2. Analízis az időtartományban

Ebben a részben megadjuk az olyan lineáris, invariáns rendszerek különböző időtartománybeli leírását, amelyeknek a gerjesztései és a válaszai vagy egyaránt diszkrét idejűek (DI) vagy egyaránt folytonos idejűek (FI).

Az időtartománybeli leírás az jelenti, hogy a rendszer gerjesztésének és válaszának leírására az $u[k]$ és $y[k]$ illetve az $u(t)$ és $y(t)$ változókat használjuk. A 3. illetve a 4. részben az időtartományban értelmezett változókhoz rendelt más (a frekvenciatartományban illetve a komplex frekvenciatartományban értelmezett) változókat is használunk majd.

A tárgyalás során vagy párhuzamosan vagy közvetlenül egymás után tárgyaljuk a diszkrét idejű és a folytonos idejű rendszereket. A tárgyalást a DI esettel kezdjük, mert az többnyire egyszerűbben kezelhető. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a jelek valósak és folytonos értékűek, tehát még a DI esetben sem vesszük figyelembe a digitális rendszerekben alkalmazott kvantálás hatását.

A 2.1. fejezetben értelmezzük a lineáris rendszer impulzusválaszát, és megmutatjuk néhány alkalmazását, mint pl. az adott gerjesztéshez tartozó válasz számítása, a rendszer gerjesztés-válasz (GV) stabilitásának vizsgálata.

A 2.2. fejezetben értelmezzük a lineáris, invariáns rendszer rendszeregyenletét, bemutatjuk megoldásának néhány módszerét, megvizsgáljuk a rendszer GV stabilitását a rendszeregyenletének ismeretében. Ez a fejezet kihagyható, a következő, ennél célszerűbb leírást tartalmazó fejezetek e nélkül is megérthetők. Egyes szakterületeken viszont ez az elterjedtebb rendszer leírás.

A 2.3. fejezetben tárgyaljuk a lineáris, invariáns rendszer állapotváltozós leírását és e leírás megoldásának néhány módszerét. Értelmezzük az aszimptotikus stabilitást és módszert adunk annak eldöntésére. A modellezendő objektum vagy annak hálózati reprezentációja alapján többnyire az állapotváltozós leírás egyszerűbben állítható elő, mit akár az impulzusválasz, akár a rendszeregyenlet. Az állapotváltozós leírás azért is általánosabb az előzőknél, mert kézenfekvőbb az általánosítása nemlineáris vagy variáns rendszerekre.

A 2.4. fejezetben lineáris, invariáns jelfolyam hálózatokkal foglalkozunk. Megmutatjuk, hogy miként állítható elő a hálózat által reprezentált lineáris, invariáns, kauzális rendszer állapotváltozós leírása, továbbá hogy miként rendelhető jelfolyam hálózat egy állapotváltozós leírásával vagy rendszeregyenletével jellemzett rendszerhez. A hálózatok iránt nem érdeklődő olvasó ezt a fejezetet kihagyhatja.

A 2.5. fejezet tárgya a nemlineáris rendszerek állapotváltozós leírása, jelfolyam hálózatos reprezentációja, az állapotegyenlet közelítő megoldásának néhány módszere, a megoldás szemléltetése. Ennek a fejezetnek a témájával a későbbiekben nem foglalkozunk.

Egy rendszernek az időtartománybeli leírása tekinthető a természetes tárgyalásnak. Sok rendszerelméleti feladat azonban könnyebben megoldható vagy a 3. részben tárgyalandó frekvenciatartománybeli vagy 4. részben tárgyalandó komplex frekvenciatartománybeli leírásmóddal. Vannak olyan feladatok, amelyek az időtartományban nem is fogalmazhatók meg egyszerűen. A két utóbbi leírásmód azonban csak lineáris, invariáns rendszerek esetén alkalmazhatók kényelmesen.

A 2. rész önmagában lezártnak tekinthető. Erre épül a 3. és a 4. rész. Az utóbbi tanulmányozásához az előbbi kihagyható, vagy a két fejezet tanulmányozásának sorrendje felcserélhető.

2.1. Az impulzusválasz és alkalmazásai

Egy lineáris, invariáns rendszer válaszát meg tudjuk határozni, ha ismerjük bármely konkrét $u=u_0$ gerjesztéshez tartozó $y=y_0$ válaszát. Ez az y_0 jel jellemzi a rendszert, alkalmas explicit gerjesztés-válasz kapcsolatának megfogalmazására. A legelterjedtebb ilyen speciális gerjesztés a diszkrét idejű $\delta[k]$ egységimpulzus, illetve a folytonos idejű $\delta(t)$ Dirac-impulzus, mert az ehhez tartozó $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválasz ismeretében a legegyszerűbb a tetszőleges $u[k]$, illetve $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y[k]$, illetve $y(t)$ válasz kifejezése.

A 2.1-1. szakaszban diszkrét idejű rendszerekkel, a 2.1-2. szakaszban folytonos idejű rendszerekkel foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy a diszkrét idejű rendszerek kezelése egyszerűbb, mint a folytonos idejű rendszerek kezelése, ezért - noha talán kevésbé megszokottak - a továbbiakban is a diszkrét idejű rendszerekkel kezdjük vizsgálatainkat.

2.1-1. Diszkrét idejű rendszer impulzusválasza

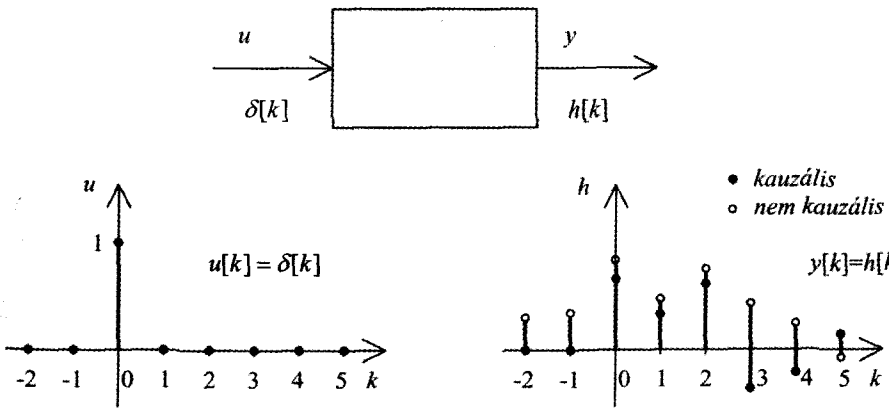
2.1-1.1. Az impulzusválasz definíciója

Megadjuk a DI rendszer impulzusválaszának definícióját, majd bemutatjuk alkalmazását.

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer $h = h[k]$ *impulzusválasza* a rendszernek az egységimpulzus gerjesztéshez tartozó válasza (1. ábra):

$$u[k] = \delta[k] \;\Rightarrow\; y[k] = h[k]. \qquad (2.1\text{-}1)$$

Az impulzusválaszt súlyfüggvénynek is nevezik. Ennek okát a következő pontban látni fogjuk.



2.1-1. ábra Egy DI rendszer impulzusválasza az egységimpulzushoz tartozó válasza

A lineáris, invariáns, diszkrét idejű rendszer akkor és csakis akkor *kauzális*, ha impulzusválasza belépő jel, vagyis $h[k]=0,\ k\in\mathbf{Z}$, tulajdonságú.

Nem részletezzük e kézenfekvő állítás igazolását.

Ha ismerjük a rendszer $y=\mathscr{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatát, akkor az impulzusválasz $h[k]=\mathscr{W}\{\delta[k]\}$ alakban formálisan is kifejezhető.

Egy rendszer impulzusválasza meghatározható az objektumon végzett méréssel. Először meg kell győződni arról, hogy a diszkrét idejű, lineáris, invariáns modell alkalmazható-e. Ha igen, akkor az objektumra egy $u[k]=U\ \delta[k]$ gerjesztést kapcsolunk, megmérjük az $y[k]$ választ és ebből számítjuk a $h[k]=y[k]/U$ impulzusválaszt a mérés által lefedett k értékekre. Nem könnyű feladat egyszerű és jól közelítő $h[k]$ függvényt találni. A mérési pontokra történő tökéletes illesztést már csak azért sem kell biztosítani, mert a mérési eredmény maga nem pontos. A válasz értékei azonban számíthatók a függvény ismerete nélkül is, mint látni fogjuk

Ha a rendszernek sok gerjesztése és sok válasza van, akkor minden gerjesztés-válasz párhoz egy h_{pq} impulzusválasz rendelhető: $y_p[k]=h_{pq}[k]$, ha $u_q[k]=\delta[k]$ és minden más $u_i[k]=0$.

Egy kauzális rendszert *véges impulzusválaszú* (FIR típusú, „Finite Impulse Response") rendszernek nevezünk, ha az impulzusválasza azonosan nulla egy L - 1 ütem után. Az impulzusválasz hossza ekkor L ütem. A FIR típusú rendszer impulzus-válaszának általános alakja

$$h[k]=0;\quad k\le -1,\quad k\ge L\ . \tag{2.1-2}$$

Később látni fogjuk, hogy a FIR típusú rendszer előnyös tulajdonsága, hogy feltétlenül GV stabilis.

Általános esetben egy rendszer végtelen impulzusválaszú (IIR típusú, „Infinite Impulse Response").

2.1-1.2. A válasz számítása

Meg akarjuk határozni a $h=h[k]$ impulzusválaszú DI rendszernek az $u=u[k]$ gerjesztéshez tartozó $y=y[k]$ válaszát.

A gerjesztés felírható a következő alakban:

$$u[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u[i]\,\delta[k-i]$$

Az impulzusválasz definíciója szerint a $\delta[k]$ gerjesztéshez $h[k]$ válasz tartozik. A rendszer invariáns jellegéből következik, hogy a $\delta[k-i]$ gerjesztéshez $h[k-i]$ válasz tartozik. A rendszer lineáris jellegéből következik, hogy az $u[i]\delta[k-i]$ gerjesztések összegéhez az $u[i]h[k-i]$ válaszok összege tartozik.

A diszkrét idejű, lineáris, invariáns, $h[k]$ impulzusválaszú rendszernek az $u[k]$ gerjesztéshez tartozó *válasza* a következő alakban fejezhető ki:

$$y[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h[k-i]u[i],\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{2.1-3}$$

A művelet neve: h és u *konvolúciója.* A DI konvolúció szimbolikus alakja

$$y[k] = h[k] * u[k]. \tag{2.1-4}$$

Ennek jelentését a (3) adja. Az Olvasó is beláthatja, hogy a konvolúció kommutatív, asszociatív és az összeadásra disztributív művelet.

A $p = k - i$ új változó bevezetésével a válasz kifejezhető a következő alakban is:

$$y[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[p]u[k-p], k \in \mathbf{Z}. \tag{2.1-5}$$

Kauzális rendszerre $h[k]$ belépő jel és az összefüggések egyszerűsödnek:

$$y[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} h[k-i]u[i] = \sum_{p=0}^{\infty} h[p]u[k-p], k \in \mathbf{Z}. \tag{2.1-6}$$

Ha a rendszer *kauzális* és a gerjesztés *belépő* jel, akkor a válasz is belépő:

$$y[k] = \varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k} h[k-i]u[i] = \varepsilon[k]\sum_{p=0}^{k} h[p]u[k-p]. \tag{2.1-7}$$

A gyakorlati esetek többségében a (7) alak használható. A (3) általános alak akkor is érvényes, ha a rendszer nem kauzális nem GV stabilis és a gerjesztés nem belépő. A később tárgyalandó rendszer leírások egyike sem rendelkezik e tulajdonságok mindegyikével.

A válasz értékei kauzális rendszer és belépő gerjesztés esetén részletesebben megadva a (7) értelmében következők:

$$\begin{aligned} y[0] &= h[0]u[0], \\ y[1] &= h[1]u[0] + h[0]u[1], \\ y[2] &= h[2]u[0] + h[1]u[1] + h[0]u[2], \ \dots \ . \end{aligned} \tag{2.1-8}$$

A válasz $y[k]$ értékei akkor is számíthatók, ha $h[k]$ és $u[k]$ értékei csak numerikus sorozatként ismertek.

A konvolúció egyszerűen számítható zárt alakban tetszőleges k esetére, ha $h[k]$ és $u[k]$ egyaránt leírható exponenciális függvénnyel. Ebbe beletartozik az állandó, a szinuszos és az exponenciálisan csillapított szinuszos jel is.

A válasz (3) kifejezése a következőképpen értelmezhető. Az $y[k]$ értéke valamennyi $u[i]$ súlyozott összege. A $h[k - i]$ adja meg azt a súlyt, amellyel $u[i]$ az $y[k]$ kifejezésében szerepel. Ez magyarázza az impulzusválasz „súlyfüggvény" elnevezését is. A súly nulla is lehet. Kauzális rendszerre a súly nulla $k - i < 0$, azaz $i > k$ esetén, ami azt jelenti, hogy $u[i]$ ezen értékei nem befolyásolják $y[k]$ értékeit, a „jövő" nem befolyásolja a „jelent".

Egy FIR típusú kauzális rendszer impulzusválaszának és az $u[k]$ gerjesztéshez tartozó válaszának kifejezése

$$h[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L])f[k] \Rightarrow y[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h[i]u[k-i]. \tag{2.1-9}$$

A válasz k bármely értékére legfeljebb L tag összege: az $u[k], u[k-1], \dots, u[k-(L-1)]$ lineárkombinációja. Ha a gerjesztés is véges idejű, akkor $y[k]$ is véges idejű.

A (4) az $y = \mathscr{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolat egy konkrét alakja.

1. példa Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = \varepsilon[k]\, q^k$.

Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k]\, a^k$.

A kauzális rendszernek a belépő gerjesztéshez tartozó válasza maga is belépő jel, vagyis $y[k] = 0$, ha $k \in \mathbf{Z}_-$. Ha $k \in \mathbf{Z}_+$, akkor például (8) értelmében:

$$y[0]=1\cdot 1=1,\quad y[1]=1\cdot a+q\cdot 1=a+q,\quad y[2]=1\cdot a^2+q\cdot a+q^2\cdot 1=a^2+qa+q^2,$$

és így tovább. Még ebben a nagyon egyszerű esetben sem könnyű kitalálni $y[k]$ általános kifejezését.

Alkalmazzuk most az általános (3) vagy a most érvényes speciális (7) alakot:

$$y[k]=\varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k} h[k-i]u[i]=\varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k} q^{k-i}a^i=\varepsilon[k]q^k\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{a}{q}\right)^i.$$

E geometriai sor hányadosa (a/q), a sor összege $a \neq q$ esetén ismeretesen

$$y[k]=q^k\,\frac{1-(a/q)^{k+1}}{1-(a/q)}=\frac{q^{k+1}-a^{k+1}}{q-a},\quad k\in\mathbf{N}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy $k = 0$, 1 és 2 esetén a már számított eredmény adódik. A válasz teljes leírása (az $a = q$ eset közvetlenül is, határértékként is számítható)

$$y[k]=\varepsilon[k]\frac{q^{k+1}-a^{k+1}}{q-a},\ a\neq q;\qquad y[k]=\varepsilon[k](k+1)q^k,\ a=q.$$

Ha $|a|<1$ és $|q|<1$, akkor $|y[k]|\to 0, k\to\infty$. Ha akár $|a|>1$, akár $|q|>1$, akkor $|y[k]|\to\infty, k\to\infty$. #

2. példa Határozzuk meg az előző példában vizsgált rendszer válaszát, ha gerjesztése

$$u[k]=(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L])a^k,\quad L\in\mathbf{N},\quad a\neq q.$$

A válasz számítható (7) felhasználásával. Ehhez az összegezést két részre célszerű bontani: ha $i = 0, 1,..., L-1$, akkor $u[i] = a^i$, egyébként $u[i] = 0$.

Egyszerűbb azonban a választ a szuperpozíció elvének alkalmazásával számítani. Az $u_1[k]=\varepsilon[k]a^k$ gerjesztéshez tartozó $y_1[k]$ válasz az előző példából ismert. Az

$$u_2[k] = \varepsilon[k-L]\, a^k \equiv a^L\, \varepsilon[k-L]\, a^{k-L} = a^L\, u_1[k-L]$$

gerjesztéshez tartozó válasz a rendszer lineáris és invariáns jellege következtében nyilván $y_2[k] = a^L\, y_1[k-L]$. A keresett válasz kifejezése tehát

$$y[k]=\varepsilon[k]\frac{q^{k+1}-a^{k+1}}{q-a}-\varepsilon[k-L]a^L\,\frac{q^{k+1-L}-a^{k+1-L}}{q-a}.$$

Áttekinthetőbb a válasz elemi átalakítással előállítható következő, ablakozott alakja:

$$y[k]=(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L])\,\frac{q^{k+1}-a^{k+1}}{q-a}+\varepsilon[k-L]\,\frac{q^L-a^L}{q-a}\,q^{k+1-L}.$$

Látható, hogy $|q| < 1$ esetén $|y[k]| \to 0$, $k \to \infty$, és ez független a értékétől. Ez nem meglepő, hiszen a rendszer $k \geq L$ esetén gerjesztetlen. #

3. példa Egy rendszer impulzusválasza

$$h[k] = \varepsilon[k]\, q^k.$$

Határozzuk meg az $u[k] = \varepsilon[k] \cos \vartheta k$ belépő gerjesztéshez tartozó választ!

A konvolúciós összeg számítása nehéz feladatnak látszik. Egyszerűsödik a feladat az Euler-reláció alkalmazásával ($\mathrm{j} \equiv \sqrt{-1}$ a képzetes egység jele):

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \equiv \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha\,, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha} \equiv \cos\alpha - \mathrm{j}\sin\alpha\ ;$$

$$\cos\alpha \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}\right), \quad \sin\alpha \equiv \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}\right).$$

A gerjesztés megadható ezek szerint a következő alakban is:

$$u[k] = \varepsilon[k]\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta k} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta k}\right).$$

Most már felhasználhatjuk az 1. példa eredményét $\boldsymbol{a} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$ **és** $\boldsymbol{a} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta}$ helyettesítéssel. (Az 1. példában nem feltételeztük, hogy a valós értékű!) Azt kapjuk, hogy

$$y[k] = \varepsilon[k]\left(\frac{q^{k+1} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta(k+1)}}{2\left(q - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}\right)} + \frac{q^{k+1} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta(k+1)}}{2\left(q - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\vartheta}\right)}\right).$$

Elemi átalakítással a következő, formailag is valós alakhoz jutunk:

$$y[k] = \varepsilon[k]\frac{\left(q^2 - q\cos\vartheta\right)q^k + \cos\vartheta\, k - q\cos\vartheta(k+1)}{q^2 + 1 - 2q\cos\vartheta}.$$

Ha $|q| < 1$, akkor $y[k] \to A\cos(\vartheta k + \rho)$, $k \to \infty$, ahol A és ρ állandók a q és ϑ paraméterek ismeretében a fenti eredményből számíthatók. #

***4. példa** Határozzuk meg az előző példákban szereplő rendszernek az $u[k] = a^k$ nem belépő gerjesztéshez tartozó válaszát!

Az (6) második alakjába helyettesítve kapjuk, hogy

$$y[k] = \sum_{p=0}^{\infty} h[p]u[k-p] = \sum_{p=0}^{\infty} q^p a^{k-p} = a^k \sum_{p=0}^{\infty} (q/a)^p.$$

A végtelen mértani sor csak akkor konvergens, ha $|q/a| < 1$. Ekkor

$$y[k] = \frac{1}{1-(q/a)}a^k\,, \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ ha } |q| < |a|.$$

Ha $|q/a| > 1$, akkor a feladat értelmetlen, mert $y[k]$ értéke nem véges a k bármely véges értékére. Az a tetszőleges, de csak az $|a| \geq 1$ eset értelmezhető $k \to -\infty$ esetén is. #

2.1-1.3. Gerjesztés-válasz stabilitás

Az 1.2-2.5. szakaszban már megadtuk a gerjesztés-válasz (GV) stabilitás definícióját. Az impulzusválasz ismeretében adhatunk jobban használható feltételt is. További rendszerleírások ismeretében további feltételekkel is meg fogunk ismerkedni.

A diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *gerjesztés-válasz stabilis* (azaz bármely korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik), ha impulzusválasza abszolút összegezhető:

$$\text{GV stabilis rendszer} \Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty . \qquad (2.1\text{-}10)$$

Ennek egy szükséges (és a gyakorlati esetek többségében elegendő) feltétele

$$h[k] \to 0, \text{ ha } k \to \infty. \qquad (2.1\text{-}11)$$

Ez a helyzet, ha $h[k]$ csökkenő exponenciális függvénnyel majorálható.

Kauzális rendszer impulzusválasza belépő jel. Ekkor az összegezés alsó határa ténylegesen $k = 0$.

A *véges impulzusválaszú* rendszer feltétlenül GV *stabilis*, hiszen ekkor a (10) összeg csak véges számú tagot tartalmaz.

A $h[k]=\varepsilon[k](1+k)^{-1}$ impulzusválasz kielégíti a (11) szükséges feltételt, de az általa jellemzett rendszer mégsem GV stabilis, mert (10) nincs kielégítve.

A *stabilitás határhelyzetében* lévőnek nevezhető az olyan nem GV stabilis DI rendszer, amelynek impulzusválasza ugyan nem abszolút összegezhető, de korlátos. Az ilyen rendszer válasza csak bizonyos gerjesztések esetén nem korlátos. Ha például $k \to \infty$ esetén $h[k]$ állandó értékhez tart, akkor $y[k]$ csak olyan korlátos $u[k]$ esetén nem korlátos, amely ugyancsak állandóhoz tart. Szokás *labilis rendszenek* nevezni az olyan nem GV stabilis rendszert, amelyik nincs a GV stabilitás határhelyzetében.

Példa Legyen a rendszer impulzusválasza $h[k] = \varepsilon[k]q^k$, ahol q lehet valós vagy $q = re^{j\vartheta}$ alakban komplex.

A rendszer akkor GV stabilis, ha $|q| < 1$, vagyis komplex $q = r\,e^{j\varphi}$ esetén ha $r < 1$. Ebben az esetben nem csak (11) teljesül, hanem

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |q|^k = \frac{1}{1-|q|}, \quad |q| < 1$$

értelmében a (10) is. Ha $|q| = 1$, akkor a rendszer a GV stabilitás **határhelyzetében van, ha** $|q| > 1$, akkor a rendszer GV labilis. Nyilvánvaló, hogy a

$$h[k] = \varepsilon[k]\left\{A_1\, q_1^k + A_2\, q_2^k + \ldots + A_n\, q_n^k\right\}$$

impulzusválasz akkor és csakis akkor jellemez egy GV **stabilis rendszert, ha** minden $|q_i| < 1$. #

A (10) állítás igazolásához legyen $|u[k]| \le M_u$ a korlátos gerjesztésre. Ekkor (3) értelmében

$$|y[k]| = \left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} h[p]u[k-p]\right| \le \sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]|\,|u[k-p]| \le M_u \sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]|.$$

Az $|y[k]|$ véges marad, azaz $y[k]$ korlátos, ha (10) teljesül, vagyis a feltétel elegendő.

A feltétel szükségességének igazolásához legyen $u[k] = 1$, ha $h[-k] \ge 0$ és legyen $u[k] = -1$, ha $h[-k] < 0$. Ekkor a (3) értelmében $k = 0$ helyettesítéssel

$$y[0] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[p]\,u[-p] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} |h[p]|.$$

Ez csak akkor véges, ha (10) teljesül, vagyis e feltétel szükséges.

*2.1-1.4. Az ugrásválasz és alkalmazásai

A lineáris rendszer válasza nem csak impulzusválaszának ismeretében határozható meg, hanem bármely adott gerjesztéshez tartozó válaszának ismeretében is. Itt csak a legegyszerűbb és leggyakrabban használt általánosítást tárgyaljuk.

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns rendszer $g = g[k]$ *ugrásválasza* a rendszernek az egységugrás gerjesztésre adott válasza:

$$u[k] = \varepsilon[k] \;\Rightarrow\; y[k] = g[k]. \tag{2.1-12}$$

Kauzális rendszer ugrásválasza belépő jel: $g[k] = 0,\ k \in \mathbf{Z}_-$.

Az impulzusválasz közvetlenül arról ad felvilágosítást, hogy miként viselkedik a rendszer válasza a gerjesztés megszűnése után. Az ugrásválasz azt adja meg, hogy miként viselkedik a rendszer válasza, ha gerjesztése egy bizonyos idő után állandó marad.

Mivel $\delta[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-1]$, ezért a g ugrásválasz ismeretében egyszerűen kifejezhető a h impulzusválasz és viszont:

$$h[k] = g[k] - g[k-1], \quad g[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} h[i] \tag{2.1-13}$$

A továbbiakban a rendszer jellemzésére az ugrásválaszt nem fogjuk használni.

2.1-1.F. Feladatok

F-1. Egy DI rendszer impulzusválasza

$$h[k] = 5\,\varepsilon[k-1]\left(0{,}5^{k-1} - 0{,}1^{k-1}\right).$$

Határozza meg az $y[k]$ választ a $k = 0$, 1, 2, és 3 ütemekre, ha $u[k] = \varepsilon[k]$.

F-2. Határozza meg az $y[k]$ válasz kifejezését, ha a $h[k]$ impulzusválasz az előző feladatban megadott és a rendszer gerjesztése

$(a)\ u[k] = \varepsilon[k]$. $(b)\ u[k] = \varepsilon[k](-0{,}1)^k$. $(c)\ u[k] = \varepsilon[k](0{,}1)^k$.
$(d)\ u[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-5]$. $(e)\ u[k] = 9\left(1 - \varepsilon[k]\right) + \varepsilon[k]$.

Ellenőrizze az eredményt $k = 0{,}1$ és 2 értékére!

F-3. Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = \varepsilon[k]\, q^k$.

Határozza meg e rendszer $u[k] = \varepsilon[k]$ gerjesztésre adott $y[k] = g[k]$ ugrásválaszát!

Mivel az impulzusválasz rendszerint ilyen tagok szuperpozíciója, ezért az eredmény sok esetre általánosítható.

F-4. Milyen tulajdonságú egy FIR típusú rendszer $g[k]$ ugrásválasza?

F-5. Egy kauzális IIR típusú rendszer gerjesztése véges hosszúságú: $u[k = 0, k \geq L]$.

Milyen tulajdonságú e rendszer válasza?

F-6. Egy DI rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$$y[k] = \frac{1}{4}u[k+1] + \frac{1}{2}u[k] + \frac{1}{4}u[k-1],$$

vagyis a válasz a gerjesztés súlyozott átlaga.

Határozza meg az impulzusválaszt! Kauzális-e, illetve GV stabilis-e ez a rendszer?

***F-7.** Igazolja, hogy a következő impulzusválaszú rendszerek GV stabilis rendszert jellemeznek:

$$(a)\ h[k] = \varepsilon[k]\frac{1}{k!}. \quad (b)\ h[k] = \varepsilon[k-1]k^{-2}. \quad (c)\ h[k] = \varepsilon[k-1]k^{-\alpha}, \alpha > 1.$$

F-8. Adott a válaszértékek $y[0], y[1],..., y[L]$ véges sorozata, továbbá

(a) adott a gerjesztés $u[0], u[1],..., u[L]$ sorozata. Határozza meg az impulzusválasz $h[0], h[1],..., h[L]$ sorozatát. Ez a rendszer-identifikáció problémája.

(b) adott az impulzusválasz $h[0], h[1],..., h[L]$ sorozata. Határozza meg a gerjesztés $u[0], u[1],..., u[L]$ sorozatát. Ez a feladat például, ha $u[k]$ a mérendő jel, $h[k]$ jellemzi a mérőműszert és $y[k]$ a mérési eredmény.

F-9. Egy DI rendszernek az $u[k] = \delta[k]$ gerjesztésre adott válasza $y[k] = \varepsilon[k]0{,}5^k$.

Igaz-e, hogy e rendszer kauzális, lineáris, invariáns és GV stabilis?

F-10. Egy DI rendszer impulzusválasza $h_1[k]$. E rendszer $y_1[k]$ válasza egy $h_2[k]$ impulzusválaszú rendszer $u_2[k]$ gerjesztése. Ez az elrendezés a két részrendszer kaszkád kapcsolása (nevezik soros kapcsolásnak is).

(a) Adja meg az $u = u_1$ gerjesztésű és $y = y_2$ válaszú rendszer h impulzusválaszát h_1 és h_2 ismeretében! Megváltozik-e h kifejezése, ha a két részrendszer felcseréljük?

(b) Adja meg $h[k]$ kifejezését, ha $h_1[k] = h_2[k] = \varepsilon[k]a^k$ alakú!

**(c)* Szükséges és elegendő feltétele-e a rendszer GV stabilitásának mindkét részrendszer GV stabilitása?

2.1-1.M. Megoldások

M-1. $h[0] = 0$, $h[1] = 0$, $h[2] = 2$, $h[3] = 1{,}2$. Ezek felhasználásával $y[0] = 0$, $y[1] = 0$, $y[2] = 2$, $h[3] = 3{,}2$.

M-2. A válasz általános alakja az *(a)-(d)* esetekben

$$y[k]=5\,\varepsilon[k-1]\sum_{i=0}^{k-1}\left(0{,}5^{k-1-i}-0{,}1^{k-1-i}\right)u[i]=5\,\varepsilon[k-1]\left\{0{,}5^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}2^{i}\,u[i]-0{,}1^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}10^{i}\,u[i]\right\}.$$

$$(a)\ y[k]=\varepsilon[k-1]\left\{\frac{40}{9}-5\,(0{,}5)^{k-1}+\frac{5}{9}\,(0{,}1)^{k-1}\right\}.$$

$$(b)\ y[k]=\varepsilon[k-1]\left\{-\frac{5}{3}\,(-0{,}1)^{k-1}+\frac{25}{6}\,(0{,}5)^{k-1}-\frac{5}{2}\,(0{,}1)^{k-1}\right\}.$$

$$(c)\ y[k]=\varepsilon[k-1]\left\{-\frac{25}{4}\,(0{,}1)^{k-1}+\frac{25}{4}\,(0{,}5)^{k-1}-5\,k\,(0{,}1)^{k-1}\right\}.$$

$$(d)\ y[k]=\{\varepsilon[k-1]-\varepsilon[k-6]\}\left\{\frac{40}{9}-5\,(0{,}5)^{k-1}+\frac{5}{9}\,(0{,}1)^{k-1}\right\}+$$

$$+\varepsilon[k-6]\left\{4.969\,(0{,}5)^{k-6}-\frac{5}{9}\,(0{,}1)^{k-6}\right\}.$$

$$(e)\ u[k]=9-8\,\varepsilon[k]\ \Rightarrow\ y[k]=40\,\{1-\varepsilon[k-1]\}+$$

$$+\,\varepsilon[k-1]\left\{-\frac{280}{9}+40\,(0{,}5)^{k-1}-\frac{40}{9}\,(0{,}1)^{k-1}\right\}.$$

M-3. Konvolúcióval: $g[k]=\varepsilon[k]\left(1-q^{k+1}\right)/(1-q)$; ha $q=1$, akkor $g[k]=\varepsilon[k](1+k)$.

