

1. feladat (13 pont)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2k x^{2k-2}$$

Írja fel a sor összegfüggvényét és határozza meg a sor konvergenciasugarát!

2. feladat (12 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (4x)^n}{7^n \sqrt{n}}$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát és abszolút konvergencia tartományát!

3. feladat (16 pont)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x^4}}$$

a) Írja fel az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!
Írja fel a_{12} (x^{12} együtthatója) értékét elemi műveletekkel!

b)
$$\int_0^1 f(x) dx$$

Határozza meg az integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt negyedfokú Taylor-polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

4. feladat (12 pont)

Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 2$

b) $g(x) = x^4 e^{-2x}$, $x_0 = 0$

$g^{100}(0) = ?$

5. feladat (17 pont)

$$f(x, y) = \frac{e^{y+2x}}{x^2 + 1}, \quad P_0(0, 1)$$

a) Hol és miért létezik a gradiens? $\text{grad } f(P_0) = ?$

b) Adja meg $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0}$ értékét, ha $\underline{e} \parallel -8\underline{i} + 6\underline{j}$

c) $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$

6. feladat (9 pont)

$$g(x, y) = f(3x^2 + 2y), \quad f \in C_{\mathbb{R}}^2$$

$$g'_x = ? , \quad g'_y = ?$$

$$g''_{xx} = ? , \quad g''_{yx} = ? , \quad g''_{xy} = ?$$

7. feladat (21 pont)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(2x+3)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Létezik-e a határértéke f -nek az origóban? Folytonos-e a függvény az origóban?
- b) $f'_y(x, y) = ?$ ha $((x, y) \neq (0, 0))$
- c) $f'_x(0, 0) = ?$, $f'_y(0, 0) = ?$
(A definícióval dolgozzon!)
- d) Totálisan differenciálható-e az f függvény az origóban?
-

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \frac{1}{x-7}$, $x_0 = 3$ b) $g(x) = \frac{1}{x^2-5}$, $x_0 = 0$

9. feladat (9 pont)

$$f(x, y) = 3x^2y + 4xy^4 - 2y + 15, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 0$$

Írja fel f grafikonjának az adott ponthoz tartozó érintősíkja egyenletét!