Bevezetés a számításelméletbe I.
Pótzárthelyi feladatok, első pótzh — pontozási útmutató
2013. december 9.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut).

Ha valaki egy feladatra több lényegesen különböző megoldást ír le, akkor ezek közül a legkisebb pontszámút kell értékelni.

Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Mely a valós számokra teljesül, hogy az $ax + 2y + 3z = 4$ egyenletű síknak és az $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{4}$ egyenletrendszerű egyenesnek nincsen közös pontja?

* * * * *

Első megoldás. Ahhoz, hogy a síknak és az egyenesnek ne legyen közös pontja, pontosan az szükséges, hogy párhuzamosak legyenek, de az egyenes ne legyen teljes egészében a síkban. (2 pont)
A párhuzamosság pontosan akkor teljesül, ha az egyenes (egyik) irányvektora merőleges a sík (egyik) normálvektorára. (2 pont)
Az egyenes irányvektora $(2, 3, 4)$, a sík normálvektora $(a, 2, 3)$. (2 pont)
Ezek akkor merőlegesek, ha a skalárszorzatuk nulla, (1 pont)
azaz $2a + 6 + 12 = 0$, ahonnan $a = -9$. (1 pont)
Hátra van annak az ellenőrzése, hogy ekkor az egyenes benne fekszik-e a síkban. Mivel könnyen látható, hogy (például) az origó az egyenesen rajta van, a síkon viszont nem, $a = -9$ esetén a feltétel valóban teljesül (máskor pedig nem). (2 pont)

Második megoldás. Ahhoz, hogy a síknak és az egyenesnek ne legyen közös pontja, pontosan az szükséges, hogy a sík egyenletéből és az egyenes egyenletrendszeréből kapott, három egyenletből álló rendszernek ne legyen megoldása. (2 pont)
Az egyenes egyenleteiből $x = \frac{z}{2}, y = \frac{3z}{4}$. (3 pont)
Ezt a sík egyenletébe beírva $\frac{az}{2} + \frac{3z}{2} + 3z = 4$, (1 pont)
azaz $\left(\frac{9}{2} + \frac{a}{2}\right) z = 4$. (1 pont)
Ennek pontosan akkor nincs megoldása, ha $\left(\frac{9}{2} + \frac{a}{2}\right) = 0$, azaz ha $a = -9$. (3 pont)

2. Legyenek U és W a V vektortér alterei. Bizonyítsuk be, hogy $U \cup W$ akkor és csak akkor altere V-nek, ha vagy $U \subseteq W$, vagy $W \subseteq U$ fennáll.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

$U \subseteq W$ esetén $U \cup W = W$, $W \subseteq U$ esetén $U \cup W = U$, az $U \cup W$ mindkét esetben nyilván altér lesz. (1 pont)
A másik irány bizonyításához tegyük fel indirekten, hogy $U \cup W$ altere V-nek, de $U \subsetneq W$ és $W \subsetneq U$. (0 pont)
Ekkor léteznek olyan u és w vektorok, melyekre $u \in U \setminus W$ és $w \in W \setminus U$. (2 pont)
Mivel mindkét vektor benne van $U \cup W$-ben és $U \cup W$ altér, az alterek összeadásra való zártsága miatt $u + w \in U \cup W$. (2 pont)
Így $u + w \in U$ vagy $u + w \in W$. (1 pont)
Az U altér skalárral szorzásra való zártsága miatt $-1 \cdot u = -u \in U$. (1 pont)
Ha tehát $u+w \in U$, akkor az U altér összeadásra való zártsága miatt $(u+w)+(-u) = w \in U$, (1 pont)
ami ellentmond w választásának. (1 pont)
Természetesen ugyanígy kapunk ellentmondást $u + w \in W$ esetén. (1 pont)

3. Független rendszert alkotnak-e az
a) $(1,1,1,3),(1,1,3,1)(1,3,1,1),(3,1,1,1)$ vektorok?
b) $(1,1,1,-3),(1,1,-3,1)(1,-3,1,1),(-3,1,1,1)$ vektorok?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

a) A vektorok pontosan akkor lesznek függetlenek, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, vagyis az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. (2 pont)
Az egyenletrendszer Gauss-eliminációval