M-4. Ha $g[k]=0,\ k\geq L$ (L az impulzusválasz hossza), akkor $g[k]=\sum_{i=0}^{L-1}h[i]$ állandó $k\geq L$ diszkrét időpontokban. Az állandó nulla is lehet.

M-5. A válasz előállítható L számú $h[k-i]$ alakú tag szuperpozíciójaként.

M-6. *(a)* Az impulzusválasz $h[k]=\frac{1}{4}\,\delta[k+1]+\frac{1}{2}\,\delta[k]+\frac{1}{4}\,\delta[k-1]$.

(b) A rendszer nem kauzális. A rendszer GV stabilis. Noha $h[k]$ véges hosszúságú, a rendszert nem szokás FIR típusúnak nevezni, mivel nem kauzális.

***M-7.** Mindegyik rendszer GV stabilis

M-8. (*a*) Oldjuk meg egymás után a (6) egyenletrendszert:

$$h[0]=\frac{1}{u[0]}\,y[0],\quad h[1]=\frac{1}{u[0]}\,\{y[1]-h[0]u[1]\},\quad h[2]=\frac{1}{u[0]}\,\{y[2]-h[1]u[1]-h[0]u[2]\},\ldots.$$

$$h[L]=\frac{1}{u[0]}\,\{y[L]-h[L-1]u[1]-\ldots-h[0]u[L]\}.$$

Ha $u[0]=0$, akkor $y[0]=0$, és ekkor a számítást a $k=1$ ütemtől kezdjük.

(b) A fenti összefüggésekben a $h[k]$ és az $u[k]$ szerepe felcserélhető, ez eredményezi a feladat megoldását.

M-9. Egyetlen gerjesztés-válasz pár alapján az állítások egyikére sem lehet következtetni. Az viszont igaz, hogy ha a rendszer a megadott tulajdonságokkal bír, akkor lehet ilyen impulzusválasza.

M-10. *(a)* Mivel $y = y_2 = h_2 * u_2 = h_2 * y_1 = h_2 * (h_1 * u_1) = h_2 * h_1 * u$, ezért $h = h_2 * h_1$. Mivel a konvolúció kommutatív művelet, ezért a részrendszerek felcserélése ugyanazt az impulzusválaszt eredményezi.

(b) Konvolúcióval $h[k] = \varepsilon[k]\sum_{i=0}^{k} a^{k-i}\, a^i = \varepsilon[k] a^k (k+1)$.

**(c)* A feltétel elegendő, de (legalábbis elméletileg) nem szükséges. Gyakorlatilag azonban ilyenkor a rendszer GV stabilitása nem biztosítható megbízhatóan.

2.1-2. Folytonos idejű rendszerek impulzusválasza

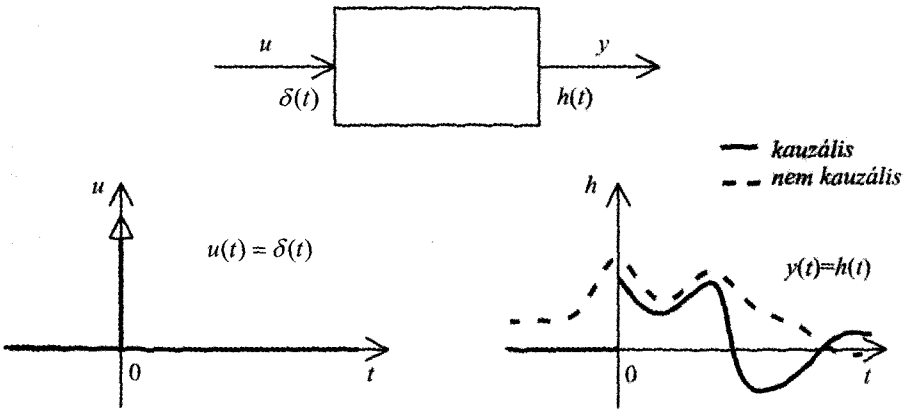
2.1-2.1. Az impulzusválasz definíciója

Megadjuk a FI rendszer impulzusválaszának definícióját, majd bemutatjuk alkalmazását.

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer $h = h(t)$ *impulzusválasza* a rendszernek a Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó válasza (2. ábra):

$$u(t) = \delta(t) \;\Rightarrow\; y(t) = h(t). \qquad (2.1\text{-}14)$$

A DI és a FI rendszerek impulzusválaszának sok hasonló tulajdonsága van. Például $h = \mathcal{W}\{\delta\}$ érvényes mindkét esetben (2.1-1.1. pont). Viszont míg a $\delta[k]$ egységimpulzus egy „közönséges" DI függvény, a $\delta(t)$ Dirac-impulzus nem „közönséges" FI függvény.



2.1-2. ábra Folytonos idejű rendszer impulzusválasza a rendszernek a Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó válasza

A lineáris, invariáns, folytonos idejű rendszer akkor és csakis akkor *kauzális*, ha impulzusválasza belépő jel, vagyis $h(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}_-$ tulajdonságú.

Nem részletezzük e kézenfekvő állítás igazolását.

A FI impulzusválasz mérésekor nem gerjeszthetjük az objektumot Dirac-impulzussal, legfeljebb egy azt közelítő lefolyású változóval. A mérés eredménye is csak közelítése a FI impulzusválasznak, a közelítés t kis értékeire nem lehet jó.

Elméletileg egyre rövidebb és egyre nagyobb amplitúdójú impulzusokkal közelíthetjük a Dirac-impulzust. Az amplitúdó azonban nem növelhető korlátlanul, mert a

linearitás feltételezése nem lesz jogos. Ha viszont az amplitúdót állandó értéken tartva csökkentjük az impulzus hosszát, akkor a betáplált energia egyre kisebb lesz és a zajok egyre jobban torzítják a mérés eredményét. Egyesek nem tartják korrekt („proper") modellnek az olyan rendszert, amelynek impulzusválasza Dirac-impulzust tartalmaz, hiszen ez csak akkor lép fel, ha a jel terjedéséhez szükséges idő nulla.

Míg egy FIR típusú DI rendszer könnyen megvalósítható digitális objektummal, ez nem áll FIR típusú FI rendszerekre, amelyek csak nehezen valósíthatók meg.

A FI rendszerek közül az időtartományban a további fejezetekben csak később definiálandó differenciális rendszerek rendszeregyenletének és állapotváltozós leírásának tárgyalására szorítkozunk. A frekvencia- és a komplex frekvenciatartományban ez a megszorítás nem szükséges.

2.1-2.2. A válasz számítása

Meg akarjuk határozni egy $h(t)$ impulzusválaszú FI rendszernek az adott $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ válaszát.

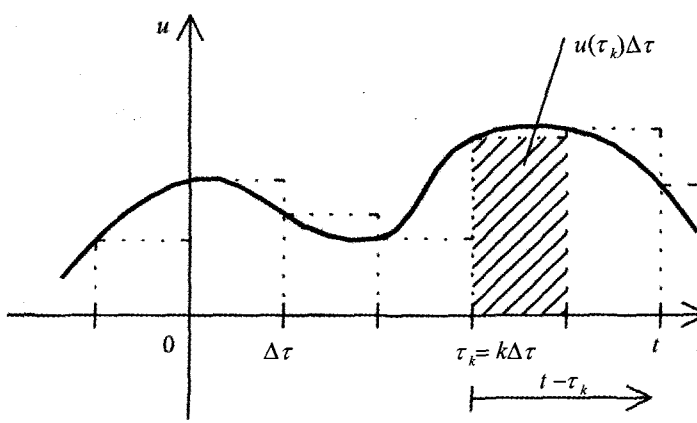
Közelítsük meg a gerjesztést szakaszonként állandó függvénnyel (3. ábra):

$$u(t) \approx u(\tau_k), \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}; \quad \tau_k = k \cdot \Delta\tau, \; k \in \mathbf{Z}$$

A $t = \tau_k$ időpontban belépő, $\Delta\tau$ hosszúságú, $u(\tau_k)$ amplitúdójú, vagyis $u(\tau_k)\Delta\tau$ intenzitású gerjesztéshez tartozó, t időpontbeli $y(t)$ válasz közelítő kifejezése $u(\tau_k)\Delta\tau_k \cdot h(t-\tau_k)$, ahol $t-\tau_k$ az eltelt idő. Az $y(t)$ közelítő értéke az ilyen tagok szuperpozíciója:

$$y(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(\tau_k)\Delta\tau_k \, h(t-\tau_k).$$

Minél kisebb $\Delta\tau$ annál kisebb a közelítés hibája. A $\Delta\tau \to 0$ határértéket képezve az összeg egy integrálhoz konvergál.



2.1-3. ábra A gerjesztés közelítése szakaszonként állandó függvénnyel

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns és $h = h(t)$ impulzusválaszú rendszernek az $u = u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y = y(t)$ válaszának kifejezése:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,\quad t\in\mathbf{R}. \tag{2.1-15}$$

Ezt a $h(t)$ és $u(t)$ jelek *konvolúciójának* nevezik. A FI konvolúció szimbolikus alakja

$$y(t)=h(t)*u(t). \tag{2.1-16}$$

Ennek jelentését a (15) adja. A (16) az $y=\mathscr{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolat egy konkrét alakja.

Az Olvasó is beláthatja, hogy a konvolúció kommutatív, asszociatív és az összeadásra disztributív művelet. A $h*u$ konvolúcióról belátható, hogy létezik, ha h és u egyike korlátos, másika abszolút integrálható; még akkor is folytonos, ha h és u egyaránt ugrásos; abszolút integrálható, ha h és u egyaránt abszolút integrálható.

A válasz kifejezésének egy másik alakjához juthatunk a $\vartheta=t-\tau$ új integrációs változó bevezetésével:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)u(t-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,,\quad t\in\mathbf{R}\,. \tag{2.1-17}$$

Ha a rendszer *kauzális,* akkor h belépő jel és ekkor

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\equiv\int_{-0}^{\infty} h(\vartheta)u(t-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,,\quad t\in\mathbf{R}_+\,. \tag{2.1-18}$$

Kauzális rendszer és *belépő gerjesztés* esetén a következő alakhoz jutunk:

$$y(t)=\int_{-0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-0}^{t} h(\vartheta)u(t-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,,\quad t\in\mathbf{R}_+. \tag{2.1-19}$$

Az integrál -0 alsó határa azt fejezi ki, hogy ha akár $h(t)$, akár $u(t)$ tartalmaz $\delta(t)$ összetevőt, akkor azt figyelembe kell venni az integrálás során. A gyakorlati esetek többségében a (19) alakok használhatók. Az általános (15) és (17) alakok nem kauzális (fizikailag nem realizálható) rendszerekre is érvényesek.

Az impulzusválaszt súlyfüggvénynek is nevezik, mivel $h(t-\tau)$ megadja $u(\tau)$ súlyát $y(t)$ kifejezésében.

A konvolúció számítása zárt alakban viszonylag könnyű, ha h és u egyaránt egyszerű függvény (például exponenciális, szinuszos, polinomiális függvény, ezek összege és szorzata). Némi figyelemre van szükség a számítás során, ha a gerjesztés szakaszonként elemi függvény alakjában adott.

Gyakran szükséges vagy előnyös a konvolúció *numerikus* közelítő számítása. Szorítkozzunk kauzális rendszerre és belépő gerjesztésre. A (19) értelmében

$$y(t_k)=\int_{0}^{t_k} h(t_k-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,\ t_k\in\mathbf{R}_+. \tag{2.1-20}$$

Ha kiszámítjuk ezeket az értékeket kellően sűrűre választott $t_1,t_2,\ldots,t_n$ időpontokra, akkor $y(t)$ ismertnek tekinthető. Szorítkozzunk arra az esetre, amikor $h(t)$ és $u(t)$ egyaránt függvény (nem tartalmaznak Dirac-impulzust). Közelítsük e függvényeket a következő lépcsős függvényekkel:

$$u(t) \approx u(kT), \quad h(t) \approx h(kT), \quad kT < t < kT + T, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

ahol T kellően kis időköz. Ekkor például a válasz közelítő kifejezése

$$y(0) = 0; \quad y(kT) \approx T \sum_{i=0}^{k-1} h(kT - iT) u(iT), \; k = 1, 2, \ldots \; . \tag{2.1-21}$$

Alkalmazhatunk természetesen pontosabb integrációs eljárásokat (például a trapéz szabályt vagy a Simpson-szabályt). Minél kisebb T értéket választunk, annál kisebb a közelítés hibája, de annál több számítási munkára van szükség egy megválasztott $(0, t_n)$ intervallumban. Javíthatjuk az eljárás hatékonyságát adaptíven választott időközök alkalmazásával is.

1. példa Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = C\,\delta(t) + \alpha\, A\, \varepsilon(t) \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)[1 - \mathrm{e}^{-\beta t}]$.

A *rendszer kauzális, ezért a belépő gerjesztéshez tartozó válasza ugyancsak belépő*, tehát $y(t) = 0$, ha $t \in \mathbf{R}_-$. Ha $t \in \mathbf{R}_+$, akkor (19) értelmében

$$y(t) = \int_{-0}^{t} h(t-\tau) u(\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} \left[C\,\delta(t-\tau) + \alpha\, A\, \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\right]\left[1 - \mathrm{e}^{-\beta\tau}\right] \mathrm{d}\tau =$$

$$= C \int_{0}^{t} \delta(t-\tau)\left[1 - \mathrm{e}^{-\beta\tau}\right] \mathrm{d}\tau + \alpha\, A\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \int_{0}^{t} \left[\mathrm{e}^{\alpha\tau} - \mathrm{e}^{(\alpha-\beta)\tau}\right] \mathrm{d}\tau, \; t \in \mathbf{R}_+.$$

Az első, illetve a második integrált jelölje I_1, illetve I_2, ahol

$$I_1 = \left[1 - \mathrm{e}^{-\beta\tau}\right]_{\tau=t} = 1 - \mathrm{e}^{-\beta t};$$

$$I_2 = \frac{1}{\alpha}\left[\mathrm{e}^{\alpha t} - 1\right] - \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)t} - 1\right], \; \alpha \neq \beta; \quad I_2 = \frac{1}{\alpha}\left[\mathrm{e}^{\alpha t} - 1\right] - t, \; \alpha = \beta.$$

A válasz kifejezése némi rendezés után

$$y(t) = \varepsilon(t)\left[C + A - \left(C + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} A\right)\mathrm{e}^{-\beta t} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} A\, \mathrm{e}^{-\alpha t}\right], \quad \beta \neq \alpha, \; t \in \mathbf{R};$$

$$y(t) = \varepsilon(t)\left[C + A - (C + A + A\,\alpha\, t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right], \quad \beta = \alpha, \; t \in \mathbf{R}.$$

Ha $A = 0$, azaz ha $h(t) = C\,\delta(t)$, akkor $y(t) = C\,u(t)$ adódik, ami a helyes eredmény. #

2. példa Egy rendszer impulzusválasza

$$h(t) = \alpha\, A\, \varepsilon(t) \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Határozzuk meg a rendszer válaszát, ha gerjesztése

$$u(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)]\mathrm{e}^{-\beta t}, \; T > 0, \; \alpha \neq \beta.$$

Ha $t < 0$, akkor $y(t) = 0$. Ha $0 < t < T$, akkor az előző példa értelmében

$$y(t)=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}A\,\mathrm{e}^{-\beta t}-\frac{\alpha}{\alpha-\beta}A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Ha $t>T$, **akkor az integrál** felső határául T írandó (hiszen ez után a gerjesztés nulla) és

$$y(t)=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}A\left[\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)T}-1\right]\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

A válasz végső kifejezése némi rendezés után

$$y(t)=[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)]\frac{\alpha}{\alpha-\beta}A\left[\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]+\varepsilon(t-T)\left[\mathrm{e}^{-\beta T}-\mathrm{e}^{-\alpha T}\right]\mathrm{e}^{-\alpha(t-T)},\quad t\in\mathbf{R}.$$

Az $\alpha=\beta$ speciális eset vizsgálatát az Olvasóra bízzuk. #

3. példa Határozzuk meg az előző példában megadott impulzusválaszú rendszer válaszát, ha gerjesztése $u(t)=\varepsilon(t)\cos\omega t$.

A konvolúciós integrál számítása nem jelent különösebb nehézséget. Felhasználhatjuk azonban az előző példa eredményét, hiszen $t\in\mathbf{R}_+$ esetén

$$\text{ha } u_1(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t},\text{ akkor } y_1(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\mathrm{j}\omega}A\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right).$$

Felhasználva, hogy $\cos\omega t\equiv\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right)/2$, azt kapjuk, hogy $t\in\mathbf{R}_+$ esetén

$$y(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\mathrm{j}\,\omega}A\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)+\frac{\alpha}{\alpha-\mathrm{j}\,\omega}A\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)=$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}A\left[(\alpha-\mathrm{j}\,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+(\alpha+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}-2\,\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\right].$$

Elemi átalakítások után a következő végeredményhez jutunk:

$$y(t)=\varepsilon(t)\frac{2\,\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}A\left[\cos\omega t+\frac{\omega}{\alpha}\sin\omega t-\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\right],\quad t\in\mathbf{R}.$$

A zárójelben álló első két tag $b\cos(\omega t+\rho)$ alakban összevonható. #

4. példa Oldjuk meg az előző feladatot, ha a rendszer gerjesztése az $u(t)=\mathrm{e}^{\beta t}$ nem belépő jel.

A (18) alakot használva

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\alpha A\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\,\mathrm{e}^{\beta\tau}\,\mathrm{d}\tau=\alpha A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\tau}\,\mathrm{d}\tau.$$

Az integrálnak csak akkor van véges értéke, ha $\alpha+\beta>0$. Ekkor a válasz kifejezése

$$y(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A\,\mathrm{e}^{\beta t},\quad \alpha>-\beta,\ t\in\mathbf{R}.$$

Fizikailag csak a $\beta\geq 0$ eset értelmezhető $t\to-\infty$ esetén is. #

5. példa Egy FI rendszer impulzusválasza és gerjesztése

$$h(t)=\alpha\, A\, \varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha t},\quad u(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\,;\ \alpha\neq\beta\,.$$

Határozzuk meg a választ pontosan és közelítőleg is.

A válasz pontos kifejezése a 2. példa részeredménye értelmében

$$y(t)=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}A\,\varepsilon(t)\left[\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right].$$

A válasz értéke a $t_k = k\,T$ időpontokban $y(kT)=\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}A\left[\mathrm{e}^{-\beta Tk}-\mathrm{e}^{-\alpha Tk}\right],\ k\in\mathbf{N}.$

A közelítő megoldás a (21) értelmében

$$y_1(kT)=T\sum_{i=0}^{k-1}\alpha A\mathrm{e}^{-\alpha(kT-iT)}\mathrm{e}^{-\beta iT}=\alpha TA\mathrm{e}^{-\alpha kT}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\mathrm{e}^{\alpha T-\beta T}\right)^i=\alpha\,TA\,\mathrm{e}^{-\alpha kT}\frac{\mathrm{e}^{(\alpha T-\beta T)k}-1}{\mathrm{e}^{(\alpha T-\beta T)}-1}.$$

Az elsőként számított közelítés végső alakja

$$y_1(kT)=\alpha\,TA\,\frac{\mathrm{e}^{-\beta Tk}-\mathrm{e}^{-\alpha Tk}}{\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)T}-1},\quad k\in\mathbf{N}.$$

E nagyon egyszerű példában a közelítés arányos a pontos eredménnyel:

$$y_1(kT)=C_1\,y(kT);\quad C_1=\frac{m}{\mathrm{e}^m-1}\,,\ m\equiv(\alpha-\beta)T.$$

Az arányossági tényező annál közelebb van az 1 értékhez, minél kisebb $|m|$ értéke, azaz minél kisebb T időközt választunk. Ha például m = 0,1, akkor C_1 = 0,951, ha m = –0,1, akkor C_1 = 1,051, vagyis a relatív hiba mintegy 5 %. #

2.1-2.3. Gerjesztés-válasz stabilitás

Az 1.2-2.5. szakaszban már megadtuk a gerjesztés-válasz (GV) stabilitás definícióját. Az impulzusválasz ismeretében adhatunk jobban használható feltételt is. További rendszerleírások ismeretében további feltételekkel is meg fogunk ismerkedni.

A folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *gerjesztés-válasz stabilis* (azaz bármely korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik), ha impulzusválasza abszolút integrálható:

$$\text{GV stabilis rendszer}\ \Leftrightarrow\ \int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,\mathrm{d}t<\infty\,. \tag{2.1-22}$$

Ennek egy szükséges (és a gyakorlati esetek többségében elegendő) feltétele

$$t\to\infty\ \Rightarrow\ h(t)\to 0\,. \tag{2.1-23}$$

Ez a helyzet, ha $h(t)$ a végtelenben nullához tartó exponenciális függvénnyel majorálható.

Kauzális rendszer impulzusválasza belépő jel. Ekkor (22)-ben az integrál alsó határa ténylegesen $t=-0$.

A *stabilitás határhelyzetében* lévőnek nevezhető az olyan nem GV stabilis FI rendszert, amelynek impulzusválasza nem abszolút integrálható, de korlátos. Az ilyen rendszer válasza csak bizonyos gerjesztések esetén nem korlátos. Ha például $t \to \infty$ esetén $h(t)$ állandó értékhez tart, akkor $y(t)$ csak olyan korlátos $u(t)$ esetén nem korlátos, amely ugyancsak állandóhoz tart. Szokás *labilis rendszernek* nevezni az olyan nem GV stabilis rendszert, amelyik nincs a GV stabilitás határhelyzetében.

Azok a megjegyzések, amelyeket a 2.1-1.3. pontban DI rendszerekkel kapcsolatban tettünk, érvényesek a FI rendszerekre is (véges impulzusválaszú FI rendszerek azonban ritkán fordulnak elő). Ugyanez vonatkozik az állítás igazolására is. Ezeket itt nem ismételjük meg.

1. példa Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t) = \varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\omega t \equiv \mathcal{R}e\left\{\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{pt}\right\};\quad p \equiv \alpha + \mathrm{j}\,\omega .$$

A rendszer GV stabilis, ha $\mathcal{R}e\{p\} \equiv \alpha < 0$. Ekkor nem csak (23) teljesül, hanem mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha}\ ,\ \alpha < 0,$$

ezért (22) is ki van elégítve. Nyilvánvaló, hogy a

$$h(t) = \varepsilon(t)\left\{A_1\mathrm{e}^{p_1 t} + A_2\mathrm{e}^{p_2 t} + \ldots + A_n\mathrm{e}^{p_n t}\right\}$$

impulzusválaszú rendszer akkor és csakis akkor GV stabilis, ha minden $\mathcal{R}e\{p_i\} < 0$ teljesül. A komplex p_i értékek csak konjugált párokban fordulhatnak elő. #

***2. példa** Az $y = u'$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú differenciáló rendszer impulzusválasza nyilvánvalóan $h(t) = \delta'(t)$. A Dirac-impulzus deriváltjának egy közelítő kifejezése

$$\delta'(t) \approx \frac{\delta(t) - \delta(t-T)}{T} \approx \frac{[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T/2)] - [\varepsilon(t-T/2) - \varepsilon(t)]}{T\,(T/2)}\ ,\ T \ll T_0 .$$

Az $|\delta'(t)|$ integráljának közelítő értéke ennek alapján $2/T$. Ez minden határon túl nő, ha T nullához tart. A (22) értelmében a differenciáló rendszer nem GV stabilis, megegyezésben korábbi megállapításunkkal (1.2-2.5. pont). #

2.1-2.4. Az ugrásválasz és alkalmazásai

A lineáris rendszer válasza nem csak impulzusválaszának ismeretében határozható meg, hanem bármely adott gerjesztéshez tartozó válaszának ismeretében is. Itt csak a legegyszerűbb és leggyakrabban használt általánosítást tárgyaljuk.

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszer $g = g(t)$ *ugrásválasza* a rendszernek az egységugrás gerjesztésre adott válasza:

$$u(t) = \varepsilon(t) \ \Rightarrow\ y(t) = g(t). \qquad (2.1\text{-}24)$$

Kauzális rendszer ugrásválasza belépő jel: $g(t) = 0,\ t \in \mathbf{R}_-$.

Az impulzusválasz arról ad felvilágosítást, hogy miként viselkedik a rendszer válasza a gerjesztés megszűnése után. Az ugrásválasz azt adja meg, hogy miként viselkedik a rendszer válasza, ha gerjesztése egy bizonyos idő után állandó marad.

A g ugrásválasz kifejezése a h impulzusválasz ismeretében a (17) értelmében

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\varepsilon(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (2.1\text{-}25)$$

Ebből következően a h impulzusválasz a g ugrásválasz általánosított deriváltja:

$$h(t)=g'(t). \qquad (2.1\text{-}26)$$

Kauzális rendszer esetén (25)-ben az integrálás alsó határaként $\tau=-0$ is írható.

A továbbiakban arra a tipikus esetre szorítkozunk, amikor a kauzális rendszer ugrásválasza mindenütt folytonos, kivéve a $t=0$ helyet, ahol véges ugrása lehet, vagyis általános alakja $g(t)=\varepsilon(t)f(t)$ és $f(t)$ differenciálható függvény. Ennek ismeretében az impulzusválasz kifejezése

$$g(t)=\varepsilon(t)f(t) \Rightarrow h(t)=f(0)\delta(t)+\varepsilon(t)f'(t), \qquad (2.1\text{-}27)$$

ahol az $f'(t)$ egy függvény (nem tartalmaz Dirac-impulzus összetevőt). Az összefüggés akkor hasznos, amikor az ugrásválasz számítása vagy mérése egyszerűbb, mint az impulzusválaszé.

A tetszőleges u gerjesztéshez tartozó y *válasz* kifejezése az ugrásválasz ismeretében (17) értelmében a (26) felhasználásával

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g'(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (2.1\text{-}28)$$

Kauzális rendszer esetén ez (27) értelmében így is írható:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\{f(0)\delta(t-\tau)+\varepsilon(t-\tau)f'(t-\tau)\}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ezek szerint a *válasz* kifejezése *kauzális* rendszer esetén:

$$g(t)=\varepsilon(t)f(t) \Rightarrow y(t)=f(0)u(t)+\int_{-\infty}^{t} f'(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (2.1\text{-}29)$$

Ezt az összefüggést nevezik *Duhamel* tételének is. Más alakjai is használatosak (például olyan, amelyben u deriváltja szerepel).

A továbbiakban a rendszer jellemzésére az ugrásválaszt nem fogjuk használni.

2.1-2.F. Feladatok

F-1. Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t)=\varepsilon(t)\left[8\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}-4\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}\right].$$

Határozza meg a rendszer $y(t)$ válaszát, ha a rendszer gerjesztése:

$(a)\ u(t)=\varepsilon(t)$. $(b)\ u(t)=\varepsilon(t)\left[1-\mathrm{e}^{-0,3t}\right]$. $(c)\ u(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-0,5t}$.

$(d)\ u(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)$. $(e)\ u(t)=\left[1-\varepsilon(t)\right]+2\,\varepsilon(t)$.

F-2. Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t)=3\delta(t)+\varepsilon(t)[\ 8\ \mathrm{e}^{-0,5t}-4\ \mathrm{e}^{-0,1t}\ ].$$

Határozza meg a rendszer $y(t)$ válaszát, ha gerjesztését az előző feladatban adott (a) - (e) szerinti $u(t)$ jel írja le!

F-3. Egy FI rendszer ugrásválasza

$$g(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{pt}.$$

Határozza meg e rendszer $h(t)$ impulzusválaszát!

***F-4.** Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t)=\mathrm{e}^{\alpha t},\ \alpha>0.$$

Határozza meg e rendszer $g(t)$ ugrásválaszát!

F-5. Egy FI rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$(a)\ y(t)=u(t-T)$. $(b)\ y(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$.

$(c)\ y(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t-T}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau,\ T>0$. $(d)\ y(t)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t}^{t+T}u(\tau)\mathrm{d}\tau,\ T>0$.

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát! Milyen tulajdonságú a rendszer (kauzális, lineáris, invariáns, GV stabilis)?

***F-6.** Egy FI rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata

$(a)\ y(t)=\displaystyle\int_{0}^{t}u(\tau)\mathrm{d}\tau$. $(b)\ y(t)=T\,u'(t)$. $(c)\ y(t)=u^2(t)$.

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát!
Milyen tulajdonságú a rendszer (kauzális, lineáris, invariáns, GV stabilis)?

F-7. Egy FI rendszer impulzusválasza $h_1(t)$. E rendszer $y_1(t)$ válasza egy $h_2(t)$ impulzusválaszú rendszer $u_2(t)$ gerjesztése. Ez az elrendezés a két részrendszer kaszkád kapcsolása (nevezik soros kapcsolásnak is).

Adja meg az $u=u_1$ gerjesztésű és $y=y_2$ válaszú rendszer h impulzusválaszát h_1 ismeretében!

Megváltozik-e h kifejezése, ha a két részrendszert felcseréljük?

***F-8.** Egy lineáris, invariáns, FI rendszer gerjesztése és a hozzá tartozó válasz egyaránt ismert:

$$u(t)=\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,,\qquad y(t)=\varepsilon(t)\left[A\,\mathrm{e}^{-\alpha t}+B\,\mathrm{e}^{-\beta t}\right].$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát!

F-9. Egy FI rendszer impulzusválasza

$$h(t)=\varepsilon(t)\left[A+t\right]^{-C},\quad A\neq 0.$$

Határozza meg C azon értéktartományát, amelyben a rendszer GV stabilis!

