Sorok

Numerikus sorok

Végtelen sok szám összege?

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$

$\sum a_n$ vagy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

A $\sum a_n$ sor N-edik részletösszege $S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n$

Def: A $\sum a_n$ numerikus sor konvergens és összege S, ha $\lim_{N\to\infty} S_N = S$

Ha a részletösszegek sorozata divergens, akkor $\sum a_n$ divergens numerikus sor

Pl.: $\sum q^n$ mértani sor

$$S_n = q + q^2 + \ldots + q^N = q^{\frac{1-q^N}{1-q}} \to \frac{q}{1-q} \quad \text{, ha } |q| < 1$$

divergens, ha |q|>1, vagy q = -1, ha q = 1, akkor $\sum q^n = N \to$ divergens

A mértani sor $\sum_{1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$, ha |q|<1, divergens máskor

Pl.: $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ Áll.: konvergens

Biz: $\frac{1}{n-(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ =>

$$S_N = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{N\cdot(N+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$$

Tétel: A konverencia szükséges feltétele:

Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$

Biz: Ha $S_n \to S$, akkor $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$

Megj: A feltétel nem elégséges

Pl.: $\sum \frac{1}{n}$ (harmonikus sor) Áll.: divergens

Biz: $S_{2n} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} =$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ha konvergens lenne, akkor $S_{2n} - S_n \to$ S-S =0, nem lehet, mert legalább ½ (ellentmondás)

Pl.: $\sum \frac{n}{n+1}$ divergens ($a_n \to 0$)

Tétel: Ha $\sum a_n = A$, $\sum b_n$, akkor

$\sum c \cdot a_n = cA$

$\sum (a_n +/- b_n) = (A +/- B)$

∞

Pl.: $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3}{6^n} = \sum \frac{1}{3^n} - 3 \cdot \sum \frac{1}{6^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{6}{5}$$

$$\sum_{0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \left(= 1 + \frac{q}{1-q} \right)$$

Tétel: Véges sok összeadandó hozzávétele, törlése, átrendezése, módosítása nem vltoztatja meg a sor konvergenciáját, vagy divergenciáját

Nemnegatív tagú numerikus sorok konvergenciája: Ha minden $a_n \geq 0$, akkor $\{S_n\}$ monoton növő

$(S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n)$

Ezért

$\sum a_n$ konvergens <=> ha a részletösszegek korlátosak

Konvergencia kritériumok nemnegatív tagú sorban:

1) Tétel: Majoráns kritérium

Ha $0 \leq a_n \leq b_n$ minden $n \geq N$-re és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens

1') Tétel: Minoráns kritérium

HA $0 \leq b_n < a_n$ és $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ is divergens

Pl.: $\sum \frac{1}{5n-1}$ divergens, mert $\frac{1}{5n-1} \geq \frac{1}{5n}$, és $\sum \frac{1}{5n} = 5 \cdot \sum \frac{1}{n}$ => divergens

Pl.: $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens, mert $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n \cdot (n-1)}$, ha $n \geq 2$, és

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \quad \text{konv.}$$

2) Tétel: Összehasonlító kritérium

Legyen $0 \leq a_n$, $0 \leq b_n$. Akkor:

a) $0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < \infty$ esetén $\sum a_n$ konvergens <=> $\sum b_n$ konvergens

b) $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ esetén $\sum b_n$ konvergens => $\sum a_n$ konvergens

c) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ esetén $\sum b_n$ divergens => $\sum a_n$ divergens

Pl.: $\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{2^n - n^2}$ konvergens, mert $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergens mértani sor és $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\dfrac{1}{2^n-n^2}}{\dfrac{1}{2^n}}=\dfrac{2^n}{2^n-n^2}=\dfrac{1}{1-\dfrac{n^2}{2^n}}\to 1$

Pl.: $\sum \dfrac{\ln^3(n)}{n^3}$ konvergens, mert $\sum \dfrac{1}{n^2}$ konvergens és

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\ln^3\dfrac{(n)}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\ln^3(n)}{n}\to 0$$

b) kritérium miatt a_n is konvergens

3) Tétel: (Cauchy-féle) <u>gyökkritérium:</u>

Ha $a_n \geq 0$, $n \geq N$ és $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens

> 1 divergens

Biz: $\lim \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ esetén $\sqrt[n]{a_n} \leq q + \delta < 1$, ha $n \geq N$

$a_n \leq (q + \delta)^n$, majoráns kritérium miatt a_n konvergens

$\lim > 1$, akkor $\sqrt[n]{a_n} > 1$ $n \geq N$

$a_n > 1$, a_n nem tart 0-hoz

Pl.: $\sum \dfrac{1}{n}$ divergens, $\dfrac{1}{n^2}$ konvergens, mindkét esetben $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

Pl.: $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ $\sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n^2})/2 \to ½ < 1$=> $\sum \dfrac{n^2}{2^n}$ konvergens

Pl.: $\sum \dfrac{n}{\ln^n(n)}$ => $\dfrac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}\to\dfrac{1}{\infty}=0<1$ => $\sum \dfrac{n}{\ln^n(n)}$ konvergens

4) Tétel: (d'Alembert-féle) <u>hányadoskritérium:</u>

$a_n > 0$; $n \geq N$, $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$ $\to \sum a_n$ konvergens

> 1 $\to \sum a_n$ divergens

Pl.: $\sum \dfrac{3^n}{n!}$ konvergens $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{3^n}{n!}}=\dfrac{3}{n+1}\to 0<1$

