \right) \right]$

$$\underbrace{0 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right)^2}_{(**)^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} c_i c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{m} \left[\underbrace{\left(\sum_{i \in L_j} c_i \right)}_{\overset{(*)}{=} 0} \left(\sum_{i \in R_j} c_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

Tehát $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2$, ami tényleg egyedül úgy teljesülhet, hogy $\forall i \; c_i = 0$.

Mivel az egyenletrendszer megoldása egyértelmű, a változók száma nem lehet több az egyenletek számánál!

$n \leq m+1 \quad \Rightarrow \quad m \geq n-1$

16) Borsuk „sejtés”, Kahn-Kalai-Nilli-féle cáfolat

Kérdés: Igaz-e, hogy tetszőleges $A \subseteq \mathbb{R}^d$ konvex halmaz felbontható legfeljebb $d+1$ olyan részhalmazára, melyek mindegyikének kisebb az átmérője, mint A átmérője.

Tétel: (Kahn-Kalai)
Létezik elég nagy d-re olyan $\mathbb{R}^d$-beli konvex halmaz, hogy a felbontásához több mint $c^{\sqrt{d}}$ db részhalmaz kell, ahol $c>1$.

Biz (A. Nilli)

$\mathcal{F} := \{x \in \{-1,1\}^n : x_1 = 1 \text{ és } |\{i : x_i = -1\}| \equiv 0 \pmod 2\}$ (1-essel kezdődik és páros sok -1 van benne)

$n := 4p$, ahol p egy páratlan prím

Lemma: Ha $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-ben nincsenek merőleges vektorpárok, akkor $|\mathcal{G}| \le \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i}$ (merőlegesek, ha skalárszorzatuk 0)

Biz: Vegyük észre, hogy

1) $x_1 = 1$ miatt $\underline{x} \cdot \underline{y} = -4p$ nem fordulhat elő, ha $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{F}$
$\underline{x} \cdot \underline{y} = 4p \iff \underline{x} = \underline{y}$, ha $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{F}$

2) $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{F}$ esetén $|\{i : x_i \cdot y_i = 1\}| \equiv |\{i : x_i \cdot y_i = -1\}| \pmod 4$

+++ +--- x
++ -- ++ -- y
a b c d

$\longrightarrow$ $c+d \equiv 0 \pmod 2$ $(x_i = -1)$
$b+d \equiv 0 \pmod 2$ $(y_i = -1)$

$+$

$b+c+2d \equiv 0 \pmod 2$

$\Downarrow$

$|\{i : x_i \cdot y_i = -1\}| = b+c \equiv 0 \pmod 2$

$|\{i : x_i \cdot y_i = -1\}| + |\{i : x_i \cdot y_i = 1\}| = n = 4p = a+b+c+d$

Tehát ha $b+c \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow a+d \equiv 0 \pmod 2$ kell legyen $\Rightarrow$
$\Rightarrow b+c \equiv a+d \pmod 4$, hiszen $4 \mid a+b+c+d$.

2) $\Rightarrow \underline{x} \cdot \underline{y} \equiv 0 \pmod 4$

$\underline{x} \cdot \underline{y} \equiv 0 \pmod p \iff \underline{x} \cdot \underline{y} = \boxed{-4p}$ vagy $\boxed{0}$ vagy $4p$

$-4p$: 1) miatt nem lehet

0: $\mathcal{G}$-ben nem lehetnek merőleges vektorpárok

$4p \Updownarrow \underline{x} = \underline{y}$

Tehát $x, y \in \mathcal{G}$ esetén $\underline{x} \cdot \underline{y} \equiv 0 \pmod p \iff \underline{x} = \underline{y}$ $\circledast$

- Definiáljunk $\forall \underline{a} \in \mathcal{G}$-hez egy $GF(p)$ feletti polinomot így: $f_{\underline{a}}(\underline{x}) := \prod_{i=1}^{p-1} (\underline{a} \cdot \underline{x} - i)$

$f_{\underline{a}}(\underline{x}) = 0$ $\underline{x} \in \mathcal{G}$ esetén $\overset{\circledast \text{ miatt}}{\iff}$ $\underline{x} = \underline{a}$

- Definiáljuk $\hat{f}_{\underline{a}}(\underline{x})$ polinomokat úgy, hogy $x_i^2 = 1$-el „egyszerűsítjük” $f_{\underline{a}}(x)$-et

Az így kapott polinomrendszer az $\{\hat{f}_{\underline{a}}(\underline{x})\}_{\underline{a} \in \mathcal{G}}$