2.1-2.6. Megoldások

M-1. Az (*a*) - (*d*) esetekre $y(t)=\varepsilon(t)\int\limits_0^t\left[8\,\mathrm{e}^{-0,5(t-\tau)}-4\mathrm{e}^{-0,1(t-\tau)}\right]u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,\ t>0.$

$$(a)\ y(t)=\varepsilon(t)\left[-24-16\,\mathrm{e}^{-0,5t}+40\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right].$$
$$(b)\ y(t)=\varepsilon(t)\left[-24-60\,\mathrm{e}^{-0,3t}+24\,\mathrm{e}^{-0,5t}+60\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right].$$
$$(c)\ y(t)=\varepsilon(t)\left[10\,\mathrm{e}^{-0,5t}+8\,t\,\mathrm{e}^{-0,5t}-10\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right].$$
$$(d)\ y(t)=\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)\right]\left[-24-16\,\mathrm{e}^{-0,5t}+40\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right]+$$
$$+\varepsilon(t-2)\left[16\left(1-\mathrm{e}^{-1}\right)\mathrm{e}^{-0,5(t-2)}-40\left(1-\mathrm{e}^{-0,2}\right)\mathrm{e}^{-0,1(t-2)}\right].$$
$$(e)\ u(t)=1+\varepsilon(t)\Rightarrow y(t)=-24\left[1-\varepsilon(t)\right]+\varepsilon(t)\left[-48-16\,\mathrm{e}^{-0,5t}+40\,\mathrm{e}^{-0,1t}\right].$$

M-2. Jelölje $y_1(t)$ az előző feladat megoldását. Ekkor $y(t)=3\,u(t)+y_1(t)$. Célszerű az egyforma exponenciális függvényeket összevonni.

M-3. $h(t)=\left\{\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{pt}\right\}'=\delta(t)+p\,\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{pt}.$

***M-4.** A rendszer nem kauzális és nem GV stabilis! $g(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\alpha\tau}\,\mathrm{d}\tau=\dfrac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha t}$; $\alpha>0$. Ha α negatív vagy nulla, akkor az impulzusválasz és az ugrásválasz értelmetlen.

M-5. Az impulzusválasz $u(t)=\delta(t)$ helyettesítéssel adódik. Mindegyik lineáris, invariáns.

(*a*) $h(t)=\delta(t-T)$; kauzális, ha $T\geq 0$, (ekkor késleltető), GV stabilis.
(*b*) $h(t)=\varepsilon(t)/T$; kauzális, nem GV stabilis; integrátor.
(*c*) $h(t)=\left\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\right\}/T$; kauzális, GV stabilis; csúszó átlag képző.
(*d*) $h(t)=\left\{\varepsilon(t+T)-\varepsilon(t)\right\}/T$; nem kauzális, GV stabilis; csúszó átlag képző.

***M-6.** *(a)* A rendszer kauzális, lineáris, nem invariáns (az integrál alsó határa miatt, az ilyen rendszer impulzusválaszát nem értelmeztük), nem GV stabilis. *(b)* A rendszer kauzális, lineáris, invariáns, nem GV stabilis, $h(t)=\delta'(t)$ ami egy szokatlan jel. *(c)* A rendszer kauzális, nem lineáris (impulzusválasza nem értelmezett), invariáns, GV stabilis.

M-7. Mivel $y = y_2 = h_2 * u_2 = h_2 * y_1 = h_2 * (h_1 * u_1) = h_2 * h_1 * u$, ezért $h = h_2 * h_1$. Mivel a konvolúció kommutatív művelet, ezért a részrendszerek felcserélése ugyanazt az impulzusválaszt eredményezi.

***M-8.** Az ismert $y(t)$ választ (például egy mérés eredményének közelítő függvényét) differenciáljuk az idő szerint. Az $y(t)$ kifejezését is felhasználva

$$\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t)\left[A\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + B\,\mathrm{e}^{-\beta t}\right] \Rightarrow h(t) = [A+B]\,\delta(t) + [\alpha - \beta]\,B\,\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,.$$

***M-9.** Az $|h(t)| = h(t)$ integrálása nem jelent nehézséget. Az integrál akkor véges, vagyis a rendszer akkor GV stabilis, ha $C > 1$. Az $A \neq 0$ kikötés lényeges!

2.2. A rendszeregyenlet

A rendszeregyenlet a vizsgált rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának egy implicit alakja. A rendszeregyenletben fellép a gerjesztés, a válasz, valamint általuk meghatározott további változók (például a DI késleltetett gerjesztés vagy válasz, a FI gerjesztés vagy válasz deriváltja).

A rendszeregyenlet a rendszer jellemzésének egy kézenfekvő eszköze. Egyes szakterületeken (például gazdasági folyamatok modellezésére) elterjedten használják is, különösen DI modellekre.

A rendszeregyenlet meghatározása többnyire nem egyszerű feladat akár a modellezendő objektum, akár az objektum hálózati reprezentációjának ismeretében.

A DI rendszeregyenlet ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz numerikus meghatározása nagyon egyszerű. A DI és különösen az FI rendszeregyenlet alapján az adott gerjesztéshez tartozó válasz formulájának előállítása csak nagyon egyszerű gerjesztés esetén kényelmes, az eljárás nehezen algoritmizálható. A következő fejezetben a rendszer időtartománybeli leírásának egy célszerűbb módszerét fogjuk tárgyalni, amely azonban segédváltozók (az állapotváltozók) bevezetését igényli, ezért fogalmilag bonyolultabb a rendszeregyenletnél.

Ebben a fejezetben egyszerű feladatok megoldására szorítkozunk. A 3. és 4. részben a rendszeregyenlet előállítására és megoldására az itt tárgyalandónál hatékonyabb módszereket fogunk tárgyalni (frekvenciatartománybeli és komplex frekvencia-tartománybeli eljárások).

A 2.2-1. szakaszban tárgyaljuk az alapfogalmakat. Itt értelmezzük a lineáris, invariáns, kauzális (és FI esetben: differenciális) rendszer rendszeregyenletét. A továbbiakban ennek a típusnak a vizsgálatára szorítkozunk. Megmutatjuk, hogy a DI rendszeregyenlet numerikus megoldása nagyon egyszerű.

A 2.2-2. szakaszban két módszert mutatunk a rendszeregyenletével leírt rendszer adott gerjesztéshez tartozó válaszának számítására. Az első lehetőség a rendszer-egyenletből az impulzusválasz meghatározása, amelynek ismeretében a válasz az előző fejezetben tárgyalt módon számítható. A második lehetőség a válasz felbontása szabad és gerjesztett összetevőjére. E módszernek főként az elvi jelentősége lényeges, számítástechnikailag csak egyszerű függvénnyel leírható gerjesztés esetén hasznos.

A 2.2-3. szakaszban a rendszer gerjesztés-válasz stabilitásának vizsgálatát tárgyaljuk a rendszeregyenlet ismeretében. Elegendő feltételt adnunk a rendszeregyenlet ismeretében a rendszer GV stabilitásának eldöntésére a rendszer impulzusválaszának számítása nélkül is.

2.2-1. A rendszeregyenlet fogalma

2.2-1.1. A rendszeregyenlet általános alakja

Tekintsünk egy olyan kauzális DI illetve kauzális, differenciális (vagyis differenciálegyenlettel leírható) FI rendszert, amelynek egyetlen $u = u[k]$ illetve $u = u(t)$ gerjesztése és egyetlen $y = y[k]$ illetve $y = y(t)$ válasza van (SISO rendszer).

A fenti típusú rendszerre a *rendszeregyenlet* explicit alakja megadja $y[k]$ kifejezését $y[p], p < k$ és $u[p], p \le k$ segítségével, illetve $y(t)$ kifejezését $y^{(i)}(t)$ és $u^{(i)}(t)$ segítségével i=1, 2, ..., N.

Itt $y^{(i)}$ és $u^{(i)}$ a válasz és a gerjesztés i-edik (általánosított) deriváltját jelöli.

Egy *lineáris* rendszer rendszeregyenletének explicit alakja

$$\text{DI}: \; y[k] = \mathscr{H}_u\{u[k]\} + \mathscr{H}_y\{y[k]\}; \qquad \text{FI}: \; y(t) = \mathscr{H}_u\{u(t)\} + \mathscr{H}_y\{y(t)\}. \tag{2.2-1}$$

A $\mathscr{H}$ operátorok lineárisak. Ha kauzális rendszerekre szorítkozunk, akkor az operátorokra további megszorítások vonatkoznak.

A továbbiakban olyan *lineáris* rendszerek tárgyalására szorítkozunk, amelyek diszkrét idejű esetben *lineáris differenciaegyenlettel*, folytonos idejű esetben *lineáris differenciálegyenlettel* leírhatók (utóbbiak a *differenciális* FI rendszerek). Ha a rendszer *invariáns*, akkor a differenciaegyenlet, illetve a differenciálegyenlet állandó együtthatós (az együtthatók nem függnek a k illetve a t időtől). A „differenciális" megszorítás azzal a következménnyel jár, hogy a FI gerjesztés és válasz késleltetett értékei nem fordulhatnak elő a rendszeregyenletben, holott ezek kizárása fizikailag nem indokolt.

Ezekkel a megszorításokkal a rendszeregyenlet a rendszernek egy *parametrikus* leírása, a paraméterek az egyenlet együtthatói. (Az impulzusválasz nem parametrikus leírása a rendszernek, amíg nem teszünk kikötéseket a megengedett függvényekre.)

2.2-1.2. A diszkrét idejű rendszeregyenlet

Egy u gerjesztésű, y válaszú, diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer *rendszeregyenlete*

$$\begin{aligned} y[k] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \ldots + b_m u[k-m] - \\ - a_1 y[k-1] - a_2 y[k-2] - \ldots - a_n y[k-n], \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \tag{2.2-2}$$

Az n természetes szám a rendszeregyenlet *rendszáma*. A rendszám lehet nulla is. (A rendszert jellemző másik rendszámmal később fogunk megismerkedni. A két módon értelmezett rendszám többnyire megegyezik.)

Alkalmazzuk az $y^{(i)}[k] = y[k-i]$ jelölést, akkor a rendszeregyenlet egy tömörebb és egyben szokásosabb formára rendezett alakja

$$y + \sum_{i=1}^{n} a_i \, y^{(i)} = \sum_{i=0}^{m} b_i \, u^{(i)}. \tag{2.2-3}$$

A válasz (2) vagy (3) szerinti kifejezésében a $b_i\, u[k-i]$ tagok összege a gerjesztés k ütembeli és előző értékeinek súlyozott *mozgó átlagát* (MA) fejezi ki, míg az $a_i\, y[k-i]$ tagok összege a válasz k ütem előtti értékeinek súlyozott mozgó átlaga által okozott visszahatást vagy *autoregressziót* (AR) fejezi ki. Általában a rendszer ARMA típusú („auto regressive, moving avarage"). Ha speciálisan minden $a_i = 0\,(n=0)$, akkor a rendszer MA típusú; ekkor a rendszeregyenlet egyúttal a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja is, tehát megoldásával nem is kell foglalkozni.

Az MA típusú rendszer egyúttal FIR típusú (véges impulzusválaszú) is. Speciális feltételek teljesülése esetén lehet FIR típusú olyan rendszer is, amelynek rendszeregyenlete nem MA típusú. Ennek okát később látni fogjuk (redukálható átviteli függvény; 4.2-1.2. pont).

Többnyire csak $k \in \mathbf{N}$ (azaz k = 0, 1, 2,...) esetére keressük $y[k]$ értékét. Ehhez ismernünk kell a válasz n számú $y[0]$, $y[1]$,..., $y[n-1]$ *kezdeti értékét*. Ezek összességét kezdeti feltételeknek is nevezik.

A kezdeti értékek meghatározása akkor a legegyszerűbb, ha a gerjesztés belépő, mert ekkor - a kauzalitás következtében - a válasz is belépő, vagyis

$$u[k]=0\,,\ k\in\mathbf{Z}_-\ \Rightarrow\ y[-1]=y[-2]=\ldots=y[-n]=0\,. \qquad (2.2\text{-}4)$$

Ezeket nevezzük a válasz *kiindulási értékeinek*. Alább látni fogjuk, hogy a kiindulási értékekből már egyszerűen számíthatók (a lépésről lépésre módszerrel) a kezdeti értékek, amelyekre szükségünk van a rendszeregyenlet megoldásához.

Nem belépő gerjesztés esetén a kiindulási értékeket a rendszer „múltja" alapján kell meghatároznunk. Egy tipikus és egyszerű eset, amikor a gerjesztés $u[k] = u^-$ állandó ha $k \in \mathbf{Z}_-$. Ha a rendszer GV stabilis (lásd még a 2.2-3. szakaszt is), akkor $y[k] = y^-$ állandó ha $k \in \mathbf{Z}_-$. A (2)-ből ekkor behelyettesítés után következik, hogy

$$u[k]=u^-\,,\ k\in\mathbf{Z}_-\ \Rightarrow\ y[i]=\frac{b_0+b_1+\ldots+b_m}{1+a_1+a_2+\ldots+a_n}\,u^-;\quad i=-1,-2,\ldots,-n. \qquad (2.2\text{-}5)$$

Ha a gerjesztés $k = 0$ előtti értéke nem állandó, akkor a kiindulási értékek meghatározása bonyolultabb.

Ha a rendszer nem GV stabilis, akkor k véges negatív értékeire a válasz (kivételes esetektől eltekintve) nem véges, a megoldandó feladat értelmetlen. Gyakorlatilag ez nem GV stabilis rendszerekre még belépő gerjesztés esetén is így van, mert a nullának tekintett gerjesztés a valóságban nem tökéletesen nulla.

Egy másik eset, amikor a kiindulási értékekre szükségünk van, a következő. Legyen a gerjesztés intervallumonként adott, például

$$u[k]=\left(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-k_1]\right)f_1[k]+\varepsilon[k-k_1]\,f_2[k],$$

ahol f_1 és f_2 elemi DI függvények. Először meghatározzuk az $u[k]=\varepsilon[k]f_1[k]$ belépő gerjesztéshez tartozó $y[k]$ választ a $0 \le k < k_1$ intervallumban nulla kiindulási értékekkel. A következő, esetünkben $k_1 \le k < \infty$ intervallumbeli, az $u[k]=f_2[k]$ gerjesztéshez tartozó válasz meghatározásához szükségünk van az $y[k_1-1], y[k_1-2], \ldots, y[k_1-n]$ kiindulási értékekre. Ezeket az előző megoldás helyettesítési értékei adják. Értelem szerinti az eljárás, ha a gerjesztés még több, elemi függvénnyel leírt szegmensből áll. Az eljárás elvileg egyszerű, de meglehetősen körülményes.

A rendszeregyenlet megoldásának két módszerét a következő szakaszokban fogjuk tárgyalni. Minden különös eljárás nélkül is meghatározhatjuk azonban a válasz értékét a $k = 0, 1, 2, \ldots$ időpontokban fokozatos behelyettesítéssel, más nevén a *lépésről lépésre* („step by step") módszerrel.

Kezdjük a $k = 0$ értékkel

$$y[0] = b_0\, u[0] + b_1\, u[-1] + \ldots + b_m\, u[-m] - a_1\, y[-1] - a_2\, y[-2] - \ldots - a_n\, y[-n].$$

A $u[k]$ gerjesztés értékek ismertek, a kiindulási értékeket előzőleg meghatároztuk (belépő gerjesztés esetén mindegyik nulla), így $y[0]$ számítható. Hasonló módon kapjuk a válasz további értékeit:

$$\begin{aligned} y[0] &= b_0\, u[0] + b_1\, u[-1] + \ldots + b_m\, u[-m] - a_1 y[-1] - a_2 y[-2] - \ldots - a_n y[-n], \\ y[1] &= b_0\, u[1] + b_1\, u[0] + \ldots + b_m\, u[1-m] - a_1 y[0] - a_2 y[-1] - \ldots - a_n y[1-n], \\ y[2] &= b_0\, u[2] + b_1\, u[1] + \ldots + b_m\, u[2-m] - a_1 y[1] - a_2 y[0] - \ldots - a_n y[2-n], \ldots \end{aligned} \tag{2.2-6}$$

Minden lépésnél csak előzőleg már számított $y[i]$ értékek szerepelnek a jobb oldalon. A meghatározandó tagok száma minden k esetén legfeljebb $n+m+1$. Emlékeztetőül: ha $y[k]$ értékét konvolúcióval számoljuk, akkor általános esetben $k + 1$ tagot kell meghatároznunk.

Az eljárás nagyon egyszerű, igen alkalmas numerikus számításokra. A felhasználandó $u[k]$ értékeket elegendő numerikusan ismerni, nincs szükségünk formulára. Másrészt azonban többnyire nem egyszerű a válasz viselkedéséről általános megállapításokat tenni az adatsorozat ismeretében.

A lépésről lépésre módszer variáns rendszer esetén is alkalmazható, amikor a rendszeregyenlet kifejezését ugyancsak (2) adja, csak az $a_i = a_i[k]$, $b_i = b_i[k]$ együtthatók ekkor a k diszkrét idő ismert függvényei.

Példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az impulzusválaszát néhány ütemre, amelynek rendszeregyenlete

$$y[k] - y[k-1] + 0{,}24\, y[k-2] = u[k] + 0{,}5\, u[k-1] - 0{,}2\, u[k-3].$$

Erre a rendszerre $n = 2$, vagyis a rendszeregyenlet másodrendű.

Esetünkben $u[k] = \delta[k]$, $y[k] = h[k]$, ezért

$$h[k] = \delta[k] + 0{,}5\, \delta[k-1] - 0{,}2\, \delta[k-3] + h[k-1] - 0{,}24\, h[k-2].$$

Minden kiindulási érték nulla. Az impulzusválasz nulla, ha $k \in \mathbf{Z}_-$ és

$$\begin{aligned} h[0] &= 1 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0 - 0{,}2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0{,}24 \cdot 0 = 1, \\ h[1] &= 1 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 1 - 0{,}2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 0{,}24 \cdot 0 = 1{,}5, \\ h[2] &= 1 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 - 0{,}2 \cdot 0 + 1 \cdot 1{,}5 - 0{,}24 \cdot 1 = 1{,}26, \\ h[3] &= 1 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 - 0{,}2 \cdot 1 + 1 \cdot 1{,}26 - 0{,}24 \cdot 1{,}5 = 0{,}70, \\ h[4] &= \quad 1 \cdot 0{,}70 - 0{,}24 \cdot 1{,}26 = 0{,}3976, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A továbbiakban az $u[k-i]$ által meghatározott minden tag nulla, mivel a gerjesztés véges hosszúságú. Az impulzusválasz azonban az autoregressziós hatás következtében nem azonosan nulla, a rendszer nem FIR típusú.

A numerikus eredmények alapján kézenfekvő feltételezni, hogy az impulzusválasz nullához tart, valószínűleg abszolút összegezhető is, de ebben még sok további $h[k]$ érték kiszámítása után sem lehetünk biztosak. #

2.2-1.3. A folytonos idejű rendszeregyenlet

Szorítkozzunk olyan FI rendszerek vizsgálatára, amelyek rendszeregyenlete olyan, hogy az $u(t)$ gerjesztés és az $y(t)$ válasz t időpont előtti hatása $y(t)$ értékére figyelembe vehető integráljukkal $-\infty$ és a vizsgált t időpont között. Az ilyen típusú rendszerek a *differenciális rendszerek.* Az elnevezés okát hamarosan látni fogjuk. Ezzel kizárunk például az $u(t-\tau)$ vagy az $y(t-\tau)$ alakú, ugyancsak a múltat figyelembe vevő tagokat.

Korábban bevezettük már a jel első, második, ... (általánosított) deriváltjára a következő jelölést:

$$x^{(1)}(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\quad x^{(2)}(t)=\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2},\quad \ldots . \tag{2.2-7}$$

A jel első, második, ... integráljára vezessük be ezzel összhangban a következő jelölést

$$x^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad x^{(-2)}(t)=\int_{-\infty}^{t}x^{(-1)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ldots . \tag{2.2-8}$$

Sok gyakorlati esetben $x(t)$ nulla valamilyen időpont (rendszerint $t = 0$) előtt, ekkor az integrálás alsó határaként ez az időpont is választható.

Az u gerjesztésű, y válaszú, folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális, differenciális rendszer rendszeregyenlete integrális alakban

$$y(t)=b_0\,u(t)+b_1\,u^{(-1)}(t)+\ldots+b_nu^{(-n)}(t)-a_1y^{(-1)}(t)-a_2y^{(-2)}(t)-\ldots-a_ny^{(-n)}(t). \tag{2.2-9}$$

Nem jelent megszorítást, hogy a fellépő integrálások számát a válaszra és a gerjesztésre egyezőnek választottuk, mert a „felesleges" tagokra az együttható nulla.

A rendszeregyenletnek ez az alakja ritkán használatos. Az integráloktól úgy szabadulhatunk meg, hogy differenciáljuk az egyenlet minden tagját n-szer a t idő szerint. Feltételezzük, hogy legalább általánosított értelemben $y(t)$ differenciálható n-szer és $u(t)$ is a szükséges számúszor. A (7) és (8) szerint n-szeri differenciálással $\left\{x^{(-i)}(t)\right\}^{(n)}=x^{(n-i)}(t)$ adódik. Szokásosan az ismeretlen választ és deriváltjait a bal oldalra rendezzük.

Az u gerjesztésű, y válaszú, folytonos idejű, lineáris, invariáns, kauzális, differenciális rendszer *rendszeregyenlete* a szokásos differenciális alakban

$$\boxed{\begin{aligned}&y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}y^{(1)}(t)+a_ny(t)=\\&=b_0\,u^{(n)}(t)+b_1u^{(n-1)}(t)+\ldots+b_nu(t);\quad t\in\mathbf{R}.\end{aligned}} \tag{2.2-10}$$

Az n a rendszeregyenlet *rendszáma.*

A folytonos idejű rendszeregyenlet egy tömörebb alakja

$$y^{(n)}+\sum_{i=0}^{n-1}a_{n-i}\,y^{(i)}=\sum_{i=0}^{n}b_{n-i}\,u^{(i)}. \tag{2.2-11}$$

A rendszeregyenletben bármelyik a_i vagy b_i együttható nulla is lehet.

A differenciális alakból $y^{(n)}(t)$ átrendezéssel kifejezhető. Ez úgy értelmezhető, hogy a válasz n-edik deriváltja kifejezhető a gerjesztéssel, a válasszal és annak deriváltjaival. Egy változónak azonban legfeljebb első vagy második deriváltjának adható fizikai tartalom (a változó „sebessége" és „gyorsulása"). Ez egy oka annak, hogy rendszerek leírására a FI rendszeregyenlet kettőnél nagyobb rendszám esetén ritkán használatos. Egy másik ok, hogy a szükséges kezdeti értékek meghatározása nagy rendszám esetén körülményes.

Példa Tekintsünk két, integrális alakú FI rendszeregyenletet:

$$(a)\ y(t)+a_1\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = b_0 u(t).$$

$$(b)\ y(t)+a_1\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = b_0\, u(t)+b_2\int_{-\infty}^{t}\left\{\int_{-\infty}^{\vartheta} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\vartheta.$$

Az első egyenlet első, a második egyenlet második deriváltját képezve kapjuk a differenciális alakot:

$$(a)\ y^{(1)}(t)+a_1\, y(t)=b_0\, u^{(1)}(t).$$

$$(b)\ y^{(2)}(t)+a_1 y^{(1)}(t)=b_0 u^{(2)}(t)+b_2 u(t).$$

A *(b)* esetben értelmes lehet csak az első deriváltat képezni. Ekkor a rendszeregyenletben a válasznak csak az első deriváltja lép fel, a gerjesztésnek pedig az első deriváltja és első integrálja is. Ez azonban nem a (1) szerinti alak, mert abban nem szerepel sem a válasz, sem a gerjesztés integrálja. #

A válasz (9) szerinti kifejezésében a $b_i\, u^{(-i)}(t)$ tagok összege a gerjesztés előző értékeinek súlyozott *mozgó átlagát* (MA) fejezi ki, míg az $a_i\, y^{(-i)}(t)$ tagok összege a válasz előző értékeinek súlyozott mozgó átlaga által okozott visszahatást vagy *autoregressziót* (AR) fejezi ki. Általában a rendszer ARMA típusú („auto regressive, moving avarage"). Ha speciálisan minden a_i=0, akkor a rendszer MA típusú; ekkor a rendszeregyenlet n-szeres integrálás után egyúttal a gerjesztés-válasz kapcsolat explicit alakja is, tehát megoldásával nem kell foglakozni..

A differenciálást tartalmazó (10) alak alapján az MA, AR vagy ARMA elnevezések értelme nehezebben látható be.

A (9)-ből következik, hogy a rendszeregyenletben a gerjesztésnek legfeljebb annyiadik deriváltja szerepelhet, mint a válasznak. Az $y(t)=u'(t)$ gerjesztés-válasz kapcsolatú rendszer ezek szerint nem tartozik a rendszerek itt tárgyalt osztályába.

A továbbiakban a rendszeregyenletnek a (10) vagy (11) alakjára hivatkozunk, noha a (9) fejezi ki a rendszeregyenlet valódi tartalmát.

A választ többnyire a $t \in \mathbf{R}_+$ (azaz a $0 < t < \infty$) intervallumban keressük. Ennek meghatározásához ismernünk kell az n számú $y(+0), y^{(1)}(+0), \ldots, y^{(n-1)}(+0)$ *kezdeti értéket*, ahol

$$y^{(r)}(+0) \equiv \left.\frac{\mathrm{d}^r y(t)}{\mathrm{d}t^r}\right|_{t=+0},\ r=0,1,2,\ldots,n-1. \qquad (2.2\text{-}12)$$

A kezdeti értékek összességét *kezdeti feltételeknek* is nevezik.

A kezdeti értékek számítása még akkor is nehéz feladat, ha a gerjesztés belépő, tehát ha $u(t)=0, t\in\mathbf{R}_-$. Ebben az esetben $y(-0)=0$ és minden $y^{(r)}(-0)=0$, vagyis valamennyi *kiindulási érték* nulla. Általában nem feltételezhetjük, hogy $y(t)$, $y^{(1)}(t),\ldots,$ $y^{(n-1)}(t)$ folytonos, ezért abból, hogy minden kiindulási érték nulla, nem következik, hogy minden kezdeti érték is nulla.

A kezdeti értékek számítását az $n=2$ esetre mutatjuk be, amikor a rendszeregyenlet

$$y^{(2)}(t)+a_1y^{(1)}(t)+a_2y(t)=b_0u^{(2)}(t)+b_1u^{(1)}(t)+b_2u(t). \tag{2.2-13}$$

A számítandó kezdeti értékek $y(+0)$ és $y^{(1)}(+0)$. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor a gerjesztés belépő, így a válasz is belépő, tehát $u^{(i)}(-0)=0, y^{(i)}(-0)=0$, vagyis amikor minden kiindulási érték nulla. Integráljuk a rendszeregyenletet $t=-0$ és t között:

$$y^{(1)}(t)+a_1y(t)+a_2\int_{-0}^{t}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau=b_0u^{(1)}(t)+b_1u(t)+b_2\int_{-0}^{t}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$y(t)+a_1\int_{-0}^{t}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau+a_2\int_{-0}^{t}\int_{-0}^{\vartheta}y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\vartheta=b_0u(t)+b_1\int_{-0}^{t}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau+b_2\int_{-0}^{t}\int_{-0}^{\vartheta}u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Legyen $t=+0$. Szorítkozzunk egyelőre arra az esetre, amikor a gerjesztés nem tartalmaz Dirac-impulzust. (Az impulzusválasz számításával a következő szakaszban foglalkozunk.) Ekkor a $t=-0$ és $t=+0$ határok közötti integrálok értéke nulla. A kezdeti értékekre vonatkozó egyenletrendszer (megfordítva az egyenletek sorrendjét)

$$y(+0)=b_0\,u(+0),\quad y^{(1)}(+0)+a_1y(+0)=b_0\,u^{(1)}(+0)+b_1u(+0). \tag{2.2-14}$$

Az első egyenlet megadja $y(+0)$ kifejezését, a másodikból $y^{(1)}(+0)$ ezután egyszerűen kifejezhető. Értelem szerinti az eljárás n tetszőleges értékére.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a kiindulási értékek nullától különbözőek. Ez a helyzet például akkor, amikor egymást követő (t_{i-1}, t_i) intervallumokban különböző függvények írják le a gerjesztést és így a választ is. Egy tipikus ilyen gerjesztés

$$u(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_1)\}C_1\,t+\{\varepsilon(t-t_1)-\varepsilon(t-t_2)\}C_2+\varepsilon(t-t_2)C_3\,\mathrm{e}^{-3t}.$$

Ekkor először megoldjuk a feladatot a $(0,t_1)$ intervallumban. A $t=t_1-0$ időpontbeli $y(t_1-0), y^{(1)}(t_1-0)$ helyettesítési értékek jelentik a kiindulási értékeket a (t_1,t_2) intervallumra, amelyre az $y(t_1+0), y^{(1)}(t_1+0)$ kezdeti értékeket kell meghatároznunk. Az előző gondolatmenet most is érvényes, csak most nem az $y^{(i)}(+0)$ és $u^{(i)}(+0)$ értékek fognak fellépni, hanem a megváltozások. A rájuk vonatkozó lineáris egyenletrendszer

$$\begin{aligned}&y(t_1+0)-y(t_1-0)=b_0[u(t_1+0)-u(t_1-0)],\\&y^{(1)}(t_1+0)-y^{(1)}(t_1-0)+a_1[y(t_1+0)-y(t_1-0)]=\\&\quad=b_0[u^{(1)}(t_1+0)-u^{(1)}(t_1-0)]+b_1[u(t_1+0)-u(t_1-0)].\end{aligned} \tag{2.2-14a}$$

Az egyenletrendszer megoldása, vagyis az $y(t_1+0), y^{(1)}(t_1+0)$ kezdeti értékek meghatározása nem jelent elvi nehézséget.

Később (4. rész) majd megismerkedünk jobban kezelhető eljárással is.

Ha $u(t)=u^-, t\in\mathbf{R}_-$ és a rendszer GV stabilis, akkor $y(t)$ is állandó ott, minden deriváltjuk nulla. Az y kiindulási értéke az $a_n y(-0)=b_n u^-$ egyenletből számítható, majd ennek ismeretében a kezdeti érték is.