Pl.: $\sum \dfrac{5^n}{\binom{2n}{n}}=\sum \dfrac{5^n}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}=\sum \dfrac{5^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{5^{n+1}\cdot((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{5^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}}=\frac{5\cdot(n+1)^2}{(2n+1)\cdot(2n+2)}\to\frac{5}{4}>1$$

$$\sum \frac{5^n}{\binom{2n}{n}} \text{ divergens}$$

Pl.: $\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$ is divergens, mert $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$

$a_{n+1} > a_n > 0 \Rightarrow a_n$ nem tart 0-hoz

Megj.: Gyakori hiba: $\sqrt[n]{a_n} < 1$ minden n-re $\not\Rightarrow \sum a_n$ konvergens

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ minden n-re} \not\Rightarrow \sum a_n \text{ konvergens}$$

5) Tétel: <u>Integrál kritérium:</u>

Ha $0 \le a_n$, a_n monoton csökkenve tart 0-hoz és ha $f:[c,\infty) \to \mathbf{R}$, $f \ge 0$, f monoton csökken és $f(n) = a_n$, $n \ge N$. Akkor $\sum a_n$ konvergens $\Leftrightarrow \int_c^\infty f(x)\,dx$ konvergens improprius integrál

Pl.: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ <u>hiperharmonikus sor</u>, konvergens $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Pl.: $\sum \frac{1}{n\cdot(\ln(n))^{1+\delta}}$ konvergens, ha $\delta > 0$; $\int \frac{1}{x\cdot(\ln(x))^{1+\delta}}dx = \left[\frac{(\ln(x))^{-\delta}}{-\delta}\right]^\infty$ konvergens

Tétel: Hibabecslés integrál kritérium alkalmazásánál:

$$\int_{n+1}^\infty f \le S - S_n \le \int_n^\infty f$$

Pl.: $\sum \frac{1}{\frac{1}{n\cdot \ln^2(n)}}$ melyik részletösszeg közelít 10^{-3}-nál kevesebb hibával?

$$0 \le S - S_n \le \int f = \int_n^\infty \frac{dx}{x\cdot(\ln^2(x))} = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_n^\infty = \frac{1}{\ln(n)} < 10^{-3}$$

$10^3 < \ln n$

$e^{1000} < n \Rightarrow$ a sor konvergenciája rendkívül lassú

Pl.: $\sum_0^\infty e^{-n}$ $\quad 0 \le S - S_n \le \int_n^\infty e^{-x}\,dx = e^{-n}$

$e^{-n} < 10^{-3}$

$e^n > 1000$

$n > 3\cdot\ln 10 = 6{,}9$

$n=7$

Előjeles sorok konvergenciája:

végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív összeadandó tag van

Def: $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, ha $\sum|a_n|$ konvergens

1. Tétel: Az abszolút konvergens sorok konvergensek

$\sum|a_n|$ konvergens => $\sum a_n$ is konvergens

Biz: $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$; $\sum 2|a_n|$ konvergens (majoráns krit.) =>

$\sum(a_n+|a_n|)$ is konvergens

=> $\sum a_n$ konvergens

$\sum|a_n|$ konvergens

Pl.: $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$ konvergens, sőt abszolút konvergens, mert $\sum \left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right|$ konvergens, mert $\sum \frac{1}{n^2}$ felülről becsüli és konvergens (majoráns kritérium)

Def: Leibniz típusú sor:

$\sum(-1)^{(n-1)}\cdot a_n$, ha a_n monoton csökkenően tart 0-hoz

2. Tétel: a Leibniz típusú sorok konvergensek

2'. Tétel: Hibabecslés Leibniz típusú sorra

$|S - S_n| \le a_{n+1}$

Pl.: $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$

Leibniz típusú => konvergens, de nem abszolút konvergens, mert $\sum 1/n$ divergens

Def: $\sum a_n$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens

Az összeadandók rendezése:

Pl.: $S = 1 - \frac{1}{2} + 1/3 - \frac{1}{4} + \ldots$ konvergens $S>0$

$2S = 2 - 1 + 2/3 - \frac{1}{2} + 2/5 - 1/3 + 2/7 - \frac{1}{4} + 7/9 - 1/5 + 2/11 - 1/6 + 2/13 - 1/7 + \ldots$

$= 1 - \frac{1}{2} + 1/3 - \frac{1}{4} + 1/5 - 1/6 + 1/7 - \ldots$

Tétel: Abszolút konvergens [spec: nemnegatív tagú] sorok esetén az összeadandók átrendezése a sorösszeget nem változtatja meg

Tétel: Riemann átrendezési tétele:

Feltételesen konvergens numerikus sor átrendezhető úgy, hogy a sor összege tetszőleges valós szám legyen

Megj.: Abszolút konvergens sornál $\sum_{an>0} a_n = S^+$ és $\sum_{an<0} 0 = S^-$ végesek, és a sor bármely átrendezésénél az összeg $S^+ + S^-$

Feltételesen konvergens sornál $S^+ = +\infty$; $S^-=-\infty$ (mert $\sum|a_n = S^+ - S^-$)

Pl.: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n} + \ldots$

- Nem Leibniz típusú, mert $a_n \to 0$, de nem monoton

- Nem konvergens, $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}$ konvergens

=> $\sum \frac{1}{n}$ konvergens

$\sum \frac{1}{2^n}$ konvergens

Az eredeti feltevés hibás → az eredeti sor divergens

<u>Sorok zárójelezése</u>

$a_1 + (a_2 + a_3) + a_4 + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots$
zárójelekkel részletösszegek sorozatára térünk át
zárójelezés <=> áttérés S_n egy részsorozatára

Tétel: Ha $\sum a_n = S$, akkor tetszőleges zárójelezés után kapott új sor is S-hez konvergens. De divergens sor zárójelezés után konvergenssé válhat

Pl.: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ divergens, de zárójelezés után konvergens
$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$

Megj.: A zárójelek felbontsa „veszélyes” művelet, mert konvergens sorból divergens sort hozhat létre

<u>Mikor szabad zárójeleket felbontani?</u>:

Tétel: Ha a zárójelezett összeg konvergens és az egyes zárójelekben adott összeadandók abszolútérték összegei tartanak 0-hoz, akkor a zárójelek felbontása után is ugyanolyan összegű sort kapunk.