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

alakra hozható, (2 pont)
azaz a megoldás egyértelmű, a vektorok függetlenek. (1 pont)

b) Eljárhatunk az a) esethez hasonlóan, de egyszerűbb, ha észrevesszük, hogy a négy vektor összege a csupa nulla vektor, tehát ezek a vektorok nem alkotnak független rendszert, (3 pont)
hiszen van olyan nem triviális lineáris kombinációjuk, ami a nullvektort adja. (2 pont)

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} 3x + 5y + z &= 4 \\ 2x + y + cz &= c \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Az első és a harmadik, majd a második és a harmadik egyenlet cseréje után Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & c-3 & c+9 \end{array}\right)$ alakra hozható. (3 pont)
Ha $c \neq 3$, akkor a harmadik sort $(c-3)$-mal osztva (1 pont)

és a Gauss-eliminációt folytatva az $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -7-2\frac{c+9}{c-3} \\ 0 & 1 & 0 & 5+\frac{c+9}{c-3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c+9}{c-3} \end{array}\right)$ redukált lépcsős alakot kapjuk, (3 pont)
ahonnan a megoldás: $x = -7 - 2\frac{c+9}{c-3}$, $y = 5 + \frac{c+9}{c-3}$, $z = \frac{c+9}{c-3}$. (1 pont)
Ha $c = 3$, akkor az alsó sor tilos sor lesz, így ekkor nincs megoldása az egyenletrendszernek. (2 pont)

5. Egy négyzetes mátrixot nevezzünk kellemesnek, ha determinánsának definíció szerinti kiszámításakor pontosan 1 nullától különböző szorzatot kapunk.

a) Mutassuk meg, hogy ha egy $n \times n$–es mátrix kellemes, akkor legalább $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmaz.

b) Mutassuk meg, hogy tetszőleges n pozitív egész esetén létezik $n \times n$–es kellemes mátrix, ami pontosan $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmaz.

* * * * *

a) Könnyen látható, hogy sorok cseréje nem befolyásolja egy mátrix kellemes voltát, (2 pont)
feltehető tehát, hogy az egyetlen nem nulla szorzat a főátlóbeli elemekhez tartozik. (1 pont)
Az (i, j), illetve (j, i) pozícióban lévő elemek valamelyikének tetszőleges $i \neq j$ esetén nullának kell lennie, (1 pont)
ellenkező esetben az i. sorból a j. elemet, a j. sorból az i. elemet, a többi sorból pedig a főátlóbeli elemet választva nem nulla szorzatot kapnánk. (3 pont)
Mivel a különböző ilyen (i, j) párok száma $\frac{n^2-n}{2}$ és a hozzájuk tartozó elemek között nincs két azonos, csakugyan szükséges, hogy a mátrix legalább $\frac{n^2-n}{2}$ nullát tartalmazzon. (1 pont)

b) Egy olyan felső háromszögmátrix, melyben a főátló és minden (nem feltétlen közvetlenül) a főátló fölött lévő elem nullától különböző, nyilván jó lesz. (2 pont)

6. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Hány olyan 2×2–es B mátrix létezik, melyre $AB = A$?

* * * * *

Ha $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, akkor a mátrixszorzás definíciója szerint a megadott feltétel az $a + c = 1, 2a + 2c = 2, b + d = 1, 2b + 2d = 2$ alakot ölti. (5 pont)
A második, illetve a negyedik egyenlet az elsőből, illetve a harmadikból következik, tehát az $a + c = 1, b + d = 1$ egyenletrendszer megoldásainak számára vagyunk kíváncsiak. (1 pont)
Mivel tetszőleges a-hoz tartozik alkalmas c és tetszőleges b-hez tartozik alkalmas d, (3 pont)
a megoldások száma nyilván végtelen sok. (1 pont)