A FI rendszeregyenletre nincs olyan egyszerű megoldás, mint a lépésről lépésre módszer volt a DI rendszeregyenletre. Alkalmazhatók közelítő numerikus megoldások.

Példa Tekintsük a következő FI rendszeregyenletet:

$$y^{(2)}(t)+4\,y^{(1)}(t)+3\,y(t)=5\,u^{(1)}(t)+u(t).$$

Határozzuk meg az $y(+0)$, $y^{(1)}(+0)$ kezdeti értékeket, ha a gerjesztés

$(a)\ u(t)=\varepsilon(t)t.\quad (b)\ u(t)=\varepsilon(t).\quad (c)\ u(t)=\delta(t).$

Mindegyik gerjesztés belépő, ezért a válasz is belépő, a két kiindulási érték nulla:

$$y(-0)=0,\ y^{(1)}(-0)=0.$$

Az (a) esetben $5\,u^{(1)}(t)+u(t)=\varepsilon(t)[5+t]$. Ez véges a $t=0$ helyen, ezért a válasz és deriváltja is folytonos ott, tehát $y(+0)=0$ és $y^{(1)}(+0)=0$.

A (b) esetben $5\,u^{(1)}(t)+u(t)=5\,\delta(t)+\varepsilon(t)$. Az $y(t)$ folytonos a $t=0$ helyen, de deriváltja nem. Integráljuk a rendszeregyenletet -0 és $+0$ között:

$$\left[y^{(1)}(+0)-y^{(1)}(-0)\right]+4\left[y(+0)-y(-0)\right]+3\int_{-0}^{+0}y(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-0}^{+0}1\,\mathrm{d}t+5\int_{-0}^{+0}\delta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Csak $y^{(1)}(+0)$ és az utolsó tag nem nulla. Eredményünk $y(+0)=0$, $y^{(1)}(+0)=5$.

A (c) esetben $5\,u^{(1)}(t)+u(t)=5\,\delta^{(1)}(t)+\delta(t)$. Ekkor $y(t)$ nem folytonos és $y^{(1)}(+0)$ nem véges. Az előző módon nem tudjuk a kezdeti feltételeket - és ennek következtében a rendszer impulzusválaszát sem - meghatározni.

A feladat még nehezebb lenne, ha a rendszeregyenlet jobb oldalán még az $u^{(2)}$ típusú tag is jelen lenne.

A vizsgált példa is mutatja, hogy a kezdeti értékek számítása egyes esetekben egyszerű, de lehet nagyon körülményes is. Más módszerrel a kezdeti értékek számításával kapcsolatos nehézségek könnyen kiküszöbölhetők (4.2-2.2. pont). #

Ha a rendszer nem invariáns, akkor a rendszeregyenletben szereplő a_i és b_i együtthatók az idő ismert függvényei. Ekkor azonban ezek jelentése a (9) integrális és a (10) differenciális alakban eltérő.

2.2-1.F. Feladatok

F-1. Igazolja, hogy a következő DI rendszeregyenletek ugyanazt a rendszert írják le, ha az együtthatók pontosnak tekinthetők:

$$\text{(I)}\ \ y-0{,}5\,y^{(1)}=u-u^{(1)},\qquad \text{(II)}\ \ y-2{,}5\,y^{(1)}+y^{(2)}=u-3\,u^{(1)}+2\,u^{(2)}.$$

F-2. Igazolja, hogy a következő FI rendszeregyenletek ugyanazt a rendszert írják le, ha az együtthatók pontosnak tekinthetők:

$$\text{(I)}\ \ y^{(1)} + y = u\ , \qquad \text{(II)}\ \ y^{(2)} - y^{(1)} - 2\,y = u^{(1)} - 2\,u\,.$$

F-3. Egy DI rendszer rendszeregyenlete $y - 0{,}6\ y^{(1)} = u^{(2)}$.
Határozza meg $y[k]$ értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 ütemekre, ha a gerjesztés

$$(a)\ u[k] = \delta[k]. \qquad (b)\ u[k] = \varepsilon[k].$$

Ez azt jelenti, hogy az impulzusválasz illetve az ugrásválasz elejét számítjuk.

F-4. Egy DI rendszer rendszeregyenlete $y - 0{,}6\ y^{(1)} + 0{,}05\ y^{(2)} = u^{(2)}$.
Határozza meg $y[k]$ értékét a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 ütemekre, ha a gerjesztés

$$(a)\ u[k] = \delta[k]. \qquad (b)\ u[k] = \varepsilon[k]. \qquad (c)\ u[k] = \varepsilon[k](-0{,}1)^k.$$

$$(d)\ u[k] = \varepsilon[k](0{,}1)^k\,. \qquad (e)\ u[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]. \qquad (f)\ u[k] = 9\,(1-\varepsilon[k]) + \varepsilon[k].$$

Később belátjuk, hogy a rendszer GV stabilis, ami az (f) megoldhatóságának feltétele.

2.2-1.M. Megoldások

M-1. Az (I)-ből késleltetéssel $y^{(1)} - 0{,}5\ y^{(2)} = u^{(1)} - u^{(2)}$ adódik. Szorozzuk meg ezt (-2)-vel és adjuk hozzá (I)-hez: ekkor a (II) adódik.

M-2. Az (I)-ből differenciálással $y^{(2)} + y^{(1)} = u^{(1)}$ adódik. Adjuk ezt hozzá az (I) egyenlet (–2)-szereséhez: ekkor a (II) adódik.

M-3. Nyilván $y[-1] = y[-2] = 0$, sőt $y[0]$ és $y[1]$ is nulla. Ennek felhasználásával

$$(a)\ y[k] = \delta[k-2] + 0{,}6\ \delta[k-3] + 0{,}36\ \delta[k-4] + 0{,}216\ \delta[k-5] + \ldots\,.$$

$$(b)\ y[k] = \delta[k-2] + 1{,}6\ \delta[k-3] + 1{,}96\ \delta[k-4] + 2{,}176\ \delta[k-5] + \ldots\,.$$

Az impulzusválasz vagy az ugrásválasz első öt ütemének ismeretében a rendszer gerjesztés-válasz stabilitásáról nyilván nem tudunk megállapítást tenni.

M-4. Az $(a)-(e)$ esetekben $y[-1] = y[-2] = 0$ adódik. Ennek felhasználásával a lépésről lépésre módszerrel

$$(a)\ y[k] = \delta[k-2] + 0{,}6\ \delta[k-3] + 0{,}31\ \delta[k-4] + 0{,}156\ \delta[k-5] + \ldots\,.$$

$$(b)\ y[k] = \delta[k-2] + 1{,}6\ \delta[k-3] + 1{,}91\ \delta[k-4] + 2{,}066\ \delta[k-5] + \ldots\,.$$

$$(c)\ y[k] = \delta[k-2] + 0{,}5\ \delta[k-3] + 0{,}26\ \delta[k-4] + 0{,}130\delta[k-5] + \ldots\,.$$

$$(d)\ y[k] = \delta[k-2] + 0{,}7\delta[k-3] + 0{,}38\ \delta[k-4] + 0{,}194\ \delta[k-5] + \ldots\,.$$

$$(e)\ y[k] = \delta[k-2] + 1{,}6\ \delta[k-3] + 1{,}91\delta[k-4] + 1{,}066\ \delta[k-5] + \ldots\,.$$

(*f*) Mivel a rendszer GV stabilis, ezért $y[-1] = y[-2] = 20$. Ennek felhasználásával

$$y[k] = 20\,\delta[k] + 20\,\delta[k-1] + 12\,\delta[k-2] + 7{,}2\,\delta[k-3] + 4{,}72\,\delta[k-4] + 3{,}472\,\delta[k-5] + \ldots$$

Ha a rendszer nem lenne GV stabilis, akkor a nagyon régen ható állandó gerjesztés hatására a $k = -1, -2$ ütemekben (általában bármely véges ütemre) a válasz nem véges értékű, a feladat értelmetlen.

2.2-2. A rendszeregyenlet megoldása

2.2-2.1. Általános megfontolások

Ebben a szakaszban módszereket adunk mind a DI, mind a FI rendszeregyenlet megoldására. A lineáris, invariáns, kauzális, egy-gerjesztésű, egy-válaszú, DI illetve differenciális FI rendszer rendszeregyenletének általános alakja a (3), illetve a (1) értelmében

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \; y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i\, y[k-i] = \sum_{i=0}^{m} b_i\, u[k-i]; \\ &\text{FI}: \; y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\, y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i}\, u^{(i)}(t), \end{aligned} \tag{2.2-15}$$

ahol $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i-edik (általánosított) deriváltját jelöli. Adottnak tekintjük az $u[k]$, illetve az $u(t)$ gerjesztést. Keresett az $y[k]$, $k \in \mathbf{N}$, illetve az $y(t), t \in \mathbf{R}_+$ válasz. Többnyire belépő gerjesztés hatást vizsgáljuk, amikor $u[k] = 0, k \in \mathbf{Z}_-$, illetve $u(t) = 0, t \in \mathbf{R}_-$. Ilyenkor - a rendszer kauzalitása miatt - a válasz is belépő jel.

A rendszeregyenlet megoldásának egy jól használható módszere a következő.

Először meghatározzuk a rendszeregyenlet által leírt DI, illetve FI rendszer impulzusválaszát (vagyis az egységimpulzus, illetve a Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó válaszát). Ennek ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz az előző szakaszban (a 2.1-1.2. illetve a 2.1-2.2. pontban) leírt módon konvolúcióval, vagyis összegezéssel, illetve integrálással elvi nehézség nélkül számítható. A következő pontban ezt a módszert fogjuk tárgyalni.

A rendszeregyenlet megoldható válasz szabad és gerjesztett összetevőre bontásának módszerével is. Ez az eljárás csak egyszerű függvénnyel leírható gerjesztés esetén használható viszonylag kényelmesen. Tárgyalását inkább fogalmi mint számítástechnikai fontossága indokolja.

A rendszeregyenlet megoldásának egy további módszere a következő. A rendszeregyenlethez egy állapotváltozós leírást rendelünk (ezt a 2.3-1.4. pontban tárgyaljuk), majd ezt oldjuk meg. Ez a kerülő út kényelmesebb lehet a rendszeregyenlet közvetlen megoldásánál.

Később (3.3-2. szakasz és 4.2-2. szakasz) megismerkedünk a rendszeregyenletnek a frekvenciatartománybeli és komplex frekvenciatartománybeli megoldásának módszerével. Ezek sokkal kényelmesebbek a jelen szakaszban tárgyalt időtartománybeli megoldási módszereknél. Ezeket együtt mutatjuk be DI illetve FI rendszerekre.

2.2-2.2. Az impulzusválasz számítása

A DI rendszer impulzusválasza az $u[k] = \delta[k]$ egységimpulzus gerjesztéshez tartozó $y[k] = h[k]$ válasza, a FI rendszer impulzusválasza az $u(t) = \delta(t)$ Dirac-impulzus gerjesztéshez tartozó $y(t) = h(t)$ válasza. Mivel $\delta[k]$, illetve $\delta(t)$ belépő jel, ezért - a vizsgált rendszer feltételezett kauzalitása következtében - az impulzusválasz is belépő jel. Emlékeztetőül megadjuk az y válasz kifejezését a h impulzusválasz és az u gerjesztés konvolúciójaként. Szimbolikusan (2.1-1.2. illetve a 2.1-2.2. pont)

$$y = h * u \ . \tag{2.2-16}$$

Részletesen felírva és a rendszer kauzalitását figyelembe véve:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad y[k] = \sum_{i=-\infty}^{k} h[k-i]u[i]; \\ &\text{FI}: \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau . \end{aligned} \tag{2.2-17}$$

Belépő gerjesztés esetén az összegezés alsó határa 0, az integrálás alsó határa -0.

Mivel a vizsgált rendszer lineáris és invariáns, ezért elegendő a

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad y[k] + \sum_{i=1}^{n} a_i\, y[k-1] = \delta[k], \quad y[k] = h_0[k]; \\ &\text{FI}: \quad y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}\, y^{(i)}(t) = \delta(t), \quad y(t) = h_0(t) \end{aligned} \tag{2.2-18}$$

speciális esetet vizsgálni. Az impulzusválasz ugyanis a szuperpozíció elve értelmében kifejezhető a $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ *segéd-impulzusválasz* ismeretében:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad h[k] = \sum_{i=0}^{m} b_i\, h_0[k-i]; \\ &\text{FI}: \quad h(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i\, h_0^{(i)}(t). \end{aligned} \tag{2.2-19}$$

Az azonos jellegű tagokat (tipikusan: exponenciális függvényeket) célszerű összevonni. Gondosan követni kell az $\varepsilon[k-i]$ tényezők hatását.

A $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ függvényt a következő alakban keressük:

$$\text{DI:} \quad h_0[k] = M\lambda^k \qquad \text{FI:} \quad h_0(t) = M\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{2.2-20}$$

Minden alkalmas λ^k, illetve $\mathrm{e}^{\lambda t}$ függvény a rendszeregyenlet egy *sajátfüggvénye.* Látni fogjuk, hogy egyes esetekben a sajátfüggvény ennél általánosabb is lehet. Helyettesítsük ezt a rendszeregyenletbe és egyelőre zárjuk ki a $k = 0$, illetve a $t = 0$ helyet:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad M\lambda^k + a_1 M\lambda^{k-1} + a_2 M\lambda^{k-2} + \ldots + a_n M\lambda^{k-n} = 0; \\ &\text{FI}: \quad M\lambda^n \mathrm{e}^{\lambda t} + a_1 M\lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t} + a_2 M\lambda^{n-2}\mathrm{e}^{\lambda t} + \ldots + a_n M\mathrm{e}^{\lambda t} = 0. \end{aligned}$$

Az $M\lambda^k$, illetve az $M\mathrm{e}^{\lambda t}$ tényezővel egyszerűsíthetünk. A DI esetben célszerű még a λ^n tényezővel megszorozni az egyenletet. Ezzel a DI és a FI esetben a következő közös egyenlethez jutunk:

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\,; \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\,. \tag{2.2-21}$$

Ez a (15) DI illetve FI rendszeregyenlet *karakterisztikus egyenlete*, az egyenlet λ_i gyökei a rendszeregyenlet *sajátértékei,* amelyek meghatározzák a rendszeregyenlet λ_i^k illetve $\exp(\lambda_i t)$ *sajátfüggvényeit.* Az $F(\lambda)$ a rendszeregyenlet *karakterisztikus polinomja.*

A rendszeregyenlet ismeretében karakterisztikus egyenlete közvetlenül felírható, nincs szükség a közbülső lépésekre. Mivel az a_p együtthatók valósak, ezért a λ_i sajátértékek vagy valósak vagy konjugált komplex párokat alkotnak.

Az n-edfokú karakterisztikus egyenletnek pontosan n számú gyöke van. Kivételes esetektől eltekintve a gyökök mind különbözőek, vagyis a sajátértékek egyszeresek. A továbbiakban először ezt az esetet tárgyaljuk, azután foglalkozunk az általánosabb esettel.

Egyszeres sajátértékek esete

Minden egyszeres λ_i sajátérték egy $M_i\,\lambda_i^k$, illetve $M_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ alakú megoldást jelent. A rendszeregyenlet linearitásából következik, hogy ezek összege is megoldás. A speciális (18) rendszeregyenletnek ezért biztosan van

$$\begin{aligned} &\text{DI:} \quad h_0[k] = \varepsilon[k]\left\{M_1\lambda_1^k + M_2\lambda_2^k + \ldots + M_n\lambda_n^k\right\}; \\ &\text{FI:} \quad h_0(t) = \varepsilon(t)\left\{M_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + M_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \ldots + M_n\mathrm{e}^{\lambda_n t}\right\} \end{aligned} \tag{2.2-22}$$

alakú megoldása. Igazolható, hogy ha a *sajátértékek egyszeresek*, akkor ez az *általános megoldás*, a homogén rendszeregyenletnek nincs másféle megoldása. Másként kifejezve: a rendszeregyenletnek csak az n számú λ_i^k, illetve $\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ sajátfüggvénye létezik. A feladat ezek után az n számú M_i együttható meghatározása.

A DI esetben kézenfekvő a $k = 0, 1, \ldots, n-1$ időpontbeli $h_0[k]$ értékeket a lépésről lépésre meghatározni, majd ennek alapján felírni az n számú feltételi egyenletet. Igazolható azonban, hogy elegendő azt figyelembe venni, hogy $h_0[k]$ a k negatív értékeire nulla, míg a (18)-ból következően $h_0[0] = 1$, vagyis a feltételi egyenletek

$$\text{DI:} \quad h_0[0] = 1, \; h_0[-1] = 0, \; h_0[-2] = 0, \ldots, \; h_0[-(n-1)] = 0\,. \tag{2.2-23}$$

Ha például $n = 2$, akkor a két feltételi egyenlet és megoldása

$$\left.\begin{aligned} &M_1 + M_2 = 1, \\ &M_1\lambda_1^{-1} + M_2\lambda_2^{-1} = 0; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad M_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \; M_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A FI esetben tudjuk, hogy $h_0(t)$ és valamennyi $h_0^{(i)}(t)$ deriváltja nulla t negatív értékeire. Belátható, hogy ez igaz a $t = +0$ helyen is $i = 0, 1, \ldots, n-2$ esetén. Ezt felhasználva és a (18)-at integrálva $t = -0$ és $t = +0$ között

$$h_0^{(n-1)}(+0) - h_0^{(n-1)}(-0) = \int_{-0}^{+0} \delta(t)\,\mathrm{d}t$$

adódik. Az M_i együtthatók meghatározására szolgáló egyenletrendszer tehát

$$\text{FI:} \quad h_0(+0) = 0, \; h_0^{(1)}(+0) = 0, \ldots, \; h_0^{(n-2)}(+0) = 0, \; h_0^{(n-1)}(+0) = 1\,. \tag{2.2-24}$$

Például $n = 2$ esetén a két feltételi egyenlet és megoldása

$$\left.\begin{aligned} M_1 + M_2 &= 0, \\ M_1\lambda_1 + M_2\lambda_2 &= 1; \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad M_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

A kezdeti feltételek érvényesítése után a $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ jel ismert. Ezután a $h[k]$, illetve a $h(t)$ impulzusválasz a (19) felhasználásával nehézség nélkül számítható.

A konjugált komplex sajátérték-párokat együtt célszerű kezelni:

$$\begin{aligned} &\mathrm{DI}: \lambda_i = r_i\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta_i},\ \lambda_{i+1} = \lambda_i^* \Rightarrow M_i\lambda_i^k + M_{i+1}\lambda_{i+1}^k = (P_i\cos\Theta_i k + Q_i\sin\Theta_i k)\,r_i^k, \\ &\mathrm{FI}: \lambda_i = \sigma_i + \mathrm{j}\,\Omega_i,\ \lambda_{i+1} = \lambda_i^* \Rightarrow M_i\mathrm{e}^{\lambda_i t} + M_{i+1}\mathrm{e}^{\lambda_{i+1}t} = (P_i\cos\Omega_i t + Q_i\sin\Omega_i t)\mathrm{e}^{\sigma_i t}. \end{aligned} \tag{2.2-25}$$

Az M_i, $M_{i+1} = M_i^*$ komplex ismeretlen együtthatók helyett célszerűbb lehet a P_i és Q_i valós ismeretlen együtthatókkal számolni.

1. példa Határozzuk meg annak a DI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek rendszeregyenlete

$$y[k] - y[k-1] + 0{,}24\,y[k-2] = u[k] + 0{,}5\,u[k-1] - 0{,}2\,u[k-3].$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete közvetlenül felírható:

$$\lambda^2 - \lambda + 0{,}24 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 0{,}6,\ \lambda_2 = 0{,}4.$$

A $h_0[k]$ segéd-impulzusválasz általános alakja ennek megfelelően

$$h_0[k] = \varepsilon[k]\left\{M_1(0{,}6)^k + M_2(0{,}4)^k\right\}.$$

A kezdeti feltételek alapján a (23) értelmében

$$M_1 + M_2 = 1,\ M_1(0{,}6)^{-1} + M_2(0{,}4)^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = 3,\ M_2 = -2.$$

A rendszeregyenlet jobb oldalát is figyelembe véve kapjuk az impulzusválaszt:

$$\begin{aligned} h[k] &= h_0[k] + 0{,}5\,h_0[k-1] - 0{,}2\,h_0[k-3] = \\ &= \varepsilon[k]\left\{3\,(0{,}6)^k - 2\,(0{,}4)^k\right\} + \varepsilon[k-1]\left\{1{,}5\,(0{,}6)^{k-1} - 1{,}0(0{,}4)^{k-1}\right\} + \\ &\quad + \varepsilon[k-3]\left\{-0{,}6\,(0{,}6)^{k-3} + 0{,}4\,(0{,}4)^{k-3}\right\}. \end{aligned}$$

A $k = 0$, 1 és 2 ütemeket külön célszerű leírni, a $(0{,}6)^{k-3}$ és a $(0{,}4)^{k-3}$ tagok együtthatóit összevonjuk:

$$h[k] = \delta[k] + 1{,}5\,\delta[k-1] + 1{,}26\,\delta[k-2] + \varepsilon[k-3]\left\{0{,}588\,(0{,}6)^{k-3} + 0{,}112\,(0{,}4)^{k-3}\right\}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ és 5 esetén a 2.2-1.2. pont példájában a lépésről lépésre módszerrel kapott $h[k]$ értéket adódnak. #

2. példa Határozzuk meg annak a FI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek rendszeregyenlete

$$y^{(2)}(t) + 4\,y^{(1)}(t) + 3\,y(t) = 5\,u^{(1)}(t) + u(t).$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete közvetlenül felírható:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1.$$

A $h_0(t)$ segéd-impulzusválasz általános alakja tehát

$$h_0(t) = \varepsilon(t)\left\{M_1\, e^{-3t} + M_2 e^{-t}\right\}.$$

A kezdeti feltételek (24) értelmében

$$M_1 + M_2 = 0, \quad -3M_1 - M_2 = 1; \quad \Rightarrow M_1 = -\frac{1}{2}, \quad M_2 = \frac{1}{2}.$$

A rendszeregyenlet jobb oldalát figyelembe véve kapjuk (a h_0 a $t = 0$ helyen folytonos)

$$h(t) = 5\, h_0^{(1)}(t) + h_0(t) = \varepsilon(t)\left\{\frac{15}{2} e^{-3t} - \frac{5}{2} e^{-3t}\right\} + \varepsilon(t)\left\{-\frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-3t}\right\}.$$

Elemi rendezés után kapjuk az keresett impulzusválaszt:

$$h(t) = \varepsilon(t)\left\{7\, e^{-3t} - 2e^{-3t}\right\}.$$

Ha a rendszeregyenlet jobb oldalán szerepelne egy $u^{(2)}(t)$ tag is, akkor az impulzusválaszban fellépne egy $\delta(t)$ típusú összetevő is. #

Többszörös sajátértékek esete

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a rendszeregyenlet minden sajátértéke egyszeres. A gyakorlati esetek többségében ez így is van (kivéve az FI esetben a $\lambda = 0$ sajátértéket).

Lehet úgy érvelni, hogy többszörös sajátértékek a valóságban nem léteznek, hiszen a rendszeregyenlet együtthatói csak kivételesen ismertek pontosan, azok többnyire kerekített számítási vagy mérési eredmények. Bármelyik a_i együtthatóhoz ezért hozzáadhatunk egy olyan kis (pozitív vagy negatív) értéket, amelyről feltételezhető, hogy az a kerekítési hibán belül nem jelent változást. Ha például valamelyik a_i együttható értéke 0,24 (vagy 0,240), akkor ez akár 0,241, akár 0,239 (vagy akár 0,2401, akár 0,2399) értékkel helyettesíthető. Az esetleges többszörös sajátértékek ekkor többnyire több egyszeres sajátértékbe megy át. Megtehetjük azt is, hogy a többszörös λ_i sajátértékeket helyettesítjük több, egymáshoz kellően közeli egyszeres sajátértékkel.

Fogalmilag és számítástechnikailag egyaránt indokolt vázolni azonban az eljárást többszörös sajátértékek esetére is. A következőket igazolás nélkül közöljük.

Ha λ_i egy r_i-szeres sajátérték, akkor nem csak λ_i^k, illetve $e^{\lambda_i t}$ sajátfüggvénye a rendszeregyenletnek, hanem

$$\begin{aligned} &\text{DI: } f_i[k] = \left\{M_{i,0} + M_{i,1}\, k + M_{i,2}\, k^2 + \ldots + M_{i,r-1}\, k^{r-1}\right\}\lambda_i^k; \\ &\text{FI: } f_i(t) = \left\{M_{i,0} + M_{i,1}\, t + M_{i,2}\, t^2 + \ldots + M_{i,r-1}\, t^{r-1}\right\} e^{\lambda_i t} \end{aligned} \tag{2.2-26}$$

is sajátfüggvény. Ez ugyanúgy r_i számú együtthatót tartalmaz, mint r_i számú különböző sajátértékhez tartozó sajátfüggvény összege. Ha a FI esetben λ_i=0 egy r_i-szeres sajátérték, akkor a hozzá tartozó sajátfüggvény egy (r_i–1) -edfokú polinom. A $h_0[k]$, illetve a $h_0(t)$ segéd-impulzusválaszban szereplő együtthatók meghatározása ugyanazon feltételek alapján történik, mint egyszeres sajátértékek esetén.

*2.2-2.3. Szabad és gerjesztett összetevőkre bontás

A (15) rendszeregyenletnek egy közvetlen megoldásaként az adott u gerjesztéshez tartozó y választ egy y_f szabad összetevő és egy y_g gerjesztett összetevő összegeként állítjuk elő:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad y[k] = y_f[k] + y_g[k]; \\ &\text{FI}: \quad y(t) = y_f(t) + y_g(t). \end{aligned} \tag{2.2-27}$$

Mint már említettük: ez a módszer csak akkor kényelmes, ha a gerjesztés egyszerű függvénnyel leírható.

A szabad összetevő általános alakja

A válasz y_f *szabad összetevője,* röviden a *szabad válasz* (pontosabban: a válasz szabad összetevőjének általános alakja) a gerjesztetlen rendszer (u = 0) válasza, vagyis a homogén rendszeregyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad y_f[k] + \sum_{i=0}^{n} a_i y_f[k-i] = 0; \\ &\text{FI}: \quad y_f^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y_f^{(i)}(t) = 0. \end{aligned} \tag{2.2-28}$$

A szabad választ nevezik sajátválasznak és természetes válasznak is.

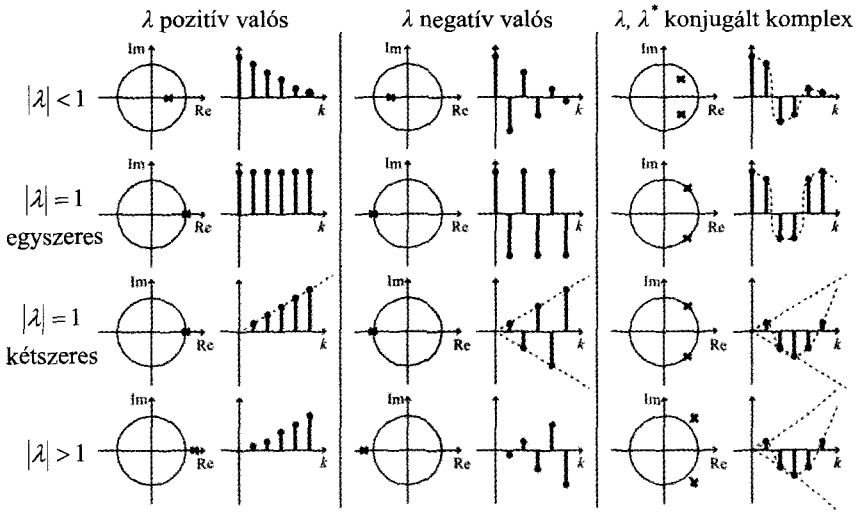
Az y_f szabad válasz általános kifejezése megegyezik a h_0 segéd-impulzusválasz általános alakjával, hiszen a $\delta[k]$, illetve a $\delta(t)$ gerjesztésű rendszerre a k=0, illetve a t=0 időponttól eltekintve nem hat gerjesztés. A rendszeregyenlet (21) karakterisztikus egyenletének megoldása után ismerjük a rendszeregyenlet λ_i sajátértékeit. Ha ezek egyszeresek, akkor a szabad válasz általános alakja a (22) mintájára

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad y_f[k] = M_1 \lambda_1^k + M_2 \lambda_2^k + \ldots + M_n \lambda_n^k; \\ &\text{FI}: \quad y_f(t) = M_1 e^{\lambda_1 t} + M_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + M_n e^{\lambda_n t}. \end{aligned} \tag{2.2-29}$$

Az n számú M_i együttható egyelőre ismeretlen. Bizonyítható, hogy a (28) egyenlet minden megoldása ilyen alakú, ezért nevezik ezt a homogén egyenlet általános megoldásának. Ha valamelyik sajátérték többszörös, akkor az ahhoz tartozó általános megoldás (26) szerinti. A határozatlan állandók összes száma ekkor is n. Mint már említettük: a többszörös sajátértékek megkerülhetők az a_p együtthatóknak vagy a többszörös λ_i sajátértékeknek a kerekítési hibán belüli kis megváltoztatásával.