Pl.: $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$ konvergens, mert

$\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} ! \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$ Leibniz típusú

konvergens sor és a zárójelek felbonthatók, mert az n-ik zárójelben vett abszolútérték összeg $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \to 0$

3.Tétel: Majoráns kritérium előjeles sorra
Ha $|a_n| \le b_n$ minden $n \ge N$-re és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens (sőt abszolút konvergens)

Megj.: <u>pozitív tagú</u> sorokra $\sum a_n$ konvergens
$S_n \to +\infty$, azaz $\sum a_n = \infty$

Ezért pozitív tagú sorokra $\sum a_n$ konvergens <=> $\sum a_n < \infty$
Előjeles sorokra másképpen is divergálhatnak a részletösszegek

Függvénysorok

Def: $f_n(x)$ függvénysorozat konvergencia tartománya

KT = {x: $f_n(x)$ konvergens sorozat}

határfüggvénye

$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ x eleme KT

Def: A $\sum f_n(x)$ függvénysor konvergencia tartománya

KT = {x: $\sum f_n(x)$ konvergens numerikus sor}

összegfüggvénye: $S(x) = \sum f_n(x)$

Pl.: $f_n(x) = 1 + \alpha/n$

KT = **R** $f(x)=\lim f_n(x) = 1$

Pl.: $f_n(x) = x^n$

KT = (-1; 1] $f(x)=\lim f_n(x) = 1$, ha $|x| < 1$

$= 0$, ha $x = 1$

Pl.: $\sqrt[n]{1+x^n}$ $x \geq 0$

KT = $[0; \infty)$

$f(x) = \lim f_n(x) = 1$, ha $0 \leq x \leq 1$

$= x$, ha $x > 1$

Pl.: $\sum \frac{1}{n \cdot x}$

KT = Ø

$\sum \frac{(-1)}{n \cdot x}$

KT= **R**\{0}

$\sum \frac{1}{n^x}$ KT = $(1;\infty)$

$\sum_0^\infty x^n$ KT = (-1;1); $S(x) = 1/(1-x)$

Def: Az $f_n(x)$ függvénysorozat a H (KT részhalmaza) halmaza egyenletesen tart f(x)-hez, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N, hogy minden $n \geq N$-re és minden H-beli x-re

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

[a küszöbindex x-től független]

Azaz: f_n és f eltérése H-n mindenütt kicsi, ha n nagy

Jele: $f_n \Rightarrow f$ H-n

Pl.: $f_n(x) = x^n \rightarrow f(x) = 0$, ha $0 \leq x < 1$

$= 1$, ha $x = 1$

Bármilyen nagy n-re $f_n(x) - f(x) \to 1$, ha $x \to 1-0$
Az $f_n \to f$ konvergencia nem egyenletes [0;1]-en. De egyenletes [0; 1–δ]-n, ha $\delta > 0$, mert ott $x \le$ „(1–δ)", itt f_n és f között a max eltérés $(1-\delta)^n \to 0$

Pl.: $\left(\frac{\sin(n\cdot x)}{n}\right)$ => 0 **R**-en ($N = \frac{1}{\varepsilon}$ jó)

Pl.: $x^n - x^{2n}$ [0;1]-en, határfüggvény: $f \equiv 0$
$\max\limits_{[0;1]} (x^n - x^{2n}) \to 0$, ha $n \to \infty$
$f'_n = n\cdot x^{n-1} - 2\cdot n\cdot x^{2n-1} = n\cdot x^{n-1}\cdot(1 - 2x^n)$
f_n max: $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$
$\max\limits_{[0;1]} (x^n - x^{2n}) = ½ - ¼ = ¼ \not\to 0$

Tétel: $f_n \Rightarrow f$ [a;b]-n <=> $\sup\limits_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, ha $n \to 0$

Pl.: $x^2\cdot e^{-nx} \to 0$, ha $x \ge 0$ Egyenletes-e?
$(2x - nx^2)\cdot e^{-nx}$
$x = \frac{2}{n}$ -nél lesz f_n maximális
$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{4}{n^2}\right)\cdot e^2 \to 0$, tehát egyenletes konvergencia [0; ∞]-en

Def: $\sum f_n(x)$ egyenletesen tart S(x)-hez a H (KT részhalmaza) halmazon, ha minden $n \ge N$, minden x eleme H-ra
$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$
Jele: $\sum f_n(x) \Rightarrow S(x)$ H-n
Azaz: $S_n(x) \Rightarrow S(x)$

<u>Elégséges feltételek $\sum f_n$ egyenletes konvergenciájára</u>:

<u>1. Tétel:</u> Weierstrass-kritérium
Ha $|f_n(x)| \le c_n$ (x eleme H) és ha $\sum c_n < \infty$, akkor $\sum f_n(x) \Rightarrow S(x)$ H-n

Biz: $|S_n(x) - S(x)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_k \to 0$ (x-től független)

Pl.: $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ => **R**-en, mert $|f_n(x)| = \left|\sin\frac{(n\cdot x)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} = c_n$, és $\sum c_n < \infty$