Mivel $\underline{x} \in \mathcal{G}$ esetén $x_i = \pm 1$, ezért $\underline{x} \in \mathcal{G}$-re $\hat{f}_{\underline{a}}(x) = f_{\underline{a}}(x)$

Állítás: $\{\hat{f}_{\underline{a}}(\underline{x})\}_{\underline{a} \in \mathcal{G}}$ elemei lineárisan függetlenek

$\sum_{\underline{a} \in \mathcal{G}} \lambda_{\underline{a}} \hat{f}_{\underline{a}}(\underline{x}) = 0 \longrightarrow$ ebbe $\underline{x} = \underline{b} \in \mathcal{G}$-t helyettesítve $\lambda_{\underline{b}} \hat{f}_{\underline{b}}(\underline{x}) = 0$

$\Updownarrow$

$\lambda_{\underline{b}} = 0$

Ez minden $\underline{b} \in \mathcal{G}$-re igaz, tehát az összes $\lambda_{\underline{b}} = 0$, tehát függetlenek!

Ebből következik, hogy $|\mathcal{G}| \le \dim \{\hat{f}_{\underline{a}}(\underline{x})\}_{\underline{a} \in \mathcal{G}} \le \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i}$ ← ennyi különböző monom fordulhat elő a polinomokban

Definiáljuk az $S \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ halmazt így: $S = \{\underline{x} \otimes \underline{x} : \underline{x} \in \mathcal{F}\}$

$\underline{x} \otimes \underline{x} := (x_1x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_n, x_2x_1, \ldots, x_nx_n)$

Vegyük észre, hogy:

- $(\underline{x} \otimes \underline{x}) \cdot (\underline{y} \otimes \underline{y}) = (\underline{x} \cdot \underline{y})^2$ $\quad \sum_{i,j} (x_i \cdot x_j)(y_i \cdot y_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i\right)^2$
- $(\underline{x} \otimes \underline{x})$ és $(\underline{y} \otimes \underline{y})$ akkor van a legtávolabb, ha merőlegesek
- $(\underline{x} \otimes \underline{x}) \perp (\underline{y} \otimes \underline{y}) \iff \underline{x} \perp \underline{y}$

Tehát, ha S-et (ill. annak konvex burkát) felbontjuk $S_1 \cup S_2 \cdots \cup S_m$ részekre úgy, hogy $\forall i$-re S_i átmérője S átmérőjénél kisebb, akkor $\forall i$-re igaz, hogy S_i-ben nincsenek merőleges vektorpárok.

Ebből Lemma miatt következik, hogy $\forall i$ $|S_i| < \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i} < 2^{\alpha n}$

$\mathcal{F}$ n dimenziós, de $x_1 = 1$, és nem lehet benne páratlan számú -1-es | valamilyen $\alpha < 1$-re

- $|S| = |\mathcal{F}| = 2^{n-2}$ $\longrightarrow$ $m \ge \dfrac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i}} > \text{konstans} \cdot 2^{\overbrace{(1-\alpha)}^{>0} n}$
- $\forall i$ $|S_i| < \sum_{i=0}^{p-1} \binom{n}{i}$ $\nearrow$

$S \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$, vagyis $d = n^2$-re azt kaptuk, hogy az S_i részek m száma $> \text{konst.} \cdot 2^{c\sqrt{d}}$ ahol $c = (1-\alpha) > 0$

17) Ramsey tétele gráfokra és uniform hipergráfokra

Tétel 1: Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re $\exists n_0$, hogy $n \geq n_0$ esetén K_n tetszőleges 2 színnel való élszínezésében mindig megjelenik egyszínű K_k. Legkisebb $n_0 = R(k)$ (így jelöljük)

Def: $R(k,\ell) :=$ az a legkisebb n_0, amire $n \geq n_0$ esetén, ha akárhogyan színezzük kékre és pirosra K_n éleit, mindig keletkezik vagy egyszínű piros K_k, vagy egyszínű kék K_ℓ.
Tehát előbbi $R(k) = R(k,k)$

Általánosan: $R(k_1, k_2, k_3) \leq R(k_1, R(k_2,k_3))$

Biz: Be akarjuk látni, hogy $R(k,\ell) < \infty$
Teljes indukcióval $k+\ell$-re!

1) $R(k,2) = k$
   $R(2,\ell) = \ell$

2) Azt igazoljuk, hogy $R(k,\ell) \leq R(k,\ell-1) + R(k-1,\ell) = N$
Tegyük fel, hogy $R(k,\ell-1)$ és $R(k-1,\ell)$ igazoltan létezik.
Tekintsük K_N tetszőleges élszínezését 2 színnel.
Egy fix $v \in V(K_N)$ csúcsból kiinduló $N-1$ él között biztosan van $R(k-1,\ell)$ piros színű, vagy $R(k,\ell-1)$ kék színű.