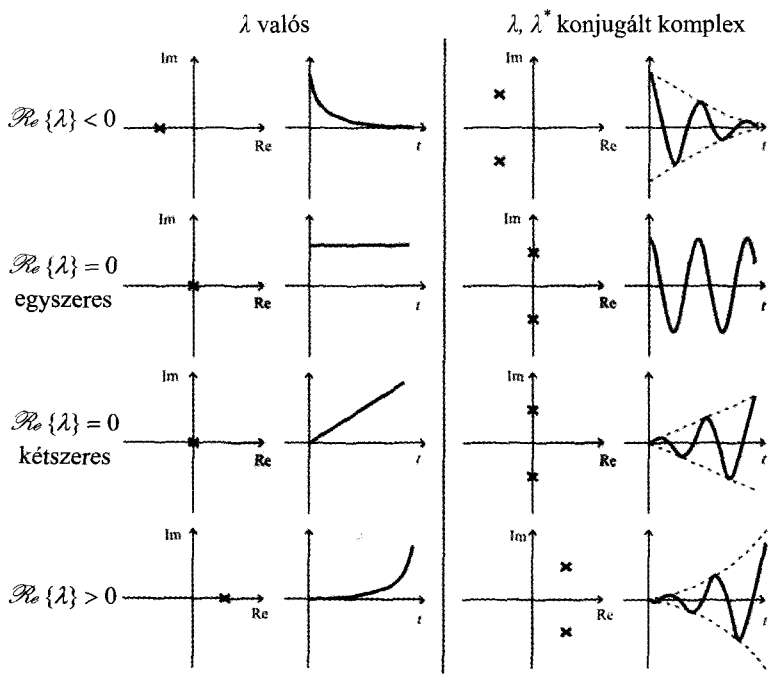
Amelyik DI sajátértékre $|\lambda_i| < 1$ (egységsugarú körön belüli), illetve amelyik FI sajátértékre $\mathcal{R}e\{\lambda_i\}$<0 (a bal félsíkra esik), az a végtelenben nullához tartozó tagot jelent még többszörös sajátérték esetén is. A csökkenés mértékét jellemezhetjük azzal a k_i, illetve t_i időponttal, amely után az $|M_i \lambda_i^k|$, illetve az $|M_i e^{\lambda_i t}|$ függvény kisebb $|M_i|$ kezdeti értékének 1%-ánál vagy valamilyen más tört részénél. Rövid számolással belátható, hogy

$$\begin{aligned} &|\lambda_i^k| < 0{,}01 \Leftrightarrow k > k_i = \frac{\ln 100}{-\ln|\lambda_i|} \approx \frac{4{,}6}{-\ln|\lambda_i|}, \quad |\lambda_i| < 1; \\ &|e^{\lambda_i t}| < 0{,}01 \Leftrightarrow t > t_i = \frac{\ln 100}{-\mathcal{R}e\{\lambda_i\}} \approx \frac{4{,}6}{-\mathcal{R}e\{\lambda_i\}}, \quad \mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0. \end{aligned} \tag{2.2-30}$$



2.2-1. ábra A DI válasz szabad összetevőjének változása néhány tipikus sajátérték esetén

A t_i illetve a k_i neve *időállandó*. Ha minden $|\lambda_i| < 1$, illetve ha minden $\mathcal{R}e\{\lambda_i\}<0$ akkor az időállandók legnagyobbika mérvadó arra, hogy mennyi idő után válik elhanyagolhatóvá a szabad összetevő. Az ennek megfelelő időpont után a teljes szabad összetevő nem feltétlenül csökken kezdeti értékének 1%-a alá, mert még az M_i állandók értékét is figyelembe kell venni. A megfelelő érték konkrét esetben kiszámítható, de ennek meghatározására ritkán van szükség.



2.2-2. ábra A FI válasz szabad összetevőjének változása néhány tipikus sajátérték esetén

A szabad összetevő változását szemlélteti néhány tipikus valós sajátérték vagy komplex sajátérték-pár esetére az 1. illetve a 2. ábra. Figyeljük meg, hogy a DI esetben az abszolút értékben egynél kisebb vagy nagyobb, a FI esetben a negatív vagy a pozitív valós részű sajátértékhez tartozó szabad összetevő lényegesen másként viselkedik.

A gerjesztett összetevő

A válasz y_g *gerjesztett összetevője,* röviden: a *gerjesztett válasz* a vizsgált rendszernek az adott gerjesztéshez tartozó egy lehetséges válasza, Ez azért nem jelenti a feladat megoldását, mert nem tesz eleget a kezdeti feltételeknek.

A matematikai terminológia szerint a gerjesztett válasz az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása. A gerjesztett válasz nem egyértelműen meghatározott, rendszerint a legegyszerűbb alakot választjuk.

A gerjesztett válasz meghatározására nincs általánosan használható eljárás. Ha azonban az u gerjesztést egyszerű függvény írja le, akkor használható a *próbafüggvény módszer:* az y_g gerjesztett választ ugyanolyan alakú, határozatlan szorzótényezőt tartalmazó függvény (például állandó, exponenciális, szinuszos függvény) alakjában keressük, mint amilyen a gerjesztés. Az adott u és a feltételezett y_g próbafüggvényt a rendszeregyenletbe helyettesítjük. A megegyező függvények együtthatóinak egyezéséből lineáris egyenleteket vagy egyenletrendszert kapunk az ismeretlen együtthatókra. A DI esetben az $u[k-1], u[k-2], \ldots, u[k-m]$ tagok fellépése miatt a próbafüggvény csak $k \geq m$ esetén érvényes. A következő két táblázat néhány példát ad a próbafüggvények megválasztására. Figyeljük meg, hogy ha a gerjesztés megegyezik valamelyik λ_i^k, illetve $e^{\lambda_i t}$ sajátfüggvénnyel, akkor $A\,k\,\lambda_i^k$, illetve $A\,t\,e^{\lambda_i t}$ alakú próbafüggvényt kell választanunk.

Diszkrét idejű próbafüggvények	
$u[k]$, $k \in \mathbf{N}$	$y_g[k]$, $k \geq m$
C	A
$C\,a^k$ $(a \neq \lambda_i)$	$A\,a^k$
$C \cos \Theta\, k + D \sin \Theta\, k$ $(e^{j\Theta} \neq \lambda_i)$	$A\cos\Theta k + B\sin\Theta k$
$C\,k^p\,(p \in \mathbf{N})$	$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 + \ldots + A_p k^p$
$C\,\lambda_i^k$ (λ_i egyszeres)	$A\,k\,\lambda_i^k$

Folytonos idejű próbafüggvények	
$u(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$	$y_g(t)$, $t \in \mathbf{R}_+$
C	A
$C\,e^{at}$ $(a \neq \lambda_i)$	$A e^{at}$
$C \cos \Omega t + D \sin \Omega t$ $(e^{j\Omega} \neq \lambda_i)$	$A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$
$C\,t^p\,(p \in \mathbf{N})$	$A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_p t^p$
$C\,e^{\lambda_i t}$ (λ_i egyszeres)	$A\,t\,e^{\lambda_i t}$

Ha a gerjesztés a megadott függvények szorzata, akkor a próbafüggvényt is a megadott próbafüggvények szorzatának választjuk, de az állandók szorzatát egyetlen állandónak tekintjük.

Ha a gerjesztés intervallumonként írható le az említett egyszerű függvényekkel, akkor minden intervallumot a gerjesztett válasz és a kezdeti feltételek szempontjából új feladatként kezelünk.

A kezdeti feltételek érvényesítése

Igazolható, hogy a rendszeregyenlet *általános megoldása*, (a válasz általános alakja) a szabad válasz általános alakjának és a gerjesztett válasz bármely alakjának az összege:

$$\begin{aligned} \mathrm{DI}: &\quad y[k] = y_{\mathrm{f}}[k] + y_{\mathrm{g}}[k]; \\ \mathrm{FI}: &\quad y(t) = y_{\mathrm{f}}(t) + y_{\mathrm{g}}(t). \end{aligned} \tag{2.2-31}$$

Az ebben szereplő n számú határozatlan állandót úgy kell megválasztanunk, hogy a kezdeti feltételek ki legyenek elégítve. Mivel az eljárás némileg eltérő a DI és a FI esetben ezért ezeket egymás után tárgyaljuk.

Diszkrét idejű rendszer válasza

A gerjesztett válasznak a próbafüggvénnyel meghatározott alakja csak $k \geq m$ esetén érvényes. Mivel az általános alak n számú állandót tartalmaz, ezért azt n számú ütemmel visszafelé is érvényesnek tekinthetjük, vagyis kiterjeszthetjük azt a $k = m - 1, m - 2, \ldots, m - n$ ütemekre is. Ezek szerint a következő *kezdeti értékeket* kell meghatároznunk:

$$y[m-n],\ \ y[m-n+1],\ \ y[m-n+2], \ldots,\ \ y[m-1]. \tag{2.2-32}$$

Ha m=0, akkor ezek megegyeznek az $y[-1]$, $y[-2]$, …, $y[-n]$ *kiindulási értékekkel.* Belépő gerjesztés esetén ezek mindegyike nulla. Ha m=1, akkor először $y[0]$ értékét a lépésről lépésre módszerrel kiszámítjuk (2.2-1.2. pont), továbbá felhasználjuk az $y[-1]$, $y[-2]$, …, $y[-n+1]$ kiindulási értékeket. Ha m=2, akkor $y[0]$ és $y[1]$ értékét számítjuk a lépésről lépésre módszerrel és így tovább.

A szabad összetevőben szereplő határozatlan állandókat a következő lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk:

$$y_{\mathrm{f}}[k] = y[k] - y_{\mathrm{g}}[k],\ k = m - n,\ m - n + 1,\ \ldots,\ m - 1. \tag{2.2-33}$$

Ha minden sajátérték egyszeres, akkor (19) értelmében a megoldandó egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\, \lambda_i^k = y[k] - y_{\mathrm{g}}[k], \quad k = m-n, m-n+1, \ldots, m-1. \tag{2.2-34}$$

Az egyenletrendszer megoldása után ismertek lesznek az addig határozatlan állandók (egyszeres sajátértékek esetén $M_1, M_2, \ldots, M_n$). Ezeket behelyettesítve kapjuk a válasz kifejezését:

$$y[k] = y_{\mathrm{f}}[k] + y_{\mathrm{g}}[k],\ k \geq m - n, \tag{2.2-35}$$

míg $y[k]$ értékeit a $0 \leq k < m-n$ ütemekre korábban már meghatároztuk. Ezzel a válasz minden $k \in \mathbf{Z}$ értékre ismert és feladatunkat megoldottuk. Ha $m \leq n$, akkor $y[k]$ formulája

a $k = 0$ értéktől már használható, ha azonban $m > n$, akkor a $k = 0, 1, \ldots, m-n-1$ ütemekre vonatkozó értékeket egyenként kell megadnunk.

1. példa Határozzuk meg azon DI rendszer válaszát, amelynek rendszeregyenlete és gerjesztése

$$y[k]-y[k-1]+0{,}24\,y[k-2]=u[k]+0{,}5\,u[k-1]-0{,}2\,u[k-3],$$
$$u[k]=\varepsilon[k]\left\{2\,(0{,}5)^k+3\,(0{,}6)^k\right\}.$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\lambda^2-\lambda+0{,}24=0 \;\Rightarrow\; \lambda_1=0{,}6,\;\; \lambda_2=0{,}4\,.$$

A szabad válasz ezek szerint $(0{,}6)^k$ és $(0{,}4)^k$ sajátfüggvények szuperpozíciója. A gerjesztett válasz próbafüggvénye (mivel 0,6 egy sajátérték is!)

$$y_g[k]=A\,(0{,}5)^k+B\,k\,(0{,}6)^k.$$

A rendszeregyenletbe helyettesítve (külön kezelhetjük a két tagot)

$$A\left\{(0{,}5)^k-(0{,}5)^{k-1}+0{,}24\,(0{,}5)^{k-2}\right\}=2\left\{(0{,}5)^k+0{,}5\,(0{,}5)^{k-1}-0{,}2\,(0{,}5)^{k-3}\right\},$$
$$B\left\{k\,(0{,}6)^k-(k-1)(0{,}6)^{k-1}+0{,}24\,(k-2)(0{,}6)^{k-2}\right\}=3\left\{(0{,}6)^k+0{,}5\,(0{,}6)^{k-1}-0{,}2\,(0{,}6)^{k-3}\right\}.$$

Az első egyenletből a $(0{,}5)^k$ függvény együtthatóinak egyezéséből

$$A=2\,\frac{1+0{,}5\,(0{,}5)^{-1}-0{,}2\,(0{,}5)^{-3}}{1-(0{,}5)^{-1}+0{,}24\,(0{,}5)^{-2}}=-20\,.$$

A második egyenletből a $(0{,}6)^k$ függvény együtthatóinak egyezéséből

$$B=3\,\frac{1+0{,}5\,(0{,}6)^{-1}-0{,}2\,(0{,}6)^{-3}}{1-(0{,}6)^{-1}+0{,}24\,(0{,}6)^{-2}}=\frac{49}{6}\,.$$

A $k\,(0{,}6)^k$ függvény együtthatóinak összege azonosan nulla, ezért ez nem ad új egyenletet a megoldáshoz.

A válasz általános alakja a $k \geq m-n=3-2=1$ ütemtől érvényes. Célszerű ezért a kitevőket $k-1$ alakúnak választani:

$$y[k]=M_1\,(0{,}6)^{k-1}+M_2\,(0{,}4)^{k-1}-10\,(0{,}5)^{k-1}+4{,}9\,(k-1)(0{,}6)^{k-1},\;\; k\geq 1\,.$$

A lépésről lépésre módszerrel

$$y[0]=(2+3)=5\,,$$
$$y[1]=5+(2\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}6)+0{,}5\,(2+3)=10{,}3\,,$$
$$y[2]=10{,}3-0{,}24\cdot 5+\left(2\cdot 0{,}5^2+3\cdot 0{,}6^2\right)+0{,}5\,(2\cdot 0{,}5+3\cdot 0{,}6)=12{,}08\,.$$

A kezdeti feltételeket a $k = 1$ és 2 helyen kell kielégíteni:

$$k=1 \;\Rightarrow\; M_1+M_2-10=10{,}3\,,$$
$$k=2 \;\Rightarrow\; 0{,}6\,M_1+0{,}4\,M_2-10\cdot 0{,}5+4{,}9\cdot 0{,}6=12{,}08\,.$$

Ebből $M_1 = 30{,}1$ és $M_2 = -9{,}8$ adódik. A válasz végső alakja ezek szerint

$$y[k] = 5\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\left\{30{,}1\,(0{,}6)^{k-1} - 9{,}8\,(0{,}4)^{k-1} - 10\,(0{,}5)^{k-1} + 4{,}9\,(k-1)(0{,}6)^{k-1}\right\}.$$

Célszerű lehet a lépésről lépésre módszerrel még néhány $y[k]$ értéket kiszámítani és összevetni a megoldás helyettesítési értékével. #

Folytonos idejű rendszer válasza

A FI rendszeregyenlet $y_{\mathrm{f}}(t)$ szabad összetevőjében szereplő n számú ismeretlen állandót az $y^{(r)}(+0)$ *kezdeti feltételeket* kifejező n számú lineáris egyenletrendszer megoldásával határozhatjuk meg:

$$y_{\mathrm{f}}^{(r)}(+0) = y^{(r)}(+0) - y_{\mathrm{g}}^{(r)}(+0), \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.2-36}$$

Itt $y^{(r)}(t)$ az $y(t)$ r-edik deriváltja.

Mint a 2.2-1.3. pontban már láttuk: az $y^{(r)}(+0)$ kezdeti értékek megegyeznek az $y^{(r)}(-0)$ kiindulási értékekkel, ha a rendszeregyenletben szereplő minden $u^{(i)}(t)$ derivált véges a $t = 0$ helyen. Ellenkező esetben képezzük a gerjesztés annyiadik (mondjuk p-edik) integrálját, hogy arra a feltétel teljesüljön, az így kapott gerjesztéshez tartozó válasznak képezzük a p-edik (általánosított) deriváltját. Belépő gerjesztés esetén minden kiindulási érték nulla.

Egyszeres sajátértékek esetén a (29) értelmében a (36) részletes alakja

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r\, M_i = y^{(r)}(+0) - y_{\mathrm{g}}^{(r)}(+0), \quad r = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.2-37}$$

Értelem szerinti az eljárás többszörös sajátértékek esetén.

2. példa Határozzuk meg annak a FI rendszernek a válaszát, amelynek rendszeregyenlete és gerjesztése

$$y^{(2)}(t) + 0{,}6\, y^{(1)}(t) + 0{,}25\, y(t) = 8\, u^{(1)}(t) + 16\, u(t),$$
$$u(t) = 2\,\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-1)\}.$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\lambda^2 + 0{,}6\,\lambda + 0{,}25 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -0{,}3 + \mathrm{j}\,0{,}4, \quad \lambda_2 = -0{,}3 - \mathrm{j}\,0{,}4.$$

A szabad válasz általános alakja ezek szerint

$$y_{\mathrm{f}}(t) = \{P \cos 0{,}4\,t + Q \sin 0{,}4\,t\}\,\mathrm{e}^{-0{,}3t}.$$

Vizsgáljuk először a $0 < t < 1$ intervallumot. Itt a gerjesztés $u(t) = 2$, ezért a válasz próbafüggvénye is állandó: $y_{\mathrm{g}}(t) = A$. A rendszeregyenletbe helyettesítve (az állandó deriváltja nulla)

$$0{,}25\,A = 16 \cdot 2 \;\Rightarrow\; A = 128.$$

A válasz általános alakja e vizsgált intervallumban

$$y(t) = \{P \cos 0{,}4\,t + Q \sin 0{,}4\,t\}\,\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 128, \quad 0 < t < 1.$$

A kezdeti feltételeket a (36) egyenletrendszer megoldásával kapjuk, amely a (13) általános alakú rendszeregyenlet kétszeres integrálásával állítható elő:

$$y(+0)=b_0\,u(+0) \quad \Rightarrow y(+0)=0\,,$$
$$y^{(1)}(+0)+a_1\,y(+0)=b_0\,u^{(1)}(+0)+b_1\,u(+0) \;\Rightarrow y^{(1)}(+0)=8\cdot 2=16\,.$$

Az $y(t)$ és első deriváltjának kifejezésébe helyettesítve

$$\left.\begin{aligned} P+128&=0\,,\\ -0{,}3\,P+0{,}4\,Q&=16\,;\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} P&=-128\,,\\ Q&=-56\,.\end{aligned}\right.$$

Tekintsük most az $1<t<\infty$ intervallumot. Itt $u(t)=0$, ezért a válasz megegyezik szabad összetevőjével, általános alakja (célszerűen $t-1$ változóval)

$$y(t)=\{R\cos 0{,}4\,(t-1)+S\sin 0{,}4\,(t-1)\}\,\mathrm{e}^{-0{,}3\,(t-1)}\,,\quad 1<t<\infty\,.$$

A kezdeti feltételekhez szükségünk van a $t=1-0$ helyen fellépő értékekre, amelyek az előző intervallumra érvényes megoldásba helyettesítéssel adódnak:

$$y(1-0)=\{-128\cos 0{,}4-56\sin 0{,}4\}\,\mathrm{e}^{-0{,}3}+128=24{,}505\,,$$
$$y^{(1)}(1-0)=\{0{,}4\cdot 128\sin 0{,}4-0{,}4\cdot 56\cos 0{,}4\}\mathrm{e}^{-0{,}3}-$$
$$-0{,}3\,\{-128\cos 0{,}4-56\sin 0{,}4\}\mathrm{e}^{-0{,}3}=30{,}535\,.$$

Az előző egyenletrendszer mintájára

$$y(1+0)-y(1-0)=0 \;\Rightarrow\; y(1+0)=24{,}505\,,$$
$$y^{(1)}(1+0)-y^{(1)}(1-0)+0{,}6\,\{y(1+0)-y(1-0)\}=8\,\{u(1+0)-u(1-0)\} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y^{(1)}(1+0)=30{,}535-0{,}6\,\{24{,}505-24{,}505\}+8\{0-2\}=14{,}535\,.$$

Az R és S állandókra vonatkozó egyenletrendszer ennek alapján

$$R=24{,}505\,,$$
$$-0{,}3\,R+0{,}4\,S=14{,}535 \;\Rightarrow\; S=54{,}716\,.$$

A keresett válasz végső alakja

$$y(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\}\{[-128\cos 0{,}4\,t-56\sin 0{,}4\,t]\,\mathrm{e}^{-0{,}3\,t}+128\}+$$
$$+\varepsilon(t-1)\{24{,}5\cos 0{,}4\,(t-1)+54{,}7\sin 0{,}4\,(t-1)\}\,\mathrm{e}^{-0{,}3\,(t-1)}\,.$$

Nem jelentett volna lényeges bonyodalmat, ha a $t=1$ időpont után a gerjesztést valamilyen más egyszerű függvény írta volna le.

Megjegyezzük, hogy ebben a speciális esetben a feladatot egyszerűbben is megoldhattuk volna. A gerjesztést tekinthetjük az $u_1(t)=2\,\varepsilon(t)$ és az $u_2(t)=-2\,\varepsilon(t-1)$ gerjesztések szuperpozíciójának. Mivel $u_2(t)=-u_1(t-1)$, ezért a $0<t<1$ intervallumra vonatkozó $y_1(t)$ megoldást felhasználva

$$y(t)=\varepsilon(t)\{[-128\cos 0{,}4\,t-56\sin 0{,}4\,t]\,\mathrm{e}^{-0{,}3\,t}+128\}-$$
$$-\varepsilon(t-1)\{[-128\cos 0{,}4\,(t-1)-56\sin 0{,}4\,(t-1)]\,\mathrm{e}^{-0{,}3(t-1)}+128\}.$$

Trigonometriai átalakításokkal az előző alakhoz juthatunk. Az annyiban előnyösebb, hogy a válasz két ablakozott jel összegeként van előállítva. #

2.2-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a DI rendszer válaszát, ha rendszeregyenlete $y - 0{,}6\, y^{(1)} = u^{(2)}$, és gerjesztése

(a) $u[k]=\delta[k]$.

(b) $u[k]=\varepsilon[k]$.

F-2. Határozza meg a DI rendszer válaszát, ha a rendszeregyenlete

$$y - 0{,}6y^{(1)} + 0{,}05\, y^{(2)} = 3\, u^{(2)},$$

és a gerjesztése:

(a) $u[k]=\varepsilon[k]$. (b) $u[k]=\varepsilon[k](-0{,}1)^k$. (c) $u[k]=\varepsilon[k](0{,}1)^k$.

(d) $u[k]=\varepsilon[k]-\varepsilon[k-3]$.(Útmutatás. Alkalmazhatja a szuperpozíció elvét!)

$*(e)$ $u[k]=9\,\{1-\varepsilon[k]\}+\varepsilon[k]$. (Látni fogjuk, hogy a rendszer GV stabilis.)

Ellenőrizze $y[k]$ értékét a k = 0, 1, 2, 3 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel! (Vö. 2.2-1.F-3.)

F-3. Határozza meg a DI rendszernek az $u[k]=\varepsilon[k]$ gerjesztéshez tartozó válaszát, ha rendszeregyenlete

(a) $y - 0{,}5y^{(1)} = u - u^{(1)}$. (b) $y - 2{,}5\, y^{(1)} + y^{(2)} = u - 3\, u^{(1)} + 2\, u^{(2)}$.

F-4. Határozza meg a FI rendszer válaszát, ha rendszeregyenlete

$$y^{(2)} + 6\, y^{(1)} + 5\, y = u^{(1)} + 9\, u,$$

és a gerjesztése:

(a) $u(t)=\varepsilon(t)$. (b) $u(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-2t}$. (c) $u(t)=\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-t}$.

(d) $u(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$. (Útmutatás. Alkalmazhatja a szuperpozíció elvét!)

$*(e)$ $u(t)=\{1-\varepsilon(t)\}+\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-2t}$. (Látni fogjuk, hogy a rendszer GV stabilis.)

F-5. Határozza meg a FI rendszernek az $u(t)=\varepsilon(t)$ gerjesztéshez tartozó válaszát (az ugrásválaszt), ha rendszeregyenlete

(a) $y^{(1)} + y = u$.

(b) $y^{(2)} - y^{(1)} - 2\, y = u^{(1)} - 2\, u$.

2.2-2.M. Megoldások

A feladatok megoldhatók akár az impulzusválasz számításával és szükség esetén konvolúcióval, akár az összetevőkre bontás módszerével. A megoldásokhoz tartozó bizonyos magyarázatok (például a kezdeti értékek) csak a második megoldási módszerre vonatkoznak.

M-1. $\lambda_1 = 0{,}6$. $(a)\ y[k] = \varepsilon[k-2](0{,}6)^{k-2}$. $(b)\ y[k] = \varepsilon[k-2]\{2{,}5 - 1{,}5\,(0{,}6)^{k-2}\}$.

M-2. A sajátértékek $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 0{,}1$. Az $y[0]$, $y[1]$ kezdeti értékeket a lépésről lépésre módszerrel kell számítani. A megoldás két alábbi alakja közül a második a célszerűbb.

$$(a)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{20}{3} - \frac{45}{3}(0{,}5)^k + \frac{25}{3}(0{,}1)^k\right\} = \varepsilon[k-2]\left\{\frac{20}{3} - \frac{15}{4}(0{,}5)^{k-2} + \frac{1}{12}(0{,}1)^{k-2}\right\}.$$

$$(b)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{25(-0{,}1)^k + \frac{25}{2}(0{,}5)^k - \frac{75}{2}(0{,}1)^k\right\} = \varepsilon[k-2]\left\{\frac{1}{4}(-0{,}1)^{k-2} + \frac{25}{8}(0{,}5)^{k-2} - \frac{3}{8}(0{,}1)^{k-2}\right\}.$$

$$(c)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{75}{4}(0{,}5)^k - \frac{75}{4}(0{,}1)^k - 75\,k\,(0{,}1)^k\right\} =$$

$$= \varepsilon[k-2]\left\{\frac{75}{16}(0{,}5)^{k-2} - \frac{27}{16}(0{,}1)^{k-2} - \frac{3}{4}(k-2)(0{,}1)^{k-2}\right\}.$$

$$(d)\ y[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])\left\{\frac{20}{3} - \frac{45}{3}(0{,}5)^k + \frac{25}{3}(0{,}1)^k\right\} - \varepsilon[k-3]\{13{,}125\,(0{,}5)^{k-3} + 8{,}325\,(0{,}1)^{k-3}\} =$$

$$= (\varepsilon[k-2] - \varepsilon[k-5])\left\{\frac{20}{3} - \frac{15}{4}(0{,}5)^{k-2} + \frac{1}{12}(0{,}1)^{k-2}\right\} - \varepsilon[k-5]\{3{,}281\,(0{,}5)^{k-5} + 0{,}0831\,(0{,}1)^{k-5}\}.$$

$*\,(e)\ y[k] = 60,\ k \in \mathbf{Z}_-,\ y[0] = y[1] = 60$;

$$y[k] = \frac{20}{3} + 120\,(0{,}5)^k - \frac{200}{3}(0{,}1)^k,\quad k \in \mathbf{N};$$

$$y[k] = 60\,\{1 - \varepsilon[k-2]\} + \varepsilon[k-2]\left\{\frac{20}{3} + 30\,(0{,}5)^{k-2} - \frac{2}{3}(0{,}1)^{k-2}\right\},$$

M-3. A válasz mindkét esetben $y[k] = \varepsilon[k](0{,}5)^k$. A (*b*) rendszeregyenlet sajátértékei $\lambda_1 = 0{,}5$ és $\lambda_2 = 2$. Az utóbbi azonban nem szerepel a válaszban. Ez a megállapítás más gerjesztésre is érvényes. (A 2.2-1.F-1. feladatban beláttuk, hogy a második rendszeregyenlet az elsőből következik. Később ennek olyan értelmezést is adhatunk, hogy a két rendszer átviteli függvénye megegyezik.)

M-4. A sajátértékek $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -5$. Az $y(t)$ folytonos, de $y^{(1)}(t)$ nem az, ha $u(t)$ nem folytonos. Integráljuk a rendszeregyenletet –0 és +0 között. Ennek alapján azt kapjuk, hogy $y^{(1)}(+0) - y^{(1)}(-0) = u^{(1)}(+0) - u^{(1)}(-0)$. Egy másik lehetőség, hogy például az *(a)* feladatnál először az $u_1(t) = \varepsilon(t)t$ gerjesztéshez tartozó y_1 választ számítjuk, amelyre $y_1(0) = 0$, $y_1^{(1)}(0) = 0$, majd ennek ismeretében $y(t) = y_1'(t)$.

A próbafüggvények az (*a*) és (*d*) esetekben $y_g(t) = A$, a (*b*) és az (*e*) esetben $y_g(t) = A\,\mathrm{e}^{-2t}$, a (*c*) esetben $y_g(t) = A\,t\,\mathrm{e}^{-2t}$. Az (*a*), (*b*), (*c*) és (*d*) esetekben $y(+0) = 0$, $y^{(1)}(+0) = 1$. A válasz kifejezése:

$$(a)\ y(t) = \varepsilon(t)\left[1{,}8 - 2\,\mathrm{e}^{-t} + 0{,}2\,\mathrm{e}^{-5t}\right].$$

$$(b)\ y(t) = \varepsilon(t)\left[-\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-2t} + 2\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-5t}\right].$$

$(c)\ y(t)=\varepsilon(t)\left[\left(2t-\frac{1}{4}\right)e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-5t}\right].$

$(d)\ y(t)=[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)][1{,}8-2\,e^{-t}+0{,}2\,e^{-5t}]+\varepsilon(t-1)\left[2\left(1-e^{-1}\right)e^{-(t-1)}-0{,}2\left(1-e^{-5}\right)e^{-5(t-1)}\right].$

$*(e)$ Az $u(t)$ folytonos, ezért $y(+0)=y(-0)=9/5$, $y^{(1)}(+0)=y^{(1)}(-0)=0$;

$$y(t)=\frac{9}{5}[1-\varepsilon(t)]+\varepsilon(t)\left[-\frac{7}{3}e^{-2t}+4\,e^{-t}+\frac{2}{15}e^{-5t}\right].$$

M-5. A válasz kifejezése mindkét esetben $y(t)=\varepsilon(t)[1-e^{-t}]$.

A *(b)* rendszer sajátértékei $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=+2$. Az utóbbi nem szerepel a válaszban. Ez más gerjesztés esetén is érvényes. (vö. 2.2-1.F-2.) Ennek a megállapításnak jelentőségét a stabilitás tárgyalásánál, a következő szakaszban fogjuk látni.

2.2-3. A gerjesztés-válasz stabilitás

2.2-3.1. A rendszeregyenlet sajátértékei

A rendszer gerjesztés-válasz stabilis, ha bármely korlátos gerjesztéséhez korlátos válasz tartozik (1.2-2.5. pont). A rendszeregyenlet ismeretében erre elegendő feltételt adunk.