<u>2. Tétel:</u> Leibniz típusú függvénysor egyenletes konvergenciája
Ha $|f_n(x)| \le d_n$ és $d_n \to 0$, és ha $\sum f_n(x)$ Leibniz típusú minden x eleme H-ra, akkor $\sum f_n(x) \Rightarrow$ H-n
Biz: $|S(x) - S_n(x)| \le |f_{n+1}(x)| \le d_n \to 0$ minden x eleme H-ra ($n \to \infty$)

Pl.: $\sum \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ Leibniz típusú minden x eleme **R**-re

$|f_n(x)| = \frac{1}{n+x^2} \leq \frac{1}{n} = d_n \to 0$

Ezért $\sum \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ => **R**-en

Az egyenletes konvergencia „haszna”:

1.Tétel: Folytonosság

a) Ha f_n eleme C[a;b] és f_n =>f [a;b]-n, akkor f eleme C[a;b]

b) Ha f_n eleme C[a;b] és $\sum f_n$ => S [a;b]-n, akkor S eleme C[a;b]

Pl.: $x^n \to 0$, ha $0 \leq x < 1$

$\to 1$, ha x = 1

Tehát x^n eleme C[0;1], $x^n \to f(x)$ [0;1]-en, de f nem eleme C[0;1]

Pl.: $\sum_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ S(x) = x^2, ha $\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x^2+1$

= 0, ha x = 0

S(x) folytonos x = 0-ban, de $f_n(x)$ eleme C(**R**) => a konvergencia nem lehet egyenletes az x = 0-t tartalmazó intervallumokon

Pl.: $\lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(x)+n\cdot(n+1)} = ?$

f_n eleme C(0;∞). Egyenletes-e a konvergencia?

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ és $\sum \frac{1}{n\cdot(n+1)} < \infty$ Weierstrass-kritérium → a konvergencia egyenletes

1.Tétel → S(x) elem C(0; ∞) → $\lim_{x\to 1} S(x) = S(1) = \sum_1^\infty \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$

2.Tétel: Deriválhatóság

a) Ha f_n => f és f_n' => g [a;b]-n, akkor f diffható, és f' = g [a;b]-n.

Azaz: $(\lim f_n)' = \lim (f'_n)$, lim felcserélhető d/dx-szel

b) Ha $\sum f_n = S$, $\sum f'_n$ => g, akkor $\sum f_n$ diffható és $(\sum f_n)' = g$.

Azaz: $(\sum f_n)' = \sum f'_n$. ∑ felcserélhető d/dx-szel

Gyakori hiba: ha f_n => f ⟶ f'_n => f'

Pl.: $f_n(x) = (1/n)\cdot\sin(n^2x)$ => 0, de $f'_n(x) = n\cdot\cos(nx)$ divergens

pl.: $f'_n(0) = n$

Pl.: $S(x) = \sum_1^\infty \text{arc sin}\left(\frac{x}{n^2}\right)$ => $S'(0) = \sum 1/n^2$

S(x) konvergens, mert $\sum \frac{x}{n^2}$ konvergens és $\frac{\text{arc sin}\left(\frac{x}{n^2}\right)}{\frac{x}{n^2}} \to 1$,

1 eleme (0;∞)-nek.

$\sum f'_n \Rightarrow$, mert $f'_n = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n^2}\right)^2}} \leq \frac{2}{n^2}$ $\quad |x| \leq \frac{1}{2}$

és $\sum \frac{2}{n^2} < x$ (W-krit)→ $\sum f'_n \Rightarrow$ $|x| \leq ½$-en

<u>3. Tétel:</u> Integrálhatóság

a) Ha f_n eleme R[a;b] és $f_n \Rightarrow f$ [a;b]-n, akkor f is integrálható és $\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n$

Azaz: $\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n$

b) Ha f_n eleme R[a;b] és $\sum f_n \Rightarrow S$ [a;b]-n, akkor $\int_a^b S = \sum \int_a^b f_n$

Azaz: $\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$

Pl.: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot \cos(nx) \to \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = ?$

egy $0 < q < 1$-re

$|q^n \cdot \cos(nx)| \leq q^n$ és $\sum q^n < \infty$ (W-krit)→ $q^n \cdot \cos(nx) \Rightarrow f(x)$

(3.Tétel)→ $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_0^{\infty} \int_0^{2\pi} q^n \cdot \cos(nx)\,dx = \int_0^{2\pi} 1\,dx = 2\pi$

$(= q^n[(\sin(nx))/n]_0^{2\pi} = 0$

<u>Hatványsorok</u>

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ $\quad$ <u>x_0 bázispontú hatványsor</u>

Hol konvergens? $\quad x = x_0$ jo

KT = - $\{x_0\}$

- $[(x_0 - R, x_0 + R)]$
- **R**

Tétel: <u>Cauchy-Hadamard tétel:</u>

Van egy olyan $R \geq 0$ (vagy $R = \infty$) szám, hogy KT = $[(x_0 - R, x_0 + R)]$

Ha létezik a $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$, akkor <u>R =</u> $\frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$

Ha létezik a $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, akkor <u>R =</u> $\frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

A sor abszolút konvergens $(x_0 - R, x_0 + R)$-en, és egyenletesen konvergens $[x_0 - R, x_0 + R]$- en, r < R

Pl.: $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\cdot x^n$;

$$R = \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \to \text{KT} = [(-1;\ 1)]$$

x=1-ben $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ Leibniz

x= -1-ben $\sum \frac{1}{n}$

KT = (-1; 1]

Pl.: $\sum n!\cdot x^n$ $\quad R = \frac{1}{\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \frac{1}{\lim n+1} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \to \text{KT} = \{0\}$