$N > R(k,\ell-1)$
$N > R(k-1,\ell)$ $\Rightarrow$ K_N élszínezésében van piros színű K_k és K_{k-1}
kék színű K_ℓ és $K_{\ell-1}$ (definíció alapján)

a) ha $N-1$ él között $R(k-1,\ell)$ piros színű van:
Tekintsük ezeknek az éleknek a másik végén lévő csúcsokat.
Ezek a csúcsok alkotta teljes gráfban indukciós feltevés miatt
1) van egyszínű K_ℓ (kék színű), vagy
2) van egyszínű K_{k-1} (piros színű), ehhez hozzávéve v-t K_k-t kapunk

b) ha $N-1$ él között $R(k,\ell-1)$ kék színű van: hasonlóan.

Tehát tényleg $R(k,\ell) \leq R(k,\ell-1) + R(k-1,\ell) < \infty$

Def: $R(k,c,r) :=$ az a legkisebb n_0, amire $n \geq n_0$ esetén, ha akárhogyan színezzük c színnel $K_n^{(k)}$ (k-uniform hipergráf) éleit, mindig keletkezik egyszínű $K_r^{(k)}$

Általánosan: $R(k, c; (r_1, r_2, \dots, r_c)) :=$ lesz $K_{r_i}^{(k)}$ az i. színben

Tétel 2: $R(k,c;(r_1,\dots,r_c)) < \infty$, létezik

Biz: $c=2$-re bizonyítjuk, nagyobb c-kre indukcióval adódik.
Teljes indukcióval r_1+r_2-re és k-ra:

1) $k=2$-re láttuk (gráfok) $\Rightarrow$ k-ra vonatkozó indukció elindul
Triviálisan $R(k,2;(k,r_2)) = r_2$
$R(k,2;(r_1,k)) = r_1$ $\Rightarrow$ r_1+r_2-re vonatkozó indukció is elindul

2) Belátjuk, hogy $R(k,2;(r_1,r_2)) \leq 1 + \underbrace{R(k-1,2;(R(k,2;(r_1-1,r_2)), R(k,2;(r_1,r_2-1))))}_{N}$
Tekintsük $K_N^{(k)}$ egy tetszőleges 2-élszínezését.
Hagyjuk el egy $v \in V(K_N^{(k)})$ csúcsot. Nézzük maradék $(k-1)$-uniform hipergráf azon élszínezését, ahol minden E él azt a színt kapja, ami $E \cup \{v\}$ $K_N^{(k)}$-beli él színe volt.

pl $K_4^3 \to K_3^2$

$N-1 = R(k-1,2;(R(k,2;(r_1-1,r_2)), R(k,2;(r_1,r_2-1))))$

$K_{N-1}^{(k-1)}$ ennek az élszínezésében lesz vagy $R(k,2;(r_1-1,r_2))$ csúcs, amin az összes $(k-1)$-es piros, vagy $R(k,2;(r_1,r_2-1))$ ami kék

a) ha összes $(k-1)$-es piros; összes k-asra is színezett, és definíció szerint
1) van benne r_2 csúcs úgy, hogy azon minden k-as kék, vagy
2) van benne r_1-1 csúcs, hogy minden k-as piros, ehhez v-t hozzávéve r_1 olyan csúcsot kapunk, amelyben minden k-as piros

b) ha összes $(k-1)$-es kék, hasonlóan

$\Rightarrow R(k,2;(r_1,r_2)) \leq N < \infty$ tehát tényleg létezik

(18) Chvátal tétele

Def: $R(H_1, H_2) :=$ legkisebb olyan teljes gráf csúcsszáma, amit 2-élszínezve mindig keletkezik egyszínű H_1 az első színben, vagy H_2 a második színben

Tétel: Legyen T egy tetszőleges (rögzített) t csúcsú fa.
Ekkor $R(T, K_s) = (s-1)(t-1)+1$

Biz:

1) $R(T, K_s) > (s-1)(t-1)$

Vegyünk $(s-1)$ db K_{t-1} teljes gráfot, ezek első színűek, komplementer élek egyes a második szín

$T \notin (s-1)K_{t-1}$, mivel nincs t csúcsú összefüggő részgráf!

$K_s \notin (s-1)K_{t-1}$, mivel $\alpha((s-1)K_{t-1}) = s-1$, tehát a komplementer élek sem alkotnak K_s-t.