A rendszeregyenletével leírt rendszer válasza a szabad és a gerjesztett válasz összege. A DI illetve a FI rendszer válaszának szabad összetevője egyszeres λ_i sajátértékek esetén λ_i^k illetve $e^{\lambda_i t}$ alakú tagok összege, míg többszörös sajátértékek esetén λ_i^k, $k\lambda_i^k$, $k^2\lambda_i^k$, ... illetve $e^{\lambda_i t}, t\,e^{\lambda_i t}, t^2 e^{\lambda_i t}, \ldots$ alakú tagok összege. A szabad összetevő általános alakja akkor és csakis akkor korlátos, ha DI esetben minden $|\lambda_i|<1$, illetve FI esetben ha minden $\mathcal{R}e\{\lambda_i\}<0$ A gerjesztett összetevő próbafüggvénye viszont olyan mint a gerjesztés, ezért az korlátos gerjesztés esetén biztosan korlátos. Ez az állítás még akkor is igaz, ha a gerjesztés λ_i^k illetve $e^{\lambda_i t}$ alakú exponenciális függvény, mert ekkor a próbafüggvény $k^p\lambda_i^k$ illetve $t^p e^{\lambda_i t}$ $(p\in\mathbf{N})$. Ez ugyanis korlátos, ha $|\lambda_i|<1$, illetve ha $\mathcal{R}e\{\lambda_i\}<0$. Összefoglalva a következőket állíthatjuk.

Egy *rendszeregyenletével* jellemzett lineáris, invariáns rendszer biztosan *gerjesztés-válasz stabilis*, ha minden *sajátértéke* (akár egyszeres, akár többszörös) kielégíti az elegendő, de elvileg nem szükséges feltételeket:

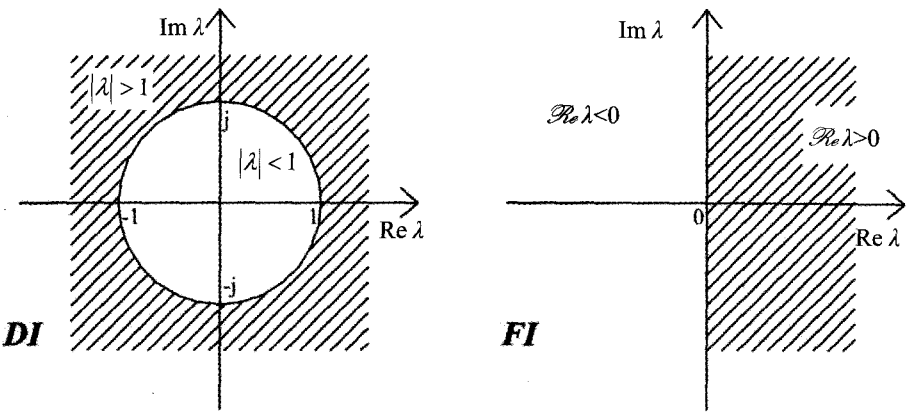
$$\text{DI}:\ |\lambda_i|<1;\quad \text{FI}:\ \mathcal{R}e\{\lambda_i\}<0;\quad i=1,2,\ldots,n \Rightarrow \text{GV stabilis rendszer} \qquad (2.2\text{-}38)$$

A rendszer tehát biztosan gerjesztés válasz stabilis, ha DI esetben minden sajátértéke a λ komplex számsík *egységsugarú körén belül* helyezkedik el, illetve ha FI esetben minden sajátértéke a λ komplex számsík *bal félsíkján* helyezkedik el. (3. ábra).

A rendszer GV stabilitásának szükséges és elegendő feltétele az (2.1-1.3 és 2.3. pont), hogy impulzusválasza abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható legyen. A (38) feltétel a GV stabilitásnak elvileg azért nem szükséges feltétele, mert előfordulhat, hogy a feltételt nem kielégítő sajátértékek egyike sem szerepel az impulzusválaszban. Kényes kérdés, hogy mit tartsunk egy rendszer stabilitásáról, amely impulzusválasza alapján GV stabilis, de sajátértékei nem elégítik ki a (33) feltételt. Ebből már látható, hogy a GV stabilitás és „a stabilitás" nem azonosítható fogalmak. A 2.3-3. szakaszban még lesz

szó az aszimptotikus stabilitásról, további stabilitásfogalmakkal (például a Ljapunov-stabilitással) a 2.5. fejezetben foglalkozunk. A biztonság felé tévedünk, ha a (38) feltételeket nem kielégítő rendszert nem tekintjük GV stabilisnak.

Ha a rendszeregyenletnek van az egységsugarú körre eső $|\lambda_p| = 1$ illetve a képzetes tengelyre eső $\mathcal{R}e\{\lambda_p\}=0$ típusú egyszeres sajátértéke, akkor az $u[k] = \varepsilon[k]\lambda_p^k$ illetve az $u(t) = \varepsilon(t)e^{\lambda_p t}$ gerjesztéshez tartozó válasznak lesz $M_p\, k\, \lambda_p^k$ vagy $M_p\, t\, e^{\lambda_p t}$ típusú összetevője. Ez az összetevő nem korlátos, ennek következtében a rendszer csak kivételesen lehet GV stabilis.



2.2-3. ábra A rendszer biztosan GV stabilis ha minden sajátértéke a λ komplex számsík egységsugarú körén belül illetve bal félsíkján helyezkedik el.

Példa A következő két DI illetve FI rendszeregyenlet ugyanazt a DI illetve FI rendszert írja le, mert a két impulzusválasz megegyezik (2.2-1.F-1. és 2. feladat).

$$\text{DI}: \quad y - 0{,}5\, y^{(1)} = u - u^{(1)}\,; \qquad y - 2{,}5\, y^{(1)} + y^{(2)} = u - 3\, u^{(1)} + 2\, u^{(2)}\,;$$

$$\text{FI}: \quad y^{(1)} + y = u\,; \qquad y^{(2)} - y^{(1)} - 2\, y = u^{(1)} - 2\, u\,.$$

A bal oldali oszlopban szereplő rendszeregyenlet egyetlen sajátértéke (DI:) $\lambda = 0{,}5$; (FI:) $\lambda = -1$, ezek tehát GV stabilis rendszerek. A jobb oldali oszlopban szereplő rendszeregyenlet sajátértékei (DI:) $\lambda_1 = 0{,}5$, $\lambda_2 = 2$; (FI:) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Ezekre a (38) feltételek nincsenek kielégítve, a rendszer ennek ellenére GV stabilis, hiszen impulzusválasza megegyezik az előző rendszer GV stabilis impulzusválaszával. #

2.2-3.2. A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

A rendszeregyenlet ismeretében elegendő feltételeket adhatunk a rendszer GV stabilitására. Ehhez nem kell megoldanunk a karakterisztikus egyenletet, elegendő azt ellenőriznünk, hogy a megoldásai kielégítik-e a (38) feltételt, ami az együtthatók ismeretében megtehető. Ez különösen akkor előnyös, amikor az együtthatók egy vagy több paraméter függvényei, tehát a sajátértékek numerikusan nem is számíthatók. A sok ismert módszer közül csupán egyet adunk meg. A DI és a FI esetet külön tárgyaljuk.

Diszkrét idejű rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

A diszkrét idejű rendszer vizsgálandó rendszeregyenlete $y^{(i)}[k] = y[k-i]$ jelöléssel

$$y + a_1 y^{(1)} + \ldots + a_n y^{(n)} = b_0\, u + b_1\, u^{(1)} + \ldots + b_m u^{(m)}. \tag{2.2-39}$$

A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, \lambda + a_n = 0. \tag{2.2-40}$$

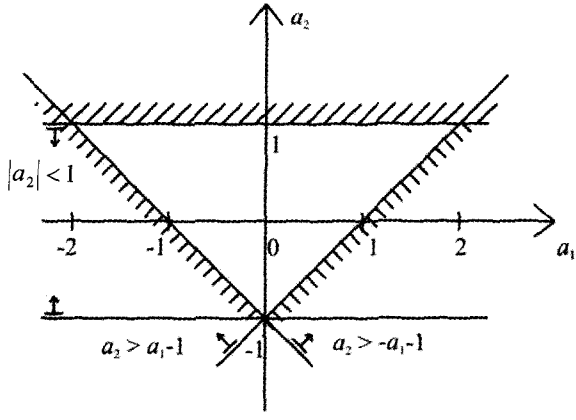
Mint láttuk: a DI rendszer biztosan GV stabilis, ha sajátértékei kielégítik a $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ feltételeket. Igazolható (*Jury*-kritérium), hogy ennek egy *szükséges* feltétele, hogy az együtthatók kielégítsék a következő egyenlőtlenségeket:

$$1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n > 0, \quad |a_n| < 1. \tag{2.2-41}$$

E három feltétel $n = 2$ esetén elegendő is

$$n = 2 \Rightarrow \; 1 + a_1 + a_2 > 0, \; 1 - a_1 + a_2 > 0, \; |a_2| < 1. \tag{2.2-42}$$

Ha $|a_1|$ és $|a_2|$ annyira kicsi, hogy $n = 2$ esetén az (a_1, a_2) pont beleesik a 4. ábra szerinti paramétersík háromszög alakú tartományába, akkor a másodrendű DI rendszer biztosan GV stabilis.



2.2-4. ábra Ha a másodrendű DI rendszeregyenlet paraméterei a háromszög belsejébe eső pontot adnak, akkor a rendszer biztosan GV stabilis.

Ha $n > 2$, akkor képezzünk az a_p együtthatókból új $(b_q, c_r, \ldots)$ együtthatókat a következő séma szerint (a Jury-eljárásnak más változatai is ismertek):

$$\begin{aligned}
&(1) \quad b_p = a_0\, a_p - a_n a_{n-p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad a_0 \equiv 1; \\
&(2) \quad c_p = b_0\, b_p - b_{n-1}\, b_{n-1-p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, n-2; \\
&\vdots \\
&(n-2) \quad g_p = f_0\, f_p - f_2\, f_{2-p}, \quad p = 0, 1.
\end{aligned} \tag{2.2-43}$$

A karakterisztikus polinom nullahelyei akkor és csakis akkor esnek az egységsugarú kör belsejébe, ha a (41) feltételek mellett teljesül a következő $n-2$ feltétel is (összesen tehát $n+1$ feltételt kell kielégíteni)

$$|a_0|>|a_n|,\quad |b_0|>|b_{n-1}|,\ldots,\ |g_0|>|g_1|. \tag{2.2-44}$$

Az állítások hosszadalmas igazolását nem közöljük. Az Olvasóra bízzuk annak belátását, hogy a (44) alapján a GV stabilitás elegendő feltételei $n=3$ esetén

$$n=3 \Rightarrow 1+a_1+a_2+a_3>0,\ 1-a_1+a_2-a_3>0,\ 1>|a_3|,\ |1-a_3^2|>|a_2-a_1a_3|. \tag{2.2-45}$$

Ha bármelyik egyenlőtlenség nincs kielégítve, akkor a DI rendszer többnyire nem GV stabilis.

Példa Egy másodrendű DI rendszer $a_1=2, a_2=0{,}5$ esetén nem elégíti ki a stabilitás elegendő feltételeit. Bővítsük a rendszeregyenletet egy $a_3y^{(3)}$ taggal úgy, hogy a rendszer biztosan GV stabilis legyen.

Az a_3 együtthatóra vonatkozó feltételek (45) értelmében

$$a_3>-3{,}5,\quad a_3>-0{,}5,\quad -1<a_3<1,\quad (1-a_3^2)>0{,}5-2a_3.$$

Ebből következik, hogy a $-0{,}58<a_3<-0{,}5$ feltételt kielégítő bármely a_3 megfelelő. Az $a_3=0$ (másodrendű rendszer) nem megfelelő választás. #

Folytonos idejű rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

A folytonos idejű rendszer vizsgálandó rendszeregyenlete

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\ldots+b_nu. \tag{2.2-46}$$

Itt $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ válasz i-edik deriváltja. A rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

$$F(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0. \tag{2.2-47}$$

Mint láttuk: a FI rendszer biztosan GV stabilis, ha sajátértékei kielégítik a $\mathcal{R}e\{\lambda_i\}<0$; $i=1,2,\ldots,n$ feltételeket. Ebben az esetben $F(\lambda)$ egy *Hurwitz-polinom.* Ennek egy *szükséges* feltétele, hogy a karakterisztikus egyenlet minden együtthatója *pozitív* legyen:

$$a_i>0,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{2.2-48}$$

Ezek a feltételek $n=1$ és $n=2$ esetén *elegendőek* is:

$$n=2:\quad a_1>0,\ a_2>0; \tag{2.2-49}$$

ami azt jelenti, hogy az (a_1. a_2) pont a paramétersík első **negyedébe esik** (az Olvasóra bízzuk a 4. ábrának megfelelő tartomány kijelölését).

Ha $n=3$ és $n=4$, akkor három feltételt kell kielégíteni:

$$n=3:\quad a_1>0,\ a_2>0,\quad a_1a_2-a_3>0; \tag{2.2-50}$$

$$n=4:\quad a_1>0,\ a_2>0,\quad a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_3^2>0. \tag{2.2-51}$$

Általános esetre a sokféle eljárás közül *Routh* feltételrendszerét adjuk meg.

Képezzünk az a_p együtthatókból új $(b_q, c_r, \ldots)$ együtthatókat a következő séma szerint ($a_0 = 1$ és páros N esetén $a_{N+1} = 0$ helyettesítendő):

$$
\begin{array}{lll}
a_0 \;\; a_2 \;\; a_4 \;\; a_6 \;\; \ldots & & \\
\underline{a_1 \;\; a_3 \;\; a_5 \;\; a_7 \;\; \ldots} & & \\
b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; b_4 \;\; \ldots & b_1 = a_2 - \dfrac{a_0 a_3}{a_1}, b_2 = a_4 - \dfrac{a_0 a_5}{a_1}, \ldots & \\
c_1 \;\; c_2 \;\; c_3 \;\; c_4 \;\; \ldots & c_1 = a_3 - \dfrac{a_1 b_2}{b_1}, c_2 = a_5 - \dfrac{a_1 b_3}{b_1}, \ldots & \\
d_1 \;\; d_2 \;\; d_3 \;\; d_4 \;\; \ldots & d_1 = b_2 - \dfrac{b_1 c_2}{c_1}, \; d_2 = b_3 - \dfrac{b_1 c_3}{c_1}, \ldots & \\
\vdots & & \\
g_1 \;\; 0 & g_1 = e_2 - \dfrac{e_1 f_2}{f_1} &
\end{array}
\tag{2.2-52}
$$

A $b_p, c_r, \ldots$ számok az előző két sorból a következő oszlopban és az aktuális oszlopban álló számokból származtathatók. A konstrukcióból következik, hogy minden új sorban eggyel kevesebb oszlop szerepel. A sorok száma $N/2$ vagy $(N-1)/2$. Az $F(\lambda)$ akkor és csakis akkor Hurwitz-polinom, azaz minden zérusának valós része negatív, ha

$$a_p > 0, \;\; p = 1, 2, \ldots, N; \;\; b_1 > 0, \; c_1 > 0, \ldots, g_1 > 0. \tag{2.2-53}$$

Ennek következtében: ha az (52) szerinti eljárásban az $a_1, b_1, \ldots$ számok valamelyike nulla, vagy negatív lenne, akkor $F(\lambda)$ nem Hurwitz-polinom, az eljárás befejezhető.

Vizsgáljuk példaként az $N = 4$ esetet. Ha a_1, a_2, a_3, a_4 pozitív, akkor

$$
\begin{array}{ll}
1 \;\; a_2 \;\; a_4 & \\
\underline{a_1 \;\; a_3 \;\; 0} & \\
a_2 - \dfrac{a_3}{a_1} \;\; a_4 & \Rightarrow a_1 a_2 - a_3 > 0 \\
a_3 - \dfrac{a_1 a_4}{a_2 - a_3 / a_1} & \Rightarrow a_3 (a_1 a_2 - a_3) - a_1^2 a_4 > 0.
\end{array}
$$

Ha a második feltétel ki van elégítve, akkor az első is teljesül, tehát az el is hagyható. Ezzel megkaptuk a már megadott (51) feltételt.

Példa Egy harmadrendű FI rendszer karakterisztikus polinomja

$$F(\lambda) = \lambda^3 + 2K\lambda^2 + 3K\lambda + 4K^2 + 8.$$

Határozzuk meg a K paraméter azon értéktartományát, amelyre a sajátértékek a bal félsíkra esnek.

Elegendő feltétel a $K > 0$ és (50) értelmében $a_1 a_2 > a_3$, vagyis

$$(2K)(3K) > 4K^2 + 8 \;\; \Rightarrow K^2 > 4,$$

tehát $K > 2$ esetén a rendszer biztosan GV stabilis. Ha $K \le 2$, akkor a rendszer elméletileg lehet GV stabilis, de ez csak az impulzusválasz ismeretében dönthető el. #

2.2-3.F. Feladatok

F-1. Legyen a rendszeregyenletben $n = 0$. GV stabilis-e ez a DI vagy FI rendszer? Milyen típusú rendszert jellemez egy ilyen rendszeregyenlet?

F-2. Tudjuk, hogy az $y(t) = C \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú FI rendszer (integrátor) nem GV stabilis. Hogyan következik ez a rendszeregyenletre vonatkozó feltételekből?

F-3. Egy stabilitási tartalék biztosítása érdekében azt kívánjuk, hogy a DI rendszert leíró rendszeregyenlet sajátértékei egy r sugarú (r<1) körön belül legyenek.

Hogyan tudjuk ellenőrizni ezt a szigorúbb GV stabilitást e szakasz eredményei alapján? Adjunk elegendő feltételt n=1 esetén az a_1 együtthatóra és n=2 esetén az a_1, a_2 együtthatókra!

F-4. Egy stabilitási tartalék biztosítása érdekében azt kívánjuk, hogy a FI rendszert leíró rendszeregyenlet sajátértékei kielégítsék a $\mathcal{R}e\,\{\lambda_i\} < \sigma < 0$ feltételt.

Hogyan tudjuk ellenőrizni ezt a szigorúbb GV stabilitást e szakasz eredményei alapján? Adjunk feltételt n=1 esetén az a_1 együtthatóra és n=2 esetén az a_1, a_2 együtthatókra! A stabilitási tartalékra ennél bonyolultabb feltételek is használatosak.

F-5. Egy DI illetve egy FI rendszer impulzusválasza

$$h[k] = \varepsilon[k]\, r^k \cos \vartheta k; \qquad h(t) = \varepsilon(t)\, \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos \omega t.$$

Mit tud a rendszeregyenlet sajátértékeiről állítani? Hogyan módosul a válasz, ha az $\varepsilon[k]$ illetve az $\varepsilon(t)$ szorzótényezőt elhagyjuk?

2.2-3. M. Megoldások

M-1. A rendszerek GV stabilisak. A DI rendszer FIR típusú, a FI rendszer egy erősítő (memóriamentes rendszer).

M-2. A rendszeregyenlet $y^{(1)} = C\,u$. Az egyetlen sajátérték $\lambda = 0$, amely nem a bal félsíkon (hanem annak határán) fekszik. A rendszer a GV stabilitás határhelyzetében van.

M-3. Ellenőrizzünk egy új karakterisztikus polinomot: $F(r\,\xi)$. Ennek együtthatói $a_i' = a_i / r^i$. Ha $n = 1$, akkor az elegendő feltétel $|a_1| < r$, ami $\lambda = -a_1$ miatt nyilvánvaló. Ha $n = 2$, akkor a feltételek a (42) értelmében

$$r^2 + r\,a_1 + a_2 > 0, \quad r^2 - r\,a_1 + a_2 > 0, \quad r^2 - |a_2| > 0.$$

Ezek egy háromszög alakú tartományt adnak az (a_1, a_2) paramétersíkon, amely a 4. ábra háromszögén belül helyezkedik el.

M-4. Ellenőrizzünk egy új karakterisztikus polinomot: $F(\xi+\sigma)$. Ennek a_i' együtthatói az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ együtthatóktól és a σ paramétertől függnek. Ha $n=1$, akkor $a_1' = a_1 + \sigma$, tehát a stabilitás feltétele $a_1 > -\sigma$, ami $\lambda = -a_1$ miatt nyilvánvaló. Ha $n=2$, akkor $a_1' = a_1 + 2\sigma$, $a_2' = a_2 + \sigma a_1 + \sigma^2$, a feltételek $a_1 > -2\sigma$, $a_2 > -\sigma a_1 - \sigma^2$. A határvonalak az (a_1, a_2) síkon egymást metsző egyenesek, az elegendő feltételt kielégítő pontok természetesen az (a_1, a_2) paramétersík első negyedébe esnek.

M-5. A rendszeregyenletnek $r\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\vartheta}$ illetve $-\alpha \pm \mathrm{j}\omega$ egy komplex sajátérték-párja. Lehetnek további sajátértékei is. Ha az impulzusválasz nem belépő, akkor a rendszer nem kauzális, rendszeregyenlete nem lehet az előzőekben tárgyalt alakú.

2.3. Az állapotváltozós leírás

Amint az előző fejezetben láttuk, a rendszeregyenlet a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának egy tömör implicit formája. A rendszeregyenlet megoldására nem adható algoritmus, így például körülményes számítógépes programot készíteni a válasz szabad és gerjesztett összetevőre bontásán alapuló módszerre. A DI rendszeregyenlet numerikusan megoldható a lépésről lépésre módszerrel.

Mint a 2.2. fejezet bevezetőjében már említettük, célszerű a rendszer leírására új változókat, az állapotváltozókat bevezetni. Ez a tárgya ennek a fejezetnek, amelyben lineáris, invariáns, kauzális rendszerekre szorítkozunk.

A 2.5. fejezetben látni fogjuk, hogy az állapotváltozós leírás lényegesen könnyebben általánosítható nemlineáris vagy variáns rendszerekre, mint a rendszeregyenlettel történő leírás. Nemlineáris rendszerek nem írhatók le az impulzusválasszal, amelynek alkalmazása lineáris, variáns rendszerre sem egyszerű. A 3. és 4. részben tárgyalandó frekvenciatartománybeli vagy komplex frekvenciatartománybeli leírás általánosítása nemlineáris vagy variáns rendszerekre gyakorlatilag nem is lehetséges.

A 2.3-1. szakaszban értelmezzük az állapotváltozókat, megadjuk a rendszer állapotváltozós leírásának normálalakját, megmutatjuk a rendszer állapotváltozós leírásainak és rendszeregyenletének kapcsolatait.

A 2.3-2. és a 2.3-3. szakaszban egy-egy módszert adunk a diszkrét idejű, illetve a folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírásának megoldására.

A 2.3-4. szakaszban értelmezzük a rendszer aszimptotikus stabilitását, továbbá kritériumokat adunk ennek eldöntésére.

2.3-1. Alapfogalmak és alapegyenletek

2.3-1.1. Az állapotváltozó fogalma

Új változók bevezetésével megadhatjuk a rendszer gerjesztés-válasz kapcsolatának egy implicit alakját, amelynek megoldására több módszer is létezik.

Az előzőek általánosításaként most megengedjük, hogy a rendszernek tetszőleges számú gerjesztése és válasza legyen, mivel ez nem okoz fogalmi nehézséget és egyszerűsíti a jelölést. Egyes esetekben külön megadjuk az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszerre vonatkozó speciális alakot is.

Egy diszkrét idejű illetve egy folytonos idejű rendszer $x_i = x_i[k]$ illetve $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ *állapotváltozói* olyan változók, amelyek a következő két tulajdonsággal rendelkeznek. Ismerve a rendszer viselkedését leíró egyenleteket és a gerjesztéseket, meg tudjuk határozni az $x_1[k_a], x_2[k_a], \ldots, x_N[k_a]$ illetve az $x_1(t_a), x_2(t_a), \ldots, x_N(t_a)$ értékek ismeretében

(1) valamennyi x_i állapotváltozók értékét bármely $k_b > k_a$ illetve $t_b > t_a$ időpontra;

(2) valamennyi y_i válasz értékét a k_a illetve t_a időpontban.

Az $x_1[k_a], x_2[k_a],\ldots, x_N[k_a]$ illetve az $x_1(t_a), x_2(t_a),\ldots, x_N(t_a)$ értékek összességét a rendszernek a $k=k_a$ illetve a $t=t_a$ időpontbeli *állapotának* nevezik.

Az N szám a rendszer állapotváltozós leírásának *rendszáma*. Ez rendszerint megegyezik a rendszer rendszeregyenletének n rendszámával (lásd a 2.3-1.4. pontot). Előnyös, ha a rendszám minél kisebb.

Egy fizikai *objektum* állapotváltozóiként többnyire olyan fizikai változók választhatók, amelyek egy tárolt mennyiséget vagy annak változási sebességét jelentik. Ilyenek például a tömeg vagy a tömegáram, az elektromos töltés vagy áram, raktározott árú mennyisége vagy napi változás, és így tovább. Az állapotváltozó négyzete gyakran a tárolt energiával kapcsolatos. Ilyenek például egy test sebessége vagy mozgásmennyisége, egy rugó ereje vagy megnyúlása, egy kondenzátor töltése vagy feszültsége. A 2.4. fejezetben látni fogjuk, hogy egy *jelfolyam hálózatával* reprezentált rendszer állapotváltozóinak választhatók a DI késleltetők illetve a FI integrátorok kimeneti változói. Néha más választások célszerűek (például az említett változók alkalmas lineárkombinációja), mint ezt a megoldási módszerek során látni fogjuk.

Az itt követett általános tárgyalás során az állapotváltozókat segédváltozóknak tekintjük és nem foglalkozunk jelentésükkel.

2.3-1.2. Diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása

Egy diszkrét idejű, kauzális rendszer állapotváltozós leírása kifejezi az állapotváltozók $k+1$ ütembeli és a válaszokat a k ütembeli értékét az állapotváltozók és a gerjesztések k ütembeli érékével. Lineáris rendszer esetén ezek a kifejezések lineárisak. A rendszert leíró egyenletek ennek megfelelően

$$x_p[k+1]=\sum_{q=1}^{N} A_{pq}x_q[k]+\sum_{q=1}^{N_u} B_{pq}u_q[k], \quad p=1,2,\ldots,N\ ; \tag{2.3-1}$$

$$y_p[k]=\sum_{q=1}^{N} C_{pq}x_q[k]+\sum_{q=1}^{N_u} D_{pq}u_q[k], \quad p=1,2,\ldots,N_y\ ; \tag{2.3-2}$$

ahol N az állapotváltozók, N_u a gerjesztések, N_y a válaszok száma.

Ha ismerjük az állapotváltozós leírást (vagyis az A_{pq}, B_{pq}, C_{pq}, D_{pq} együtthatókat), az állapotváltozókat és a gerjesztéseket a k_a időpontban, akkor behelyettesítéssel meg tudjuk határozni a válaszokat a k_a időpontban, továbbá az állapotváltozókat a k_a+1 időpontban, majd a k_a+2 és így tovább időpontokban - amint azt az állapotváltozók definíciója megköveteli.

Ha a rendszer nem invariáns, akkor az (1) és (2) alakok továbbra is érvényesek, de az A_{pq}, B_{pq}, C_{pq}, D_{pq} együtthatók a k diszkrét idő ismert függvényei.

Tömörebb alak előállítása érdekében vezessünk be vektorokat és mátrixokat:

$$\mathbf{x}[k]=\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_N[k] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix}.$$

Értelem szerinti a többi vektor és mátrix értelmezése is. Az **x, u** és **y** állapot- gerjesztés- és válasz-vektor dimenziója rendre N, N_u és N_y. Az ***A, B, C*** és ***D*** mátrixok dimenziója ennek megfelelően rendre $N\times N$, $N\times N_u$, $N_y\times N$ és $N_y\times N_u$.

Alkalmazzuk továbbá az $\mathbf{x}'[k] = \mathbf{x}[k+1]$ eddig is használt jelölést, akkor a következő tömör alakhoz jutunk.

Egy diszkrét idejű, lineáris, invariáns, kauzális rendszer *állapotváltozós leírása*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \boldsymbol{A}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \boldsymbol{C}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{D}\,\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{2.3-3}$$

Az első sor az *állapotegyenlet*, a második sor a válaszvektor állapotváltozós alakja.

Az $\mathbf{x}$ az *állapotvektor*, a kvadratikus $\boldsymbol{A}$ mátrix neve *rendszermátrix*.

Pontosabban szólva (3) az állapotváltozós leírás *normálalakja*. A továbbiakban csak a normálalakot nevezzük állapotváltozós leírásnak.

Ha a rendszernek csak egyetlen gerjesztése és egyetlen válasza van, akkor a $\boldsymbol{B}$ mátrixnak csak egyetlen oszlopa van, vagyis egy $\mathbf{B}$ vektor; a $\boldsymbol{C}$ mátrixnak csak egyetlen sora van vagyis egy $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ sorvektor (egy $\mathbf{C}$ oszlopvektor transzponáltja), a $\boldsymbol{D}$ mátrixnak csak egy sora és egy oszlopa van, vagyis egy D skalár. Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer állapotváltozós leírása ezek szerint

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\,u, \\ y &= \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x} + D\,u. \end{aligned} \tag{2.3-4}$$

Rendszerint a $k \in \mathbf{N}$ ütemekre akarjuk a válaszokat meghatározni. Ehhez ismernünk kell az $\mathbf{x}[0]$ *kezdeti állapotot*, azaz az $x_1[0], x_2[0], \ldots, x_N[0]$ kezdeti értékeket. Ha minden gerjesztés a $k = 0$ helyen *belépő*, akkor $\mathbf{u}[-1] = \mathbf{0}$. A kauzalitás következtében $\mathbf{x}[-1] = \mathbf{0}$. Ezeket és a $k = -1$ ütemet a (3)-ba helyettesítve kapjuk, hogy

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{0},\ k \in \mathbf{Z}_{-} \ \Rightarrow\ \mathbf{x}[0] = \mathbf{0}. \tag{2.3-5}$$

Ha $k = 0$ előtt a gerjesztés *állandó*, azaz ha $\mathbf{u}[k] = \mathbf{u}^{-}, k \in \mathbf{Z}_{-}$ és a rendszer aszimptotikusan stabilis (2.3-4. szakasz), akkor ott az állapotvektor is állandó, tehát $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}^{-}, k \in \mathbf{Z}_{-}$. Az állapotegyenletbe helyettesítve $\mathbf{x}^{-} = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}^{-} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}^{-}$. Ebből $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}^{-}$ kifejezhető (alább $\boldsymbol{I}$ az N-dimenziós egységmátrix)

$$\mathbf{u}[k] = \mathbf{u}^{-}, k \in \mathbf{Z}_{-} \ \Rightarrow\ \mathbf{x}[0] = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}^{-}. \tag{2.3-6}$$

Ha a gerjesztés (a gerjesztések egyike) szakaszonként adott, mint például

$$u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-k_1])\,f_1[k] + \varepsilon[k-k_1]\,f_2[k], \tag{2.3-7}$$

akkor az eljárás a következő. Először megoldjuk az állapotegyenletet a $0 \le k < k_1$ intervallumban, ahol a gerjesztés $f_1[k]$, a kezdeti érték $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Ez az $\mathbf{x}[k]$ a k_1 helyen is érvényes, hiszen az $\mathbf{x}[k_1 - 1]$ és $\mathbf{u}[k_1 - 1]$ által meghatározott. Ez lesz az $\mathbf{x}[k_1]$ a kezdeti érték a $k_1 \le k < \infty$ intervallumban. Hasonlóan járunk el több intervallum esetén.