Pl.: $\sum \frac{x^n}{n!}$ $\quad R = \frac{1}{\lim \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{0} = +\infty \quad$ KT= **R**

Pl.: $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^n$ $\quad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$

$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot x^{2n}$ $\quad$ KT = $\left\{x : x^2 \in \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{e}};e\right)\right]\right\} = \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{e}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right]$ = , R= $\frac{1}{\sqrt{e}}$

Tétel: <u>A hatványsor tagonkénti diffhatósága</u>

Ha R > 0, akkor $S(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ akárhányszor differenciálható $(x_0 - R;\ x_0 + R)$-en és minden deriválás tagonként végezhető

Azaz: $S'(x) = \sum_{0}^{\infty} n\cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$

$S''(x) = \sum_{0}^{\infty} n(n-1)\cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$

$S'''(x) = \sum_{0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdot a_n(x - x_0)^{n-3}$

Tétel: <u>A hatványsor tagonkénti integrálhatósága</u>

Ha R > 0, akkor bármely $(x_0 - R,\ x_0 + R)$-beli [a;b] részhalmaz esetén

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum \int_a^b a_n(x - x_0)^n\,dx$$

A két tétel bizonyítása azon alapul, hogy [a;b]-n a hatványsor és minden tagonkénti derivált hatványsora is egyenletesen konvergens

Nevezetes hatványsorok:

Pl.: $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$ ha $|t| < 1$

Legyen $|x| < 1$, akkor $[0; x]$ vagy $[x; 0]$ szakaszon a sor egyenletesen konvergens → tagonként integrálható

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x 1 - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt - \int_0^x t^3\,dt + \dots = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{, ha } |x| < 1$$

Pl.: $1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots$ ha $|t| < 1$

Egyenletesen konvergens $[0; x]$-en, ill. $[x; 0]$-n, ha $|x| < 1$

$$\int_0^x dt/(1+t^2) = \int_0^x 1 - \int_0^x t^2\,dt + \int_0^x t^3\,dt - \dots = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots \quad \text{ha } |x| < 1$$

$$arc\,tg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Pl.: $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots$

$$ar\,th(x) = \int_0^x \frac{dt}{a-t^2} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{ha } |x| < 1$$

konvergálnak másutt is?

R = 1 miatt csak x = +/- 1 jön szóba

Tétel: Abel tétele:

A hatványsor S(x) összege az egész KT-on folytonos

Pl.: $1 - ½ + 1/3 - ¼ + \dots = \ln 2$

Biz: $S(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$ folytonos a KT-on, tehát balról folytonos x = 1-ben →

$1 - ½ + 1/3 - ¼ + \dots = S(1) = \lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \ln(2)$

Pl.: $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$

$S(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$, $S(1) = \lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} arc\,tg(x) = arx\,tg(1) = \pi/4$

Hatványsorok szorzása:

Pl.: $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3)$

x^2 együtthatója $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$

x^3 együtthatója $a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0$

Tétel: Ha$\sum a_n (x - x_0)^n$ konvergencia sugara $R_a > 0$, $\sum b_n(x - x_0)^n$ sugara $R_b > 0$, akkor

$$[\sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n]\cdot[\sum_0^\infty b_n (x - x_0)^n] = \sum_0^\infty c_n (x - x_0)^n,$$ ha $|x - x_0| < \min(R_a, R_b)$, ahol

$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$

Pl.: $$\left(\sum_0^\infty \frac{(a\cdot x^n)}{n!}\right)\cdot\left(\sum_0^\infty \frac{(b\cdot x)^n}{n!}\right) = \sum_0^\infty \underbrace{\frac{a^0}{0!}\cdot\frac{b^n}{n!}+\frac{a^1}{1}\cdot\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}\cdot\frac{b^0}{0!}}_{\frac{1}{n!}\cdot\left[\binom{n}{0}\cdot a^0\cdot b^n+\binom{n}{1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot a^n\cdot b^0\right]} =$$

$$\frac{1}{n!}\cdot\left[\binom{n}{0}\cdot a^0\cdot b^n+\binom{n}{1}\cdot a^1\cdot b^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\cdot a^n\cdot b^0\right]$$

$$(a+b)^n$$

$$= \sum_0^\infty \frac{((a+b)\cdot x)^n}{n!}$$

Köv.: Ha $f(x) = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!}$, akkor $f(a)\cdot f(b) = f(a+b)$

Lesz: $f(x) = e^x$

Kapcsolat a hatványsor összege és együtthatói között

Tétel: Ha $R > 0$, akkor $a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$; $n \geq 0$

(Köv.: Különböző hatványsorok összege nem lehet azonos)

Biz.: $S(x) = \sum_0^\infty a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots \to S(X_0) = a_0$

$S'(x) = \sum_1^\infty a_n\cdot n\cdot(x - x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2 + 3\cdot2\cdot a_3\cdot(x - x_0) + 4\cdot3\cdot a_4\cdot(x - x_0)^2 + \ldots \to S'(x) = a$

$S''(x) = \sum_2^\infty a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot(x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 3\cdot2\cdot a_3(x-x_0) + 4\cdot3\cdot(x-x_0)^2 + \ldots \to S''(x) = 2a_2$

$S'''(x) = \sum_3^\infty a_n\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(x-x_0)^{n-3} = 3\cdot2\cdot1\cdot a_3 + 4\cdot3\cdot2\cdot a_4\cdot(x-x_0) + 5\cdot4\cdot3\cdot a_5\cdot(x-x_0)^2 + \ldots \to$

$\to S'''(x) = 3\cdot2\cdot1\cdot a_3$

$S^{(k)}(x_0) = k!\cdot a_k$

Előáll-e egy f eleme C^∞ függvény hatványsor összegeként?