2) $R(T, K_s) \leq (s-1)(t-1)+1 = N$

Vegyünk egy tetszőleges N csúcsú G gráfot.

a) Ha $\alpha(G) \geq s$, akkor K_N-é kiegészítve G-t komplementer élekben megtalálható K_s, $K_s \subseteq \overline{G}$

b) Ha $\alpha(G) \leq s-1$

$$\chi(G) \geq \left\lceil \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{(s-1)(t-1)+1}{s-1} \right\rceil = t$$

$t \leq \chi(G) \leq \max\{\Delta(G') : G' \subseteq G\} + 1 \implies \exists\, G' \subseteq G$, amire $\Delta(G') \geq t-1$

mohó színezésből ismert korlát

$\implies t-1 \leq \max\{\Delta(G') : G' \subseteq G\}$

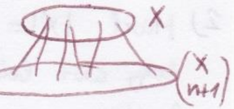
Egy ilyen G' részgráfba tetszőleges t csúcsú fa mohón beágyazható ($(t-r)$ lehetőség, ahol r a már rögzített csúcsok száma.)

(19) Indukált Ramsey tétel páros gráfokra

Lemma: Tetszőleges $F=(A,B;E)$ páros gráfhoz megadható olyan G páros gráf, ahol $G=(X, \binom{X}{k}; E')$ úgy, hogy F feszített részgráfja G-nek, és $E'=\{\{x,Y\}: x\in X, x\in Y, Y\in\binom{X}{k}\}$

Biz: F csúcsai legyenek: $A=\{a_1,\dots,a_n\}$
$B=\{b_1,\dots,b_m\}$

G csúcsaihoz legyen: $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,z_1,\dots,z_m\}$
$k=n+1$



φ beágyazási függvénnyel leképezzük F-ből G-t:

- $\varphi(a_i)=x_i$
- $\varphi(b_j)=Y_j$ $\quad Y_j\in\binom{X}{n+1}$, $Y_j=\varphi(N_F(b_j))\cup\{z_j\}\cup\{y_i: a_i\notin N_F(b_j)\}$

$N_F(b_j)$: b_j F-beli szomszédai

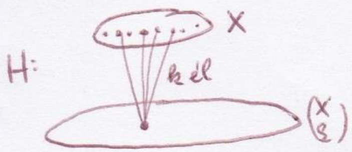
Ezzel $N_G(Y_j)\cap\{x_1,\dots,x_n\}=\varphi(N_F(b_j))$, tehát tényleg feszített részgráfja F a G-nek.

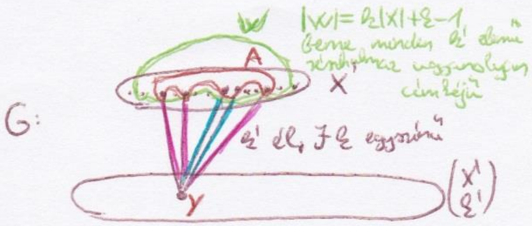
Tétel: Tetszőleges H páros gráfhoz $\exists$ olyan G páros gráf, amire igaz, hogy G éleinek tetszőleges 2-színezésekor megjelenik H-nak egy egyszínű kópiája.

Biz: Lemma miatt feltehető, hogy $H=(X,\binom{X}{k};E)$ típusú gráf. G-t is ilyen típusú alakban keressük: $G=(X',\binom{X'}{k'};E')$

Legyen $|X'|=R(k', 2\binom{k'}{k}, k|X|+k-1)$, ahol $k'=2k-1$.

Tekintsük az így megadott G páros gráf egy tetszőleges élszínezését 2 színnel.





1) $\forall Y\in\binom{X'}{k'}$ csúcsból kiinduló k' él között van legalább k egyszínű (Skatulyaelv miatt, mivel $k'=2k-1$)

Rögzítsünk egy ilyen egyszínű k-ast. (mint halmazt)

Ezt a részhalmazt, annak rendezést is figyelembe vevő elhelyezkedését nevezzük Y-hoz tartozó mintának.

$\binom{k'}{k}$ féle minta fordulhat elő, ehhez hozzátéve a k él színét $2\binom{k'}{k}$ féle címkét kaphatnak az $Y\in\binom{X'}{k'}$ részhalmazok.

(Y egy csúcs alul $\quad : Y\in\binom{X'}{k'}$
és egy részhalmaz felül : $Y=A\subseteq X$ $\quad$ lásd előző ábrán másik oldalon)

2) Mivel $|X'|=R(k', 2\binom{k'}{k}, k|X|+k-1)$, $\exists$ X'-nek $k|X|+k-1$ eleme úgy, hogy azon belül minden k' elemű részhalmaz ugyanazt a címkét kapta.