A diszkrét idejű rendszeregyenlet numerikusan megoldható *lépésről lépésre*. Ehhez helyettesítsük $k = 0, 1, 2, \ldots$ értékét a (3) egyenletekbe

$$\mathbf{y}[k] = \boldsymbol{C}\,\mathbf{x}[k] + \boldsymbol{D}\mathbf{u}[k], \qquad \mathbf{x}[k+1] = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[k] + \boldsymbol{B}\mathbf{u}[k].$$

A következő összefüggések adódnak:

$$\begin{array}{lll} k=0; & \mathbf{y}[0]=\boldsymbol{C}\,\mathbf{x}[0]+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[0], & \mathbf{x}[1]=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[0]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[0], \\ k=1; & \mathbf{y}[1]=\boldsymbol{C}\,\mathbf{x}[1]+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[1], & \mathbf{x}[2]=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[1]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[1], \\ k=2; & \mathbf{y}[2]=\boldsymbol{C}\,\mathbf{x}[2]+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[2], & \mathbf{x}[3]=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[2]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[2], \\ \vdots & & \end{array} \tag{2.3-8}$$

Minden lépésnél csak ismert vagy előzetesen már meghatározott értékek szerepelnek. Minden k értéknél N_y+N helyettesítési értéket kell számítanunk. Ha $N_y=1$, akkor ez $N+1$ számú helyettesítési értéket jelent. Emlékeztetőül: ha a választ konvolúcióval számítjuk, akkor a k-adik ütemben $k+1$ helyettesítési értéket, a rendszeregyenlet megoldásakor minden ütemben $n+m$ helyettesítési értéket kell számítanunk.

Az eljárás nagyon egyszerű, jól programozható. Az eredmény alapján azonban gyakran nehéz képet kapni a rendszer viselkedésének általános jellegzetességeiről.

Az eljárás variáns rendszer esetén is alkalmazható, amikor a mátrixok elemei a diszkrét idő ismert függvényei.

Példa Legyen egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -0{,}24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+u.$$

A gerjesztés belépő, majd exponenciálisan csökkenő:

$$u[k]=\varepsilon[k](0{,}5)^k.$$

A (8) séma és $x_1[0]=x_2[0]=0$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$y[0]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+1=1{,}00, \qquad \begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -0{,}24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix}1=\begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix};$$

$$y[1]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix}+0{,}5=2{,}00, \quad \begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -0{,}24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix}0{,}5=\begin{bmatrix} -0{,}48 \\ 2{,}01 \end{bmatrix};$$

$$y[2]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}48 \\ 2{,}01 \end{bmatrix}+0{,}25=2{,}26, \ldots$$

Később be fogjuk látni, hogy a válasz nullához tart. A lépésről lépésre módszer alkalmazásával ennek belátásához még sok lépésre van szükség. #

2.3-1.3. Folytonos idejű rendszerek állapotváltozós leírása

A folytonos idejű, kauzális, differenciális rendszer állapotváltozós leírása kifejezi az állapotváltozók első deriváltját („sebességét") és a válaszokat bármely t időpontban az állapot-változóknak és a gerjesztéseknek ugyanezen t időpontbeli értékeivel. Lineáris rendszer esetén ezek a kifejezések lineárisak, invariáns esetben az együtthatók az időtől függetlenek. A rendszert leíró egyenletek ennek megfelelően

$$x_p'(t)=\sum_{q=1}^{N} A_{pq}\,x_q(t)+\sum_{q=1}^{N_u} B_{pq}\,u_q(t), \quad p=1,2,\ldots,N_y; \tag{2.3-9}$$

$$y_p(t)=\sum_{q=1}^{N} C_{pq}\,x_q(t)+\sum_{q=1}^{N_u} D_{pq}\,u_q(t), \quad p=1,2,\ldots,N_y, \tag{2.3-10}$$

ahol N az állapotváltozók, N_u a gerjesztések, N_y a válaszok száma. Nem differenciális rendszerek állapotváltozós leírása másféle tagokat is tartalmazhat mint például $x_q(t-T)$. Ilyen rendszereket ebben a részben nem tárgyalunk. A nem differenciális rendszereket a frekvencia- vagy a komplex frekvenciatartományban célszerű leírni.

Ha ismerjük az állapotváltozós leírást (vagyis az A_{pq}, B_{pq}, C_{pq}, D_{pq} együtthatókat), az állapotváltozókat és a gerjesztéseket a t_a időpontban, akkor meg tudjuk határozni az állapotváltozók $x'_p(t_a)$ deriváltját a t_a időpontban. Ennek ismeretében közelítőleg kifejezhető $x_p(t_a + \mathrm{d}t) \approx x_p(t_a) + x'_p(t_a)\mathrm{d}t$, éspedig annál kisebb hibával, minél kisebb $\mathrm{d}t$ értéket választunk. Ez lehetővé teszi minden $x_p(t_b)$ számítását bármely t_b időpontban. Valamennyi $x_p(t_a)$ ismeretében számíthatók a válaszok is a t_a időpontban. A megadott leírás ezek szerint eleget tesz az állapotváltozókkal szemben támasztott két követelménynek.

Ha a rendszer variáns, akkor (9) és (10) érvényes marad, de ekkor az együtthatók a *t idő ismert függvényei.*

Az előző pontban látotthoz hasonló módon tömörebb alakhoz jutunk vektorok és mátrixok bevezetésével.

Egy folytonos idejű, lineáris, invariáns, differenciális, kauzális rendszer *állapotváltozós leírása*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \boldsymbol{A}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \boldsymbol{C}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{D}\,\mathbf{u}. \end{aligned} \tag{2.3-11}$$

Az első sor az *állapotegyenlet*, a második sor a válaszvektor állapotváltozós alakja.

Az $\mathbf{x}$ az *állapotvektor*, a kvadratikus $\boldsymbol{A}$ neve *rendszermátrix.*

Pontosabban szólva: a (11) az állapotváltozós leírás *normálalakja.* A továbbiakban csak a normálalakot nevezzük állapotváltozós leírásnak.

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer állapotváltozós leírása (4) mintájára

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \boldsymbol{A}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\,u, \\ y &= \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x} + D\,u. \end{aligned} \tag{2.3-12}$$

Az esetek többségében a választ a t pozitív értékeire akarjuk meghatározni. Ehhez ismernünk kell az $\mathbf{x}(+0)$ *kezdeti állapotot,* amelyhez viszont először meg kell határoznunk az $\mathbf{x}(-0)$ *kiindulási állapotot* (2.3-2. 4. pont). Ha minden gerjesztés *belépő,* akkor minden $x_1(-0), x_2(-0), \ldots, x_N(-0)$ érték nulla:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0},\ t \in \mathbf{R}_- \ \Rightarrow\ \mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}. \tag{2.3-13}$$

Ha a $t = 0$ időpont előtt a gerjesztés állandó, azaz ha $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^-$, $t \in \mathbf{R}_-$ és a rendszer aszimptotikusan stabilis (2.3-4. szakasz), akkor $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^-, \mathbf{x}'(t) = \mathbf{0}, t \in \mathbf{R}_-$ és az állapotegyenletből következik, hogy

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0},\ t \in \mathbf{R}_- \ \Rightarrow\ \mathbf{x}(-0) = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}^- \ . \tag{2.3-14}$$

Ha a gerjesztés szakaszonként adott, mint például

$$u(t) = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_1)]\, f_1(t) + \varepsilon(t - t_1)\, f_2(t), \tag{2.3-15}$$

akkor az eljárás a következő. Először megoldjuk az állapotegyenletet a $0 < t < t_1$ intervallumban. Ennek megoldása adja azt az $\mathbf{x}(t_1 - 0)$ értéket, amely a $t_1 < t < \infty$ intervallumra a kiindulási érték. Értelem szerinti az általánosítás több intervallumra.

A folytonos idejű állapotegyenlet megoldására nincs olyan elemi módszer, mint a DI lépésről lépésre eljárás. Közelítő módszereket a 2.3-3.8. és a 2.5-2.5. pontban fogunk tárgyalni.

A FI rendszer állapotváltozós leírását lényegesen könnyebb kezelni, mint a rendszeregyenletét. Az állapotváltozós leírásban csak a gerjesztések és a válaszok maguk, valamint az állapotváltozók első deriváltja szerepel. Ha a gerjesztések korlátosak véges időre (például nem tartalmazzák a Dirac-impulzust), akkor minden $x'_p(t)$ véges, minden $x_p(t)$ függvény folytonos (még a $t = 0$ időpontban is). Ha a gerjesztés Dirac-impulzust is tartalmaz (például az impulzusválasz számításakor), akkor a $t = 0$ helyen $x'_p(t)$ nem véges, az $x_p(t)$ jelek a $t = 0$ hely kivételével folytonos függvények. Ez lényeges egyszerűsítést jelent a rendszeregyenlethez képest, amelynél a gerjesztés és a válasz magasabb rendű deriváltjai is fellépnek, aminek kellemetlen következményei vannak, ha a gerjesztés nem folytonos és különösen, ha még Dirac-impulzust is tartalmaz.

A DI esetben a kétféle leírás közötti különbség nem annyira alapvető. Egy DI jel eltolása egy vagy több ütemmel egyszerű, mindig elvégezhető művelet.

A 2.3-3. szakaszban látni fogjuk, hogy a válasz számítása az állapotváltozós leírás megoldásával egyszerűbb mint a rendszeregyenlet megoldásával, az eljárás jól algoritmizálható mind a DI, mind a FI esetben.

*2.3-1.4. Új állapotváltozók bevezetése

Tekintsük adottnak akár a DI, akár az FI rendszer állapotváltozós leírásának formálisan közös

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u},\ \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{D}\mathbf{u}$$

normálalakját. Az N számú x_i állapotváltozó helyett bevezethetünk ugyancsak N számú $\hat{x}_i$ új állapotváltozót egy kvadratikus, N-dimenziós, nemszinguláris (azaz invertálható), egyébként tetszőleges $\boldsymbol{T}$ mátrixszal $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{T}\mathbf{x}$ alakban. Mivel $\mathbf{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}}$, ezért az állapotegyenletet $\boldsymbol{T}$–vel balról szorozva

$$(\hat{\mathbf{x}})' = (\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1})\hat{\mathbf{x}} + (\boldsymbol{T}\boldsymbol{B})\mathbf{u},\quad \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{D}\mathbf{u}.$$

adódik. Ezek szerint a rendszer egy másik állapotváltozós leírásának állapotvektora és együttható-mátrixai

$$\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{T}\mathbf{x} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1},\ \hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B},\ \hat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1},\ \hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}. \tag{2.3-16}$$

Ebből következik, hogy egy rendszer állapotváltozói sokféleképpen megválaszthatók. Az objektum alapján értelmezett x_i állapotváltozóknak rendszerint van fizikai jelentésük, az $\hat{x}_i$ új állapotváltozóknak rendszerint nincs.

A $\boldsymbol{T}$ transzfromációs mátrix alkalmas megválasztásával az állapotváltozós leírás a megoldás vagy a realizálás szempontjából előnyös alakra hozható. Egy fontos esetet a 2.3-3.7. pontban tárgyalunk.

*2.3-1.5. Az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet kapcsolatai

Eddig két implicit alakot tárgyaltunk az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer implicit gerjesztés-válasz kapcsolatára. Az egyik a *rendszeregyenlet*:

$$\begin{aligned} &\text{DI:} \quad y[k]+\sum_{i=1}^{N} a_i y^{(i)}[k]=\sum_{i=0}^{N} b_i u^{(i)}[k], \\ &\text{FI:} \quad y^{(N)}(t)+\sum_{i=0}^{N-1} a_{N-i} y^{(i)}(t)=\sum_{i=0}^{N} b_{N-i} u^{(i)}(t). \end{aligned} \tag{2.3-17}$$

Itt a DI esetben $N=\max(m,n)$, a FI esetben $N=n$. A másik implicit alak az *állapotváltozós leírás:*

$$\begin{aligned} &\text{DI:} \quad \mathbf{x}'[k]=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[k]+\mathbf{B}\,u[k], \qquad y[k]=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}[k]+D\,u[k]; \\ &\text{FI:} \quad \mathbf{x}'(t)=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\,u(t), \qquad y(t)=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t)+D\,u(t). \end{aligned} \tag{2.3-18}$$

Itt $\mathbf{x}$ az N-dimenziós állapotvektor.

Célunk az egyik leírás ismeretében a másik előállítása.

Az állapotváltozós leírás előállítása a rendszeregyenletből

Tekintsük adottnak a rendszer (17) rendszeregyenletét. Célunk a rendszer egy (18) szerinti állapotváltozós leírásának előállítása.

A rendszeregyenletet $2N+1$ számú a_i, b_i együttható jellemzi. Az állapotváltozós leírás jellemzői az $\boldsymbol{A}$ rendszermátrix (N^2 adat), a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ vektor ($N+N$ adat) és a D skalár (1 adat), összesen $N^2+2N+1=(N+1)^2$ számú adat. Ebből már következik, hogy egy rendszeregyenlethez sok (sőt végtelenül sok) állapotváltozós leírás tartozik.

Itt a két, igen egyszerű szerkezetű *Frobenius*-alakot adjuk meg, amelyek DI és FI rendszerekre egyaránt érvényesek. Az első Fronenius-alak mátrixai

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} b_N-b_0a_N & b_{N-1}-b_0a_{N-1} & \dots & b_1-b_0a_1 \end{bmatrix}, \quad D_1=b_0. \tag{2.3-19}$$

A második Frobenius-alak mátrixai az elsőből transzponálással adódnak:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{B}_2=\mathbf{C}_1, \\ &\mathbf{C}_2=\mathbf{B}_1, \quad D_2=D_1. \end{aligned} \tag{2.3-20}$$

Az első Frobenius-alak előnye, hogy az állapotegyenlet egyszerűbb (a gerjesztés csak x_N' kifejezésében szerepel). A második Frobenius-alak előnye, hogy a válasz kifejezéséhez csak az x_N állapotváltozó ismerete szükséges.

A második Frobenius-alak igazolása

Diszkrét idejű esetben a második Frobenius-alak igazolásához vezessük be a következő állapotváltozókat:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -a_N y^{(1)} + b_N u^{(1)},\\
x_2 &= -a_N y^{(2)} - a_{N-1} y^{(1)} + b_N u^{(2)} + b_{N-1} u^{(1)},\\
&\vdots\\
x_N &= -a_N y^{(N)} - \ldots - a_1 y^{(1)} + b_N u^{(N)} + \ldots + b_1 u^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Összevetve az utolsó egyenletet a DI rendszeregyenlettel, látható, hogy $y = x_N + b_0 u$, ezért a (20)-ban C^T és D kifejezése helyes. Fejezzük ki az $x_i[k+1] \equiv x_i'[k]$ változókat és vegyük figyelembe $y[k]$ kifejezését, akkor kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
x_1' &= -a_N y + b_N u = -a_N x_N + (b_N - b_0 a_N) u,\\
x_2' &= -a_N y^{(1)} - a_{N-1} y + b_N u^{(1)} + b_{N-1} u = x_1 - a_{N-1} x_N + (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) u,\\
&\vdots\\
x_N' &= -a_N y^{(N-1)} - \ldots - a_1 y + b_N u^{(N-1)} + \ldots + b_1 u = x_{N-1} - a_1 x_N + (b_1 - b_0 a_1) u.
\end{aligned}
$$

Ebből látható, hogy a DI esetben az $\boldsymbol{A}$ és $\mathbf{B}$ kifejezése (20)-ban helyes.

Folytonos idejű esetben a második Frobenius-alak alak igazolásához vezessük be a következő új állapotváltozókat:

$$
\begin{aligned}
x_N &= y - b_0 u,\\
x_{N-1} &= y^{(1)} + a_1 y - b_0 u^{(1)} - b_1 u,\\
&\vdots\\
x_1 &= y^{(N-1)} + a_1 y^{(N-2)} + \ldots + a_{N-1} y - b_0 u^{(N-1)} - \ldots - b_{N-1} u.
\end{aligned}
$$

Az x_N definíciójából következik, hogy $y = x_N + b_0 u$, vagyis (20)-ban a $\mathbf{C}^T$ és D kifejezése helyes. Fejezzük ki az x_i' változókat figyelembe véve a rendszeregyenletet és y kifejezését is:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= y^{(N)} + a_1 y^{(N-1)} + \ldots + a_{N-1} y^{(1)} - b_0 u^{(N)} - \ldots - b_{N-1} u^{(1)} =\\
&= -a_N y + b_N u = -a_N x_N + (b_N - b_0 a_N) u,\\
x_2' &= y^{(N-1)} + a_1 y^{(N-2)} + \ldots + a_{N-2} y^{(1)} - b_0 u^{(N-1)} - \ldots - b_{N-2} u^{(1)} =\\
&= x_1 - a_{N-1} y + b_{N-1} u = x_1 - a_{N-1} x_N + (b_{N-1} - b_0 a_{N-1}) u,
\end{aligned}
$$

és így tovább. Ez megfelel az állapotegyenlet (20) szerinti alakjának.

A (19) szerinti első Frobenius-alak igazolása DI vagy FI esetben valamivel körülményesebb. Ezt a 4.2-1.3. pontra halasztjuk, ahol a komplex frekvenciatartománybeli leírást fogjuk felhasználni. Azzal a (20) alak igazolása is jóval egyszerűbb, mint az előzőleg bemutatott volt.

A rendszeregyenlet előállítása az állapotváltozós leírásból

Tekintsük ismertnek a rendszer (18) állapotváltozós leírását, célunk ebből a rendszer (17) rendszeregyenletének előállítása.

A DI esetben fejezzük ki az $y[k]$ választ, majd ebből $y[k+1]$, $y[k+2]$,..., $y[k+N]$ kifejezését. Az állapotegyenlet felhasználásával $\mathbf{x}[k+1]$ kifejezhető $\mathbf{x}[k]$ segítségével. Például

$$y[k+1]=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}[k+1]+D\,u[k+1]=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\{\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[k]+\mathbf{B}\,u[k]\}+D\,u[k+1].$$

Az eljárás eredménye a következő lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
&y[k]=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}[k]+D\,u[k],\\
&y[k+1]=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[k]+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}\,u[k]+D\,u[k+1],\\
&\vdots\\
&y[k+N]=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{N}\mathbf{x}[k]+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{N-1}\mathbf{B}\,\mathbf{u}[k]+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{N-2}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}[k+1]+\\
&\qquad+\ldots+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}[k+N-2]+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}[k+N-1]+D\,u[k+N].
\end{aligned}\tag{2.3-21}$$

Az egyenletrendszerben szereplő ismeretlenek $x_i[k], i=1,2,\ldots,N$ és $y[k+N]$, míg $y[k], y[k+1],\ldots,y[k+N-1]$ ismertnek tekintendő. Az $y[k+N]$ kifejezése

$$\begin{aligned}
y[k+N]=&\,b_0\,u[k+N]+b_1\,u[k+N-1]+\ldots+b_N\,u[k]-\\
&-a_1\,y[k+N-1]-a_2\,y[k+N-2]-\ldots-a_N\,y[k]
\end{aligned}\tag{2.3-22}$$

alakú lesz. Helyettesítsünk k helyére k–N változót, akkor megkaptuk a rendszeregyenlet (17) alakját. A (22) alak bizonyos szempontból logikusabb a (17) alaknál, de az utóbbi az elterjedtebb.

Az eljárás analóg a FI esetben is, csak ekkor az $y(t)$ deriváltjait számítjuk és kifejezzük az $\mathbf{x}'(t)$ deriváltat az állapotegyenletből. A lineáris egyenletrendszer ekkor a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
&y(t)=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}(t)+D\,u(t),\\
&y^{(1)}(t)=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{B}\,u(t)+D\,u^{(1)}(t),\\
&\vdots\\
&y^{(N)}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{N}\mathbf{x}(t)+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{N-1}\mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{N-2}\mathbf{B}\,\mathbf{u}^{(1)}(t)+\\
&\qquad+\ldots+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}^{(N-2)}(t)+\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\,\mathbf{u}^{(N-1)}(t)+D\,u^{(N)}(t).
\end{aligned}\tag{2.3-23}$$

Az egyenletrendszert megoldva az $y^{(N)}(t)$ változóra, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
y^{(N)}(t)=&\,b_N u(t)+b_{N-1}\,u^{(1)}(t)+\ldots+b_0\,u^{(N)}(t)-\\
&-a_N\,y(t)+a_{N-1}y^{(1)}(t)-\ldots-a_1\,y^{(N-1)}(t).
\end{aligned}\tag{2.3-24}$$

Ez éppen a (17) szerinti rendszeregyenlet.

A 4. részben más módszert is be fogunk mutatni a rendszeregyenletnek az állapotváltozós leírásból történő előállítására. Ott a közvetlen cél a rendszer átviteli függvényének az állapotváltozós leírásból történő előállítása lesz, de előbbiből a rendszeregyenlet már közvetlenül adódik.

2.3-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a 2.3-1.2. pont példájában tárgyalt DI rendszer válaszát a $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ütemekre, ha a gerjesztés $u[k] = (\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3])(0{,}5)^k$

F-2. Határozza meg az állapotváltozók értékét az előző feladatban a $k = 2$ ütemre, amely után a gerjesztés azonosan nulla. Ezek tekinthetők kezdeti értéknek a $k = 3$ ütemtől gerjesztetlen rendszer vizsgálatához.

***F-3.** Határozza meg annak a DI rendszernek az állapotváltozós leírását, amelynek rendszeregyenlete $y - y^{(1)} + 0{,}24y^{(2)} = u + 0{,}5u^{(1)} - 0{,}2u^{(3)}$.

***F-4.** Határozza meg annak a DI rendszernek a rendszeregyenletét, ha az állapotváltozós leírása az előző feladat eredménye.

***F-5.** Mi a feltétele annak, hogy az A rendszermátrix első sora, illetve első oszlopa nulla legyen a (19), illetve a (20) szerinti leírásban? Külön kell vizsgálni a DI és FI esetet!

2.3-1.M. Megoldások

M-1. A $k = 0$, 1 és 2 ütemekre ugyanaz, mint a példában, $y[3] = 1{,}905$ és $y[4] = 1{,}3626$.

M-2. A példa eredményét felhasználva $x_1[2] = -0{,}48$, $x_2[2] = 2{,}01$.

***M-3.** Esetünkben $n = 2$, $m = 3$ és $N = 3$ következik. A (19) szerinti Frobenius-alak

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}24 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -0{,}2 & -0{,}24 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u.$$

A(20) szerinti Frobenius-alak ebből transzponálással adódik.

***M-4.** A (21) lineáris egyenletrendszer az $y^{(-i)}[k] \equiv y[k+i]$ jelölés alkalmazásával a következő:

$$y = -0{,}2\,x_1 - 0{,}24\,x_2 + 1{,}5\,x_3 + u,$$
$$y^{(-1)} = -0{,}2\,x_2 - 0{,}24\,x_3 + 1{,}5\left(-0{,}24\,x_2 + x_3 + u\right) + u^{(-1)} = -0{,}56\,x_2 + 1{,}26\,x_3 + 1{,}5\,u + u^{(-1)},$$
$$y^{(-2)} = -0{,}56\,x_3 + 1{,}26\left(-0{,}24\,x_2 + x_3 + u\right) + 1{,}5u^{(-1)} + u^{(-2)},$$
$$y^{(-3)} = -0{,}3024\,x_3 + 0{,}70\left(-0{,}24x_2 + x_3 + u\right) + 1{,}26\,u^{(-1)} + 1{,}5\,u^{(-2)} + u^{(-3)}.$$

Az x_1 ismeretlen csak az első egyenletben szerepel, amely el is hagyható. Ennek következtében $y[k+3]$ kifejezésében y nem fog szerepelni, vagyis a rendszeregyenlet nem tartalmaz $y[k-3]$ típusú tagot. Természetesen visszakapjuk az F-3. feladatban megadott rendszeregyenletet.

***M-5.** Az első sor vagy oszlop nulla a DI esetben: ha $m > n$ (F-4. feladat), a FI esetben: ha $y(t)$ nem szerepel a rendszeregyenlet differenciális alakjában, csak a deriváltjai.

2.3-2. Az állapotváltozós leírás megoldása összetevőkre bontással

2.3-2.1. Általános megfontolások

Az előző szakaszban megfogalmaztuk a lineáris, invariáns, kauzális (FI esetben: differenciális) rendszer állapotváltozós leírását. Az állapotegyenlet normálalakja

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad \mathbf{x}[k+1] = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[k] + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[k]\,; \\ &\text{FI}: \quad \mathbf{x}'(t) = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t)\,. \end{aligned} \tag{2.3-25}$$

Ha ennek megoldásaként az $\mathbf{x}[k]$, illetve az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor időfüggése már ismert, akkor az $\mathbf{y}[k]$, illetve az $\mathbf{y}(t)$ válaszvektor számítása már csak behelyettesítést igényel:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad \mathbf{y}[k] = \boldsymbol{C}\mathbf{x}[k] + \boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[k]; \\ &\text{FI}: \quad \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{D}\,\mathbf{u}(t). \end{aligned} \tag{2.3-26}$$

Ebben és a következő szakaszban egy-egy módszert mutatunk be a DI, illetve a FI *állapotegyenlet* megoldására a $k \in \mathbf{N}$, illetve a $t \in \mathbf{R}_+$ intervallumban. Ismertnek tekintjük egyrészt a gerjesztéseket ugyanitt, másrészt a DI állapotvektor $\mathbf{x}[-1]$, illetve a FI állapotvektor $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási értékét. Bekapcsolási folyamat estén (amikor $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ a k, illetve a t negatív értékeire) a kiindulási állapot nulla.

Mint már láttuk (2.3-1.2. pont) a DI állapotváltozós leírás megoldható a lépésről lépésre módszerrel. Később látni fogjuk, hogy a FI állapotváltozós leírás is megoldható a $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots$ időponttokbeli $\mathbf{x}(t_k)$ és $\mathbf{y}(t_k)$ értékek közelítő számításával (2.5-2.5. pont). Most azonban az a célunk, hogy formulát találjunk az állapotvektor és a válaszvektor időfüggvényére. Ez lehetővé teszi az aszimptotikus viselkedés vizsgálatát, továbbá tetszőleges időpontban felvett érték számítását.

Ebben a szakaszban azt mutatjuk meg, hogy miként állítható elő az állapotvektor egy $\mathbf{x}_\mathrm{f}$ szabad összetevő és egy $\mathbf{x}_\mathrm{g}$ gerjesztett összetevő összegeként:

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad \mathbf{x}[k] = \mathbf{x}_\mathrm{f}[k] + \mathbf{x}_\mathrm{g}[k]; \\ &\text{FI}: \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\mathrm{f}(t) + \mathbf{x}_\mathrm{g}(t). \end{aligned} \tag{2.3-27}$$

Ez a módszer csak egyszerű függvénnyel leírható gerjesztés esetén kényelmes. A gyakorlatban előforduló feladatok jelentékeny része szerencsére ilyen. A módszer analóg a rendszeregyenlet megoldásánál leírttal (2.2-2. szakasz), de a továbbiakban nem feltételezzük az ott leírtak ismeretét, ami ezáltal némi ismétlésre vezet.

A következő szakaszban egy mátrixfüggvényeket alkalmazó módszert tárgyalunk, amely nem csak akkor használható, ha a gerjesztést egyszerű függvény írja le.

Mindkét eljárást alkalmazhatjuk úgy is, hogy az állapotváltozós leírás ismeretében először meghatározzuk a rendszer impulzusválaszát. Ennek birtokában a tetszőleges gerjesztéshez tartozó válasz DI, illetve FI konvolúcióval számítható (2.1. fejezet). Az impulzusválasz számítását ezért mindkét módszernél külön részletezzük.

Az összetevőkre bontás módszere és a mátrixfüggvényes módszer bármelyike alkalmazható a másik ismerete nélkül.