Ha előáll, akkor $\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$ alakban áll elő

Def: Ha f eleme C^∞ az x_0 egy környezetében, akkor f x_0 bázispontú Taylor-sora:

$$\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

Pl.: f(x) = $e^{\frac{-1}{x^2}}$

$\rightarrow$ f eleme $C^\infty(\mathbf{R})$

= 0, ha x=0

$0 = f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots \rightarrow$ f Taylor-sora $\equiv 0$

Def: f(x) analitikus (x_0-R, x_0+R)-en, ha ott a Taylor-sor előállítja

Def: f(x) <u>x_0 bázispontú n-edfokú Taylor-polinomja</u>:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Áll.: $T_n(x_0) = f(x_0)$, $T'_n(x_0) = f(x_0)$, … , $T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

<u>Milyen pontosan közelít a Taylor-polinom?</u>

Tétel: A Taylor-polinom maradéktagjának Lagrange-féle alakja:
Ha f eleme $C^{n+1}(a,b)$ és x_0, x eleme (a;b) és $x \neq x_0$, akkor létezik olyan (x_0;x)-beli, vagy (x;x_0)-beli c, hogy:

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Köv: Ha $[x_0-H, x_0+H]$-n $|f^{(n)}(x)| \leq K$ minden n-re és minden x-re, akkor

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \qquad \text{ha } |x-x_0| \leq H$$

Biz.: $$|f(x) - T_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!} \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq K \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

Köv: $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots = \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{X eleme } \mathbf{R}$$

Biz.: f(x) = e^x => f(x) T sora $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum \frac{1}{n!} \cdot x^n$

Ha $|x| \leq H$, akkor $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^H = K$

Köv: $$\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{x eleme } \mathbf{R}$$

$$\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{x eleme } \mathbf{R}$$

Biz.: $$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_0^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right)$$

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_0^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right)$$

Pl.: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

$\cos(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

x eleme **R**

Biz: $|f^{(n)}(x)| \le K = 1$, ha f(x) = sin(x), cos(x)=> sin(x)-et és cos(x)-et is előállítja a Taylor-sora:

$$\sin(x) = \sum_0^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos(x) = \sum_0^{\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Def: $\binom{\alpha}{n}$, α valós szám, n ≥ 0 egész

$\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{1} = \alpha$, $\binom{\alpha}{2} = \frac{(\alpha(\alpha-1))}{2}$, $\binom{\alpha}{3} = \frac{(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2))}{(3!)}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1))}{(n!)}$$

Pl.: $\binom{-1}{n} = ?$ $\binom{\pi}{3} = \frac{(\pi(\pi-1)(\pi-2))}{6}$

$$\binom{-1}{n} = \frac{((-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n))}{(n!)} = (-1)^n$$

Tétel: Binomiális sor

Ha α valós, akkor $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$ ha |x| < 1

A konvergencia sugár = 1,
α ≥ 0 esetén x = +/- 1-re,
-1 < α < 0 esetén x = 1-re is egyenlőség áll fenn,
a többi esetben x = +/- 1-re divergens a sor

Megj.: Ha α ≥ 0 egész, akkor n > α-ra $\binom{\alpha}{n} = 0 = \frac{(\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1))}{(n!)}$ és akkor

$$(1+x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

Pl.: $\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = \sum_0^{\infty} \binom{-1}{n} \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ |x| < 0-ra konvergens

Pl.: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-x)^n = \sum \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^n \cdot x^{2n} =$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)}{1} \cdot (-1) \cdot x^2 + \frac{\left\{\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\right\}}{(2!)} \cdot x^4 + \frac{\left\{\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)\right\}}{(3!)} \cdot (-1)^3 \cdot x^6 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{(1\cdot 3)}{(2\cdot 4)} \cdot x^4 + \frac{(1\cdot 3\cdot 5)}{(2\cdot 4\cdot 6)} \cdot x^6 + \frac{(1\cdot 3\cdot 5\cdot 7)}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8)} \cdot x^8 + \ldots \quad |x| < 1$$

$$\text{arc sin } (x) = \sum \binom{-\frac{1}{2}}{n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{(x^{2n+1})}{(2n+1)} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2)}{3} + \frac{(1\cdot 3)}{(2\cdot 4)} \cdot \frac{(x^5)}{5} +$$

$$+ \frac{(1\cdot 3\cdot 5)}{(2\cdot 4\cdot 6)} \cdot \frac{(x^7)}{7} + \ldots \quad |x| < 1$$

Def: $1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n+1) = (2n+1)!!$ (semifaktoriális)
$2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n) = (2n)!!$

Spec: $\frac{\pi}{2} = \text{arc sin } (1) = 1 + \sum_{0}^{\infty} \frac{((2n-1)!!)}{((2n)!!)} \cdot \frac{1}{(2n+1)}$

Pl.: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0 \binom{\frac{-1}{2}}{n} \cdot x^{2n}$

$$\text{ar sh } (x) = \sum_{0}^{\infty} \binom{\frac{-1}{2}}{n} \cdot \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) ; \ |x| \le 1$$

Tétel: Páros függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorában nincsenek páratlan x hatványok
Páratlan függvény sorában pedig nincsenek páros x hatványok
Biz: f páros → f' páratlan
$[\frac{d}{dx} \cdot f(x) = \frac{d}{dx} \cdot f(-x) = \frac{-d}{dx} \cdot f(-x)]$
f páratlan → f' páros
Ezért f páros => $f^{(2n)}$ páros, $f^{(2n+1)}$ páratlan