Nézzük G-nek csak ezek az elemek által kifeszített részgráfját: $(W,\binom{W}{k'})$

3) H-t erre a részgráfra akarjuk leképezni, φ beágyazási függvénnyel:

- $\varphi(x_i)=w_{ik}$ $\quad W=\{w_1,\dots,w_{k|X|+k-1}\}$
- $\varphi(Y)=\{\varphi(x_i): x_i\in Y\}\cup Z$, $\forall Y\in\binom{X}{k}$-ra

Z = olyan kiválasztott w_j-k halmaza úgy, hogy velük együtt a k' elemből álló halmazban a w_{ik} elemek elhelyezkedése éppen azt a mintát kövesse, ami alapján W-t kiválasztottuk.

Tudunk így választani w_j-kből, mivel minden szomszédos w_{ik} elem között $k-1$ elem van.

Ez a választás biztosítja, hogy minden w_{ik}-hoz tartozó él azonos színű, vagyis előállt H feszített részgráfként.

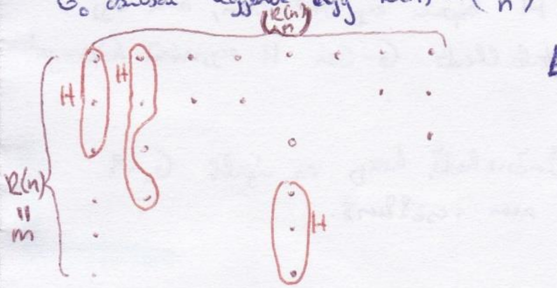
20 Nešetřil - Rödl tétel

Tétel: Tetszőleges H gráfhoz létezik olyan G gráf, hogy $\omega(H) = \omega(G)$ és G éleinek tetszőleges módon való két színnel színezése esetén mindig létezik egyszínű H feszített részgráf.

Biz:

Definiáljunk egy $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_{\binom{m}{2}}$ gráfsorozatot, ahol $m = R(n) = R(2,2;(n,n))$ és $n = |V(H)|$ és $G_{\binom{m}{2}}$ lesz a tétel által keresett gráf.

G_0 csúcsai legyenek egy $R(n) \times \binom{R(n)}{n}$-es négyzetrácsos rácspontjai.



Élek: minden oszlopban egy n-es, amik H kópiáját feszítik ki.

Lemma: Tetszőleges H páros gráfhoz $\exists$ olyan G páros gráf, amire igaz, hogy G éleinek tetszőleges 2-színezésekor megjelenik H-nak egy egyszínű kópiája.

Biz: lsd. 19. tétel

G_0 négyzethálójának első két sora az első sorpár, mely kifeszít egy F_1 páros gráfot.
Cseréljük ki a lemma által adott páros gráfra.
Az ezen páros gráfban található feszített F_1 részgráfok mindegyikét (csúcsdiszjunkt módon) kiegészítjük G_0 egy kópiájává. ($R(n)$ sorra rendezettséget megtartva).

Így konstruáljuk G_i-ből G_{i+1}-et, $\forall i = 1,2,\dots \binom{m}{2}$-re az i. sorpárral dolgozva.

Az így kapott $G = G_{\binom{m}{2}}$ tényleg jó.

Tekintsük ennek a G-nek egy 2-élszínezését.

A konstrukció miatt $G = G_{\binom{m}{2}}$-nek van olyan feszített $G_{\binom{m}{2}-1}$ részgráfja, aminek az $\binom{m}{2}$-edik sorában lévő páros gráf minden éle azonos színű.
Hasonlóan ebben a $G_{\binom{m}{2}-1}$ gráfban is van egy $G_{\binom{m}{2}-2}$ feszített részgráf, ...
Végül G_0-ban van egy olyan feszített részgráf, amiben bármely két sor között csak egyszínű él megy.
Ezek az egyféle színek indukálnak K_m-nek egy 2-élszínezését, amiben $m = R(n)$ definíciója szerint van egyszínű K_n.
Ez kijelöl n sort, melyek közt minden él ugyanolyan színű.
Ezekhez a sorokhoz tartozik egy H kópia egy oszlopban, ami így egyszínű élekből áll! Tehát megtalálható G-ben H egyszínű kópiája!

$\omega(G_0) = \omega(H)$, és egyszerűen ellenőrizhető, hogy az újabb G_i-k konstruálásakor ez a klikkszám nem növekszik.