Taylor-soron $f^{(2n+1)}(0) = 0$ => x^{2n+1} együtthatója 0
(páratlan függvény 0-ban vett deriváltja csak 0 lehet)

<u>Visszavezetés ismert Taylor-sorra:</u>

$$ch^2(x) = \frac{(1+ch(2x))}{2} = 1 + \frac{(2x)^2}{(2\cdot 2!)} + \frac{(2x)^4}{(2\cdot 4!)} + \frac{(2x)^6}{(2\cdot 6!)} + \ldots \qquad x \text{ valós}$$

$$\ln(x) = \ln(3 + (x-3)) = \ln 3\left(1 + \frac{(x-3)}{3}\right)) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{(x-3)}{3}\right) =$$

$x_0 = 3$ $\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$

$$= \ln 3 + \frac{(x-3)}{3} - \frac{\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x-3}{3}\right)^3}{3} - \ldots \text{ ha } \left|\frac{(x-3)}{3}\right| < 1 \text{ azaz } 0 < x < 6$$

$$\sin(x) = (\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{(2!)} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{(3!)} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4}{(4!)} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5}{(5!)} - \ldots\right]$$

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{(2!)} + \frac{t^4}{(4!)} - \frac{t^6}{(6!)} + \ldots$$

$$\sin(t) = 1 - \frac{t^3}{(3!)} + \frac{t^5}{(5!)} - \frac{t^7}{(7!)} + \ldots$$

Pl.: $\frac{1}{(2x - x^2)} = \frac{1}{(1-(x-1)^2)} = 1 + (x-1)^2 - (x-1)^4 + (x-1)^6 - \ldots$

$x_0 = 1$ $\qquad |x-1| < 1$

$$\frac{1}{(2x - x^2)} = \frac{(\frac{1}{2})}{x} + \frac{(\frac{1}{2})}{(2-x)} =$$

$x_0 = 3$

$$\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(6 \cdot 2)}\right) \cdot (x-3) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(6 \cdot 3^2)}\right) \cdot (x-3)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(6 \cdot 3^3)}\right) \cdot (x-3)^3 - \ldots, \text{ ha } |x-3| < 1$$

$$\frac{1}{2x} = \frac{1}{((2x-6)+6)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{(x-3)}{3}\right)} = \frac{1}{6} \cdot$$

$$\left(1 - \frac{(x-3)}{3} + \left(\frac{(x-3)}{3}\right)^2 - \left(\frac{(x-3)}{3}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$\left|\frac{(x-3)}{3}\right| < 1$$

$$\frac{1}{(4-2x)} = \frac{1}{((6-2x)-2)} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{(1+(x-3))} = \frac{-1}{2} \cdot (1 - (x-3) + (x-3)^2 - \ldots)$$

ha $|x-3| < 1$

Pl.: $\left(\sin\frac{(x)}{x}\right)^{(50)}$ (0) (=$f^{(50)}(0)$)

f(x) = $\sin\frac{(x)}{x}$ ha $x \neq 0$

= 1 ha $x = 0$

f(x) = $\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{(f^{(n)}(0))}{(n!)}\right) \cdot x^n = 1 - \frac{x^2}{(3!)} + \frac{x^4}{(5!)} - \frac{x^6}{(7!)} + \ldots - \frac{x^{50}}{(51!)} + \ldots$

=> $\frac{(f^{(50)}(0))}{(51!)} = \frac{-1}{(51!)}$ => $f^{(50)}(0) = \frac{-1}{51}$

<u>A Taylor sorfejtés hátrányai:</u>

1) Kevés függvény fejthető Taylor-sorba
2) x_0-tól távolabb lassan konvergál
3) Numerikus kiszámítás nehészégei

$e^{-20} = \sum_{0}^{\infty}\left(\frac{(-20)^n}{(n!)}\right)$

n= 20-nál $\frac{20^{20}}{(20!)} \approx 4 \cdot 10^7$

10 jegyre számítunk => $\frac{20^{20}}{(20!)}$ -nál 10^{-3} nagyságú kezelési hiba lesz

<u>Fourier-sorok</u>

Def: $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$ <u>trigonometrikus sor,</u>

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$ <u>trigonometrikus polinom (≤N-ed fokú)</u>

Def: A 2π -periodikus, [0; 2π]-n integrálható f(x) függvény <u>Fourier-sora</u>

f(x) ~ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$, ahol

$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi}(f(x) \cdot \cos(n \cdot x)dx)$

$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{0}^{2\pi}(f(x) \cdot \sin(n \cdot x)dx)$

Fourier együtthatók

Megj.: $a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{c}^{c+2\pi}(f(x) \cdot \cos(n \cdot x)dx)$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_c^{c+2\pi} \left(f(x) \cdot \sin(n \cdot x)\, dx \right)$$

Pl.: f(x) = 1 $\quad 0 \le x < \pi$
$\quad$ = 2 $\quad \pi \le x < 2\pi$ $\qquad$ Fourier-sora?

$$A_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_c^{c+2\pi} \left(f(x) \cdot \cos(n \cdot x)\, dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(\cos(n \cdot x)\, dx \right) +$$

$$\left[\frac{(\sin(x))}{x} \right]_0^{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \left(\cos(n \cdot x)\, dx \right) = 0$$

$$\left[\frac{(\sin(nx))}{x} \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (f) = \frac{1}{\pi} \cdot 3\pi = 3$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \left(\sin(nx)\, dx \right) + \frac{2}{2\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\pi} \left(\sin(nx)\, dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\cos(n\pi) - 1)}{n} =$$

$$\left[\frac{(-\cos(nx))}{n} \right]_0^{\pi} \qquad \left[\frac{(-\cos(nx))}{n} \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$\frac{(1 - \cos(n\pi))}{n} \qquad \frac{(\cos(n\pi) - 1)}{n}$$

= 0, ha n páros
= $\frac{-2}{(\pi n)}$, ha n páratlan

$$f(x) \approx \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{(\sin(x))}{1} + \frac{(\sin(3x))}{3} + \frac{(\sin(5x))}{5} + \ldots \right) \quad \text{ha } x \neq k\pi$$

és $\frac{3}{2}$ = …, ha x = kπ

Tétel: <u>elégséges feltétel Fourier-sor konvergenciájára:</u>
Legyen f(x) 2π periodikus, eleme R[0, 2π]. Ha x_0-ban léteznek az f féloldali deriváltjai, akkor $S_n(f, x_0) \to \frac{(f(x_0+0) + f(x_{-0}))}{2}$

Spec: HA f diffható x_0-ban, akkor $S_n(f, x_0) \to f(x_0)$

Megj.: f eleme $\to$ a Fourier-sor tart f-hez

Tétel: <u>Egyenletes konvergencia:</u>
a) Ha f eleme $C^1(a,b)$, akkor $S_n f \Rightarrow f$ [c,d]-n, a < c <d < b
b) Ha f eleme $C^1[0, 2\pi]$ és f(2π) = f(0), akkor $S_n f \Rightarrow f$ **R**-en

Pl.: $f(x) = x^2$, ha $|x| \leq \pi$

2π-priodikus

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2\, dx\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 \cdot \cos(n \cdot x)\, dx\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \underbrace{\left[x^2\left(\frac{(\sin(nx))}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{0} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(x\left(\frac{(\sin(nx))}{n}\right) dx\right) = \frac{2}{2\pi} \cdot \underbrace{\left[x\left(\frac{(\cos(nx))}{n^2}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{\frac{4}{\pi} \cdot \pi \cdot \frac{(\cos(nx))}{n^2}} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{(\cos(nx))}{n^2} dx\right)}_{0} = \frac{4}{n^2} \cdot \cos(n\pi) = \frac{4}{n^2} \cdot (-1)^n$$

$b_n = 0$, mert f páros

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{(\cos(\pi))}{1^2} - \frac{(\cos(2\pi))}{2^2} + \frac{(\cos(3\pi))}{3^2} - \ldots\right)$$ a konvergencia egyenletes **R**-en

Spec: $x = \pi$

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{(\cos(\pi))}{1^2} - \frac{(\cos(2\pi))}{2^2} + \frac{(\cos(3\pi))}{3^2} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4 \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Tétel: f páratlan → minden $a_n = 0$

f páros → minden $b_n = 0$

Biz: páratlan f-re $a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \cdot \cos(nx)\, dx\right) = 0$

páros f-re hasonló

Pl.: Az {1, cos(x), sin(x), cos(2x), sin(2x), …} trigonometrikus rendszer függvényei páronként merőlegesek az $\langle f,g \rangle = \int_0^{2\pi} \left(f(x) g(x)\, dx\right)$ skaláris szorzatra

$\cos(3x) \perp \cos(4x)$, mert $\int_0^{2\pi} \left(\cos(3x) \cdot \cos(4x)\, dx\right) = \left[\frac{(\sin(x))}{2} - \frac{(\sin(7x))}{14}\right]_0^{2\pi} = 0$

$$\frac{(\cos(x)-\cos(7x))}{2}$$

$\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = \dfrac{(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))}{2}$

$\sin(x) \perp \sin(5x)$, mert $\int_0^{2\pi}(\sin(x)\cdot\sin(5x)\,dx) = \int_0^{2\pi}\left(\dfrac{(\cos(4x)-\cos(6x))}{2}dx\right) = 0$

Ha $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ ortogonális bázis, akkor $\underline{v} = \sum (\langle\underline{v};\, \underline{e}_i\rangle/\|\underline{e}_i\|^2)\cdot\underline{e}_i$

Tétel: Ha $T_n = \dfrac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cdot\cos(kx)+B_k\cdot\sin(kx))$ trigonometrikus polinom, akkor $\int_0^{2\pi}|f-T_n|^2\,dx$ minimális $\leftrightarrow T_n = S_n f$

Azaz: f(x) merőleges vetülete a Lim{1, cos(x), sin(x), … ,cos(nx), sin(nx)} altérre éppen a Fourier-sor n-ik részletösszege

Komplex Fourier-sorok:

$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}(c_n\cdot e^{(i\cdot n\cdot x)})$, ahol $c_n = \dfrac{1}{\pi}\cdot\int_0^{2\pi}(f(x)\cdot e^{(-i\cdot n\cdot x)}dx)$

A sor n-ik részletösszege:

$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n}(c_k\cdot e^{(i\cdot k\cdot x)})$

Kapcsolat a valós Fourier-sorral:

$c_k = \dfrac{(a_k - i\cdot b_k)}{2}$ ha $k \geq 0$

$= \dfrac{(a_{-k}+i\cdot b_{-k})}{2}$ ha $k < 0$

Az átírás alapja:

$\cos(n\cdot x) = \dfrac{(e^{(i\cdot n\cdot x)}+e^{(-i\cdot n\cdot x)})}{2}$

$\sin(n\cdot x) = \dfrac{(e^{(i\cdot n\cdot x)}-e^{(-i\cdot n\cdot x)})}{2i}$

$[e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\cdot\sin(\alpha)]$

A valós és a komplex Fourier-sorok részletösszegei megegyeznek

Tétel: Parseval-formula:

$$\int_0^{2\pi}(|f|)^2 = 2\pi\cdot\sum_{-\infty}^{\infty}(|c_n|)^2$$