2.3-2.2. A szabad összetevő számítása

Az állapotvektor $\mathbf{x}_f$ *szabad összetevője* (más néven gerjesztetlen összetevője, természetes összetevője) a gerjesztetlen rendszer ($u = 0$) állapotváltozóját jelenti, vagyis az állapotegyenlet homogén megfelelőjének, a

$$\text{DI}: \ \mathbf{x}_f[k+1] = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}_f[k]; \qquad \text{FI}: \ \mathbf{x}_f'(t) = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}_f(t)$$

differenciaegyenletnek illetve differenciálegyenletnek az általános megoldását. Keressünk ezt exponenciális függvény alakjában:

$$\text{DI}: \ \mathbf{x}_f[k] = \mathbf{m}\,\lambda^k\,; \quad \text{FI}: \ \mathbf{x}_f(t) = \mathbf{m}\,\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{2.3-28}$$

ahol λ a meghatározandó ismeretlen, az $\mathbf{m}$ vektor (az egyenlet homogén jellege miatt) egy állandó szorzó erejéig határozatlan. Az állapotegyenlet homogén megfelelőjébe helyettesítve

$$\text{DI}: \ \mathbf{m}\,\lambda^{k+1} = \boldsymbol{A}\,\mathbf{m}\,\lambda^k\,; \quad \text{FI}: \ \mathbf{m}\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} = \boldsymbol{A}\,\mathbf{m}\,\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

A biztosan nem nulla exponenciális tényezővel egyszerűsítve, a DI és az FI esetben egyaránt az

$$\boldsymbol{A}\,\mathbf{m} = \lambda\,\mathbf{m}$$

lineáris algebrai egyenlet adódik. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{m}$ egy olyan vektor, amelyet az $\boldsymbol{A}$ mátrixszal kifejezett lineáris transzformáció λ-szorosára nyújt, de nem forgat el. (Ez a megfogalmazás csak addig szemléletes, amíg λ és $\mathbf{m}$ minden rendezője valós értékű.) Minden ilyen λ az $\boldsymbol{A}$ mátrix egy *sajátértéke*, a hozzátartozó $\mathbf{m}$ az $\boldsymbol{A}$ egy *sajátvektora*. A rájuk vonatkozó egyenlet nullára redukált alakja

$$(\lambda\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\mathbf{m} = \mathbf{0}, \tag{2.3-29}$$

ahol $\boldsymbol{I}$ az N-dimenziós egységmátrix (minden főátlós eleme 1, minden más eleme 0). E homogén lineáris egyenletrendszernek csak akkor van a triviálistól ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$) különböző megoldása, ha az együttható mátrix nem szinguláris, vagyis ha a mátrix determinánsa nulla:

$$D(\lambda) \equiv \det(\lambda\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0\,. \tag{2.3-30}$$

Ez az $\boldsymbol{A}$ mátrix *karakterisztikus egyenlete, amely egy* N-edfokú algebrai egyenlet. Például $N = 2$ esetén:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}\,A_{22} - A_{12}\,A_{21}\,.$$

A $D(\lambda)$ az $\boldsymbol{A}$ mátrix *karakterisztikus polinomja*, amelynek általános alakja

$$D(\lambda) = \lambda^N + d_1\,\lambda^{N-1} + d_2\,\lambda^{N-2} + \ldots + d_{N-1}\,\lambda + d_N\,. \tag{2.3-31}$$

Ismeretes, hogy egy N-edfokú egyenletnek pontosan N számú gyöke van:

$$D(\lambda) = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\,. \tag{2.3-32}$$

Mivel az egyenlet d_p együtthatói valósak, ezért a λ_i gyökei – vagyis a keresett sajátértékek – vagy valósak vagy konjugált komplex párokat alkotnak. Szorítkozzunk

egyelőre arra az esetre, amikor a karakterisztikus egyenlet minden gyöke egymástól különböző, vagyis amikor minden λ_i sajátérték *egyszeres*:

$$\lambda_p \neq \lambda_q\,, \quad p \neq q\,. \tag{2.3-33}$$

Az általánosabb esetre a 2.3-2.5. pontban még visszatérünk. Zárjuk ki továbbá azt az esetet, amikor a DI esetben nulla egy sajátérték (lásd az 5. példát).

A λ_i sajátértékhez tartozó $\mathbf{m}_i$ *sajátvektor* a (29) homogén lineáris egyenletrendszer egy megoldása. Ennek előállításához az N számú egyenlet egyikét elhagyjuk és $\mathbf{m}_i$ egyik rendezőjét ismertnek tekintjük. Például az N-edik egyenletet elhagyva és $(\mathbf{m}_i)_N = 1$ választással a következő lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - A_{11} & -A_{12} & \dots & -A_{1(N-1)} \\ -A_{21} & \lambda_i - A_{22} & \dots & -A_{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_{(N-1)1} & -A_{(N-1)2} & \dots & \lambda_i - A_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i,1} \\ m_{i,2} \\ \vdots \\ m_{i,(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1N} \\ A_{2N} \\ \vdots \\ A_{(N-1),N} \end{bmatrix}; \; i = 1,2,\dots,N. \tag{2.3-34}$$

Ha ez az egyenletrendszer nem megoldható, akkor az $\mathbf{m}_i$ egy másik rendezőjét választjuk egységnyinek. Konjugált komplex λ_i, λ_i^* sajátérték-párhoz konjugált komplex $\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i^*$ sajátvektor-pár tartozik.

A számítógépes programcsomagok közvetlenül szolgáltatják a kvadratikus $\boldsymbol{A}$ mátrix összes sajátértéket és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat. Utóbbiak rendszerint úgy vannak normálva, hogy abszolút értékük egységnyi.

Az egyszeres sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátvektorok mindegyike egy $\mathbf{m}_i\,\lambda_i^k$ illetve $\mathbf{m}_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ alakú szabad összetevőt jelent. Az állapotegyenlet linearitása miatt ezek lineárkombinációja is megoldás, azaz

$$\text{DI}: \; \mathbf{x}_\mathrm{f}[k] = \sum_{i=1}^{N} K_i \mathbf{m}_i \lambda_i^k \;; \qquad \text{FI}: \; \mathbf{x}_\mathrm{f}(t) = \sum_{i=1}^{N} K_i \mathbf{m}_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}\,. \tag{2.3-35}$$

A K_i együtthatók tetszőlegesek. Igazolható, hogy ez a szabad összetevő *általános* alakja, vagyis az állapotegyenlet homogén megfelelőjének más alakú megoldása nincs. Az N számú K_i együttható meghatározására később kerül sor. A λ_i^k, illetve az $\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ az $\boldsymbol{A}$ mátrix *sajátfüggvénye* DI illetve FI esetben.

1. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = -0{,}24\,x_2 - 0{,}24\,u\,, \qquad x_2' = x_1 + x_2 + 1{,}50\,u\,; \qquad y = x_2 + u\,.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k](0{,}5)^k$.

A rendszermátrix, ennek karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \; \det[\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0{,}24 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \equiv \lambda^{2,} - \lambda + 0{,}24 = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = 0{,}6, \;\; \lambda_2 = 0{,}4\,.$$

A sajátvektorok meghatározására szolgáló egyenlet

$$\lambda_i\, m_{i,1} + 0{,}24\, m_{i,2} = 0 \quad \text{vagy} \quad -1\, m_{i.1} + (\lambda_i - 1)\, m_{i,2} = 0\,.$$

Ezek szerint $m_{i,1}=(-0{,}24/\lambda_i)m_{i,2}$ vagy $m_{i,1}=(\lambda_i-1)m_{i,2}$. Ebből $m_{i,2}=1$ választással bármelyik egyenlet alapján $m_{1,1}=-0{,}4$, $m_{2,1}=-0{,}6$. A két sajátvektor tehát például

$$\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}-0{,}4\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}-0{,}6\\1\end{bmatrix}.$$

Számítógéppel valószínűleg $\mathbf{m}_1=[-0{,}371\quad 0{,}928]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{m}_2=[-0{,}514\quad 0{,}857]^{\mathrm{T}}$ adódik. Az állapotvektor szabad összetevőjének általános alakja ezek szerint

$$x_{f,1}[k]=K_1(-0{,}4)(0{,}6)^k+K_2(-0{,}6)(0{,}4)^k,\quad x_{f,2}[k]=K_1(0{,}6)^k+K_2(0{,}4)^k.$$

A K_1, K_2 együtthatók egyelőre ismeretlenek, ezeket a későbbiekben fogjuk számítani. #

2. példa Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1'=x_2,\quad x_2'=-3x_1-4x_2+u;\quad y=x_1+5x_2.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u(t)=\varepsilon(t)$.

A rendszermátrix és karakterisztikus egyenlete továbbá a karakterisztikus egyenlet megoldásaiként adódó sajátértékek

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-3&-4\end{bmatrix};\ \det[\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}\lambda&-1\\3&\lambda+4\end{bmatrix}\equiv\lambda^2+4\lambda+3=0\ \Rightarrow\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-3.$$

A sajátvektorok meghatározására vonatkozó egyenlet

$$\lambda_i\,m_{i,1}-m_{i,2}=0\quad\text{vagy}\quad 3m_{i,1}+(\lambda_i+4)m_{i,2}=0.$$

Bármelyik egyenletből $m_{i,2}=1$ választással $m_{1,1}=-1$, $m_{2,1}=-1/3$ vagy célszerűbbem

$$\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{m}_2=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}.$$

Az állapotváltozók szabad összetevőjének általános alakja ezek szerint

$$x_{f,1}(t)=-K_1\,\mathrm{e}^{-t}-K_2\mathrm{e}^{-3t},\quad x_{f,2}(t)=K_1\mathrm{e}^{-t}+3K_2\,\mathrm{e}^{-3t}.$$

A K_1, K_2 együtthatók egyelőre ismeretlenek, ezeket a későbbiekben fogjuk számítani. #

2.3-2.3. A gerjesztett összetevő számítása

Az állapotvektor $\mathbf{x}_g[k]$ illetve $\mathbf{x}_g(t)$ *gerjesztett összetevője* az $\mathbf{x}'=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}$ DI illetve FI állapotegyenlet egy megoldása (az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása). Ennek tehát nem kell kielégítenie valamilyen kezdeti feltételt.

A gerjesztett összetevő számítására nem adható általános módszer. Ez az összetevőkre bontás módszerének egy hátránya. Ha azonban a gerjesztés a $k=0$, illetve a $t=0$ időpont után egyszerű függvénnyel leírható (állandó, exponenciális, szinuszos, polinomiális, ezek összege vagy szorzata), akkor az állapotváltozók gerjesztett összetevőjét hasonló függvény alakjában keressük ismeretlen együtthatókkal. Ez az un. próbafüggvény módszer. A próbafüggvényben szereplő ismeretlen együtthatók meghatározásához behelyettesítjük a próbafüggvényt az állapotegyenletbe, felírjuk a

különböző típusú függvények együtthatóinak egyenlőségét, majd megoldjuk az így adódó lineáris egyenletrendszert.

A továbbiakban egyetlen gerjesztés vizsgálatára szorítkozunk. Több gerjesztés hatása a szuperpozíció elve alapján vehető figyelembe.

Tekintsük először azt az egyszerű esetet, amikor a gerjesztés a $k = 0$, illetve a $t = 0$ időpont után állandó:

$$\text{DI}: u[k] = U; \quad \text{FI}: u(t) = U. \tag{2.3-36}$$

Ekkor az állapotvektor gerjesztett összetevőjét is állandó vektorként keressük:

$$\text{DI}: \mathbf{x}_g[k] = \mathbf{X}; \quad \text{FI}: \mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X}. \tag{2.3-37}$$

Mivel $\mathbf{x}_g[k+1] = \mathbf{X}$ illetve $\mathbf{x}_g'(t) = \mathbf{0}$, ezért az állapotegyenlet értelmében

$$\text{DI}: \mathbf{X} = \boldsymbol{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U; \quad \text{FI}: \mathbf{0} = \boldsymbol{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U. \tag{2.3-38}$$

E lineáris egyenletrendszer megoldása adja az $\mathbf{X}$ vektort. Mátrixos alakban

$$\text{DI}: \mathbf{X} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{B}U; \quad \text{FI}: \mathbf{X} = -\boldsymbol{A}^{-1}\mathbf{B}U. \tag{2.3-39}$$

Ha az $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ illetve az $\boldsymbol{A}$ mátrix szinguláris, akkor a lineáris egyenletrendszer nem megoldható. Ez akkor áll elő, amikor DI esetben $\lambda = 1$ egy sajátérték, így $\lambda^k = 1$ egy sajátfüggvény, illetve FI esetben $\lambda = 0$ egy sajátérték, így $e^{\lambda t} = 1$ egy sajátfüggvény, vagyis amikor a gerjesztés éppen megegyezik a rendszermátrix egy sajátfüggvényével. Erre az esetre a 2.3-2.6. pontban visszatérünk.

Tekintsük most azt az esetet, amikor a gerjesztés a $k = 0$, illetve a $t = 0$ időpont után exponenciális függvénnyel leírható (és nem egyezik meg egyik sajátfüggvénnyel sem):

$$\text{DI}: u[k] = Ua^k; \quad \text{FI}: u(t) = Ue^{\alpha t}. \tag{2.3-40}$$

Itt a illetve α komplex értékű is lehet. Az állapotvektor gerjesztett összetevőjét ekkor

$$\text{DI}: \mathbf{x}_g[k] = \mathbf{X}a^k, a \neq \lambda_i; \quad \text{FI}: \mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X}e^{\alpha t}, \ \alpha \neq \lambda_i \tag{2.3-41}$$

alakban keressük. Az állapotegyenletbe helyettesítve

$$\text{DI}: \mathbf{X}a^{k+1} = \boldsymbol{A}\mathbf{X}a^k + \mathbf{B}Ua^k; \quad \text{FI}: \mathbf{X}\alpha e^{\alpha t} = \boldsymbol{A}\mathbf{X}e^{\alpha t} + \mathbf{B}Ue^{\alpha t}$$

adódik. Az exponenciális függvénnyel egyszerűsítve

$$\text{DI}: \mathbf{X} = [a\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\mathbf{B}U; \quad \text{FI}: \mathbf{X} = [\alpha\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\mathbf{B}U \tag{2.3-42}$$

adódik a keresett $\mathbf{X}$ együttható-vektorra. A sajátértékek definíciójából következik, hogy az invertálandó mátrixok nem szingulárisak. Az általánosabb esetre (amikor a illetve α egy sajátérték) később visszatérünk.

Hasonló az eljárás más, egyszerű függvénnyel leírható gerjesztés esetén is (vö. 2.3-2.3. pont). Ha például a gerjesztés

$$\text{DI}: u[k] = Uk^p a^k; \quad \text{FI}: u[k] = Ut^p e^{\alpha t}; \ p \in \mathbf{N} \tag{2.3-43}$$

alakú (és $a \neq \lambda_i$ illetve $\alpha \neq \lambda_i$), akkor a próbafüggvény

$$\text{DI}: \mathbf{x}_g[k] = (\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 k + \ldots + \mathbf{X}_p k^p)a^k; \quad \text{FI}: \mathbf{x}[k] = (\mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1 t + \ldots + \mathbf{X}_p t^p)e^{\alpha t}, \tag{2.3-44}$$

vagyis egy p-edfokú teljes polinom és az exponenciális függvény szorzata. A p+1 számú ismeretlen $\mathbf{X}_m$ vektorra a hatványfüggvények együtthatóinak egyezésének feltételei alapján p+1 számú lineáris vektoregyenletet kapunk. Megjegyezzük, hogy az

$$\mathrm{DI}:\mathbf{x}_{\mathrm{g}}[k]=\mathbf{X}_p k^p a^k;\ \mathrm{FI}:\mathbf{x}[k]=\mathbf{X}_p t^p \mathrm{e}^{at},$$

próbafüggvény nem vezet eredményre, amiről az Olvasó már $p=1$ esetén is meggyőződhet.

Az adott gerjesztéshez tartozó gerjesztett összetevő elvileg nem egyértelműen meghatározott. Rendszerint a legegyszerűbb alakot választjuk, de a választás a végeredményt nem befolyásolja.

1. példa Az előző pont 1. példájában megadott DI rendszer gerjesztése $u[k]=\varepsilon[k](0{,}5)^k$. Az állapotváltozók gerjesztett összetevőjének próbafüggvénye

$$x_{\mathrm{g},1}[k]=X_1\,(0{,}5)^k,\quad x_{\mathrm{g},2}[k]=X_2\,(0{,}5)^k.$$

A próbafüggvényeket az állapotegyenletbe helyettesítve

$$X_1\,(0{,}5)^{k+1}=-0{,}24\,(0{,}5)^k-0{,}24\,(0{,}5)^k,$$
$$X_2\,(0{,}5)^{k+1}=X_1\,(0{,}5)^k+X_2\,(0{,}5)^k+1{,}5\,(0{,}5)^k.$$

Az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left.\begin{aligned}0{,}5\,X_1+0{,}24\,X_2&=-0{,}24,\\ -X_1-0{,}5\,X_2&=1{,}5;\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}X_1=24,\\ X_2=-51.\end{cases}$$

Esetünkben az exponenciális függvénnyel leírt gerjesztés nem egyezett meg a $(0{,}6)^k$ és $(0{,}4)^k$ sajátfüggvények egyikével sem. #

2. példa Az előző pont 2. példájában megadott FI rendszer gerjesztése $u(t)=\varepsilon(t)$. Az állapotváltozók gerjesztett összetevőjét $x_{\mathrm{g},1}(t)=X_1$, $x_{\mathrm{g},2}(t)=X_2$ alakban keressük. Az állapotegyenletbe helyettesítve és figyelembe véve, hogy az állandó deriváltja nulla

$$X_2=0,\quad 3\,X_1+4\,X_2=1\ \Rightarrow\ X_1=\frac{1}{3},\quad X_2=0$$

adódik az állapotváltozók gerjesztett összetevőjére. #

2.3-2.4. A kezdeti feltételek érvényesítése

Az állapotvektor általános alakját a szabad összetevőjének általános alakja $(\mathbf{x}_{\mathrm{f}})$ és gerjesztett összetevőjének $(\mathbf{x}_{\mathrm{g}})$ az összege adja. A szabad összetevő N számú határozatlan együtthatót tartalmaz, ezeket (35)-ben $K_1, K_2, \ldots, K_N$ jelöli. A határozatlan együtthatókat az ugyancsak N számú adatot jelentő $\mathbf{x}[0]$, illetve $\mathbf{x}(+0)$ kezdeti állapot ismeretében határozhatjuk meg.

Tekintsük ismertnek az állapotvektor értékét közvetlenül a $k=0$, illetve a $t=0$ időpont előtt, vagyis az állapotvektor $\mathbf{x}[-1]$, illetve $\mathbf{x}(-0)$ *kiindulási értékét*. Amint erről

a 2.3-2.1. pontban már volt szó: ezeket a rendszer múltbeli viselkedése alapján kell meghatároznunk. A legegyszerűbb esetben *bekapcsolási folyamatról* van szó, amikor a gerjesztés a $k=0$, illetve a $t=0$ időpont előtt azonosan nulla. A rendszer kauzalitása miatt ekkor az állapotvektor is nulla a k, illetve a t negatív értékeire, így speciálisan $\mathbf{x}[-1]=\mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0)=\mathbf{0}$ a kiindulási állapot. Az általánosság érdekében azonban a továbbiakban az $\mathbf{x}[-1]$ illetve az $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási állapotot nem tekintjük nullának.

Az $\mathbf{x}[0]$, illetve az $\mathbf{x}(+0)$ *kezdeti állapot* az állapotegyenlet ismeretében a kiindulási állapotból számítható $k=-1$ helyettesítéssel, illetve t szerinti integrálással:

$$\text{DI}: \mathbf{x}[0]=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[-1]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[-1]; \quad \text{FI}: \mathbf{x}(+0)-\mathbf{x}(-0)=\int_{-0}^{+0}\{\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t)\}\,\mathrm{d}t.$$

Mivel $\mathbf{x}(t)$ korlátos a $t=0$ helyen, ezért integrálja nulla, így

$$\text{DI}: \mathbf{x}[0]=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[-1]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[-1]; \quad \text{FI}: \mathbf{x}(+0)=\mathbf{x}(-0)+\boldsymbol{B}\int_{-0}^{+0}\mathbf{u}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.3-45}$$

Látható, hogy bekapcsolási folyamat esetén, továbbá ha $\mathbf{u}(t)$ véges a $t=0$ helyen (ami alól gyakorlatilag csak a Dirac-impulzus a kivétel), akkor a kezdeti állapot kifejezése az $\mathbf{x}[0]=\mathbf{0}$, illetve az $\mathbf{x}(+0)=\mathbf{0}$ alakra egyszerűsödik.

Helyettesítsünk az $\mathbf{x}=\mathbf{x}_\mathrm{f}+\mathbf{x}_\mathrm{g}$ alakba $k=0$, illetve $t=0$ értéket. Ekkor

$$\text{DI}: \mathbf{x}_\mathrm{f}[0]=\mathbf{x}[0]-\mathbf{x}_\mathrm{g}[0]; \quad \text{FI}: \mathbf{x}_\mathrm{f}(+0)=\mathbf{x}(+0)-\mathbf{x}_\mathrm{g}(+0) \tag{2.3-46}$$

adódik. Ez éppen N számú lineáris egyenletet jelent az $\mathbf{x}_\mathrm{f}$ szabad összetevőben szereplő N számú ismeretlen együtthatóra. Egyszeres sajátértékek esetén a (35) felhasználásával és $k=0$ illetve $t=0$ helyettesítéssel

$$\text{DI}: \sum_{i=0}^{N}K_i\mathbf{m}_i=\mathbf{x}[0]-\mathbf{x}_\mathrm{g}[0]; \quad \text{FI}: \sum_{i=0}^{N}K_i\mathbf{m}_i=\mathbf{x}(+0)-\mathbf{x}_\mathrm{g}(+0). \tag{2.3-47}$$

Ez az összefüggés még tovább formalizálható (például számítógépes kiértékelésre áttekinthetőbbé tehető), ha bevezetjük az együtthatókból alkotott $\mathbf{K}$ vektort és az $\mathbf{m}_i$ sajátvektorokból alkotott $\boldsymbol{M}$ *modális mátrixot*:

$$\mathbf{K}=[K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_N]^\mathrm{T}, \quad \boldsymbol{M}=[\mathbf{m}_1 \quad \mathbf{m}_2 \quad \dots \quad \mathbf{m}_N]. \tag{2.3-48}$$

Az ismeretlen együtthatók kifejezése ezzel

$$\text{DI}: \mathbf{K}=\boldsymbol{M}^{-1}\{\mathbf{x}[0]-\mathbf{x}_\mathrm{g}[0]\}; \quad \text{FI}: \mathbf{K}=\boldsymbol{M}^{-1}\{\mathbf{x}(+0)-\mathbf{x}_\mathrm{g}(+0)\}. \tag{2.3-49}$$

Az együtthatók behelyettesítésével megkapjuk az állapotvektornak a kezdeti feltételeket is kielégítő $\mathbf{x}=\mathbf{x}_\mathrm{f}+\mathbf{x}_\mathrm{g}$ konkrét alakját. (Szigorúan véve $\mathbf{x}_\mathrm{f}$ általános és konkrét alakját meg kellene különböztetni.) Ennek ismeretében előállítható a válasz:

$$\text{DI}: \mathbf{y}[k]=\boldsymbol{C}\,\mathbf{x}[k]+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[k]; \quad \text{FI}: \mathbf{y}(t)=\boldsymbol{C}\mathbf{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}(t). \tag{2.3-50}$$

Az impulzusválasz számítását a következő pontban részletezzük.

1. példa Az előző pontban vizsgált DI rendszer állapotváltozóinak általános alakja

$$x_1[k] = -0{,}4\,K_1\,(0{,}6)^k - 0{,}6\,K_2\,(0{,}4)^k + 24\,(0{,}5)^k,$$
$$x_2[k] = K_1\,(0{,}6)^k + K_2\,(0{,}4)^k - 51\,(0{,}5)^k\,.$$

Mivel bekapcsolási folyamatot vizsgálunk, ezért a kezdeti állapot $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Az ismeretlen együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left.\begin{aligned} 0{,}4\,K_1 + 0{,}6\,K_2 &= 24\,, \\ K_1 + K_2 &= 51\,; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} K_1 &= 33\,, \\ K_2 &= 18\,. \end{aligned}\right.$$

A válasz $y[k] = x_2[k] + u[k]$ kifejezésébe helyettesítve és annak belépő jellegét is kifejezve

$$y[k] = \varepsilon[k]\left\{33\,(0{,}6)^k + 18\,(0{,}4)^k - 50\,(0{,}5)^k\right\}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy ez a $k = 0$, 1 és 2 helyen ugyanazt az értéket adja, mint amit a 2.3-1. 2. pont példájában a lépésről lépésre módszerrel számítottunk. #

2. példa Az előző pontban vizsgált FI rendszer állapotváltozóinak általános alakja

$$x_1(t) = -K_1\,\mathrm{e}^{-t} - K_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{3},$$
$$x_2(t) = K_1\,\mathrm{e}^{-t} + 3\,K_2\,\mathrm{e}^{-3t} + 0\,.$$

Mivel bekapcsolási folyamatot vizsgálunk és az $u(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztés a $t = 0$ helyen véges, ezért a kezdeti állapot $x(+0) = 0$. Az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left.\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 1/3\,, \\ K_1 + 3\,K_2 &= 0\,; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} K_1 &= 1/2, \\ K_2 &= -1/6\,. \end{aligned}\right.$$

A válasz $y = x_1 + 5\,x_2$ kifejezésébe helyettesítve és annak belépő jellegét is kifejezve

$$y(t) = \varepsilon(t)\left\{2\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{7}{3}\,\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{3}\right\}$$

adódik. Ez a vizsgált FI rendszer ugrásválasza. #

3. példa Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = -3\,x_1 + 4\,x_2 + 13\,u\,,$$
$$x_2' = -x_1 - 3\,x_2\,;$$
$$y = 3\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,u\,.$$

Határozzuk meg ennek a rendszernek a válaszát, ha gerjesztése

$$u(t) = 4\,\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - 0{,}1)\} + 2\,\varepsilon(t - 0{,}1).$$

Az állapotmátrix karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\begin{vmatrix} \lambda + 3 & -4 \\ 1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 6\,\lambda + 13 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -3 + \mathrm{j}\,2\,,\quad \lambda_2 = -3 - \mathrm{j}\,2\,.$$

A sajátvektorok például a $\lambda_i\,m_{i,2} = -m_{i,1} - 3\,m_{i,2}$ egyenletből $m_{i,2} = 1$ választással

$$m_{1,1} = -3-(-3+\mathrm{j}\,2) = -\mathrm{j}\,2\,, \quad m_{2,1} = -3-(-3-\mathrm{j}\,2) = +\mathrm{j}\,2\,.$$

A két sajátérték és a két sajátvektor egymás konjugáltja. Az állapotvektor szabad összetevőjének általános alakja ezzel ismert, majd alább írjuk fel részletesen.

A gerjesztés intervallumonként állandó, ezért a gerjesztett összetevő is állandó mindkét intervallumban:

$$\left.\begin{aligned} 3X_1 - 4X_2 &= 13U\,, \\ X_1 + 3X_2 &= 0\,; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} X_1 &= 3U, \\ X_2 &= -U\,. \end{aligned}\right.$$

A $0 < t < t_1 = 0{,}1$ intervallumban az állapotváltozók általános alakja (itt $U = 4$)

$$x_1(t) = -\mathrm{j}\,2\,K_1\,\mathrm{e}^{-(3+\mathrm{j}2)t} + \mathrm{j}\,2\,K_1\mathrm{e}^{-(3-\mathrm{j}2)t} + 12\,,$$
$$x_2(t) = K_1\mathrm{e}^{-(3+\mathrm{j}2)t} + K_1\mathrm{e}^{-(3-\mathrm{j}2)t} - 4\,.$$

Az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ kezdeti feltétel értelmében

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{j}\,2\,K_1 - \mathrm{j}\,2\,K_2 &= 12\,, \\ K_1 + K_2 &= 4\,; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} K_1 &= 2-\mathrm{j}\,3\,, \\ K_1 &= 2+\mathrm{j}\,3\,. \end{aligned}\right.$$

A két komplex állandó K_i is egymás konjugáltja. Az állapotváltozók időfüggvénye a $0 < t < t_1 = 0{,}1$ intervallumban

$$x_1(t) = \{-6-\mathrm{j}\,4\}\mathrm{e}^{-3t}\,\{\cos 2t + \mathrm{j}\sin 2t\} + \{-6+\mathrm{j}\,4\}\mathrm{e}^{-3t}\,\{\cos 2t - \mathrm{j}\sin 2t\} + 12\,,$$
$$x_2(t) = \{2-\mathrm{j}\,3\}\mathrm{e}^{-3t}\,\{\cos 2t + \mathrm{j}\sin 2t\} + \{2+\mathrm{j}\,3\}\mathrm{e}^{-3t}\,\{\cos 2t - \mathrm{j}\sin 2t\} - 4\,.$$

Rendezés után (a képzetes értékű tagok természetesen kiesnek)

$$x_1(t) = \{-12\cos 2t + 8\sin 2t\}\mathrm{e}^{-3t} + 12\,,$$
$$x_2(t) = \{4\cos 2t + 6\sin 2t\}\mathrm{e}^{-3t} - 4\,.$$

Térjünk rá a $0{,}1 < t < \infty$ intervallum vizsgálatára. Az $\mathbf{x}(t)$ általános alakja az előzővel megegyező, csak a gerjesztett összetevő most $X_1 = 6$, $X_2 = -2$. Célszerű a t változó helyett átmenetileg a $t' = t - t_1$ változót alkalmazni:

$$x_1(t') = -\mathrm{j}\,2\,K_1\,\mathrm{e}^{(-3+\mathrm{j}2)t'} + \mathrm{j}\,2\,K_2\,\mathrm{e}^{(-3-\mathrm{j}2)t'} + 6\,,$$
$$x_2(t') = K_1\,\mathrm{e}^{(-3+\mathrm{j}2)t'} + K_2\,\mathrm{e}^{(-3-\mathrm{j}2)t'} - 2\,.$$

A $t = t_1$ (a $t' = 0$) időpontban az állapotváltozó folytonossága alapján $\mathbf{x}(t' = 0) = \mathbf{x}(t = t_1)$, ahol $\mathbf{x}(t_1)$ az előbb kapott állapotvektornak a $t_1 = 0{,}1$ időpontbeli értéke:

$$-\mathrm{j}K_1 + \mathrm{j}K_1 + 6 = (-12\cos 0{,}2 + 8\sin 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}3} + 12 \equiv 4{,}465\,,$$
$$K_1 + K_1 - 2 = (4\cos 0{,}2 + 6\sin 0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}3} - 4 \equiv -0{,}213\,.$$

A lineáris egyenletrendszer megoldásával $K_1 = 0{,}894 - \mathrm{j}\,0{,}760$ és K_2 ennek konjugáltja. Ezt az általános alakba helyettesítve az előző számítás mintájára kapjuk a $0 < t' < \infty$ intervallumra, hogy

$$x_1(t) = \{-3{,}070\cos 2t' + 3{,}574\sin 2t'\}\mathrm{e}^{-3t'} + 6\,,$$
$$x_2(t) = \{1{,}787\cos 2t' + 1{,}535\sin 2t'\}\mathrm{e}^{-3t'} - 2\,.$$

Az állapotváltozók ismeretében a keresett választ az $y = 3x_1 + 2x_2 + 4u$ összefüggés alapján kapjuk:

$$y(t)=\{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\}\,\{[-28\cos 2t+30\sin 2t]\mathrm{e}^{-3t}+44\}+$$
$$+\varepsilon(t-0{,}1)\{[-1{,}914\cos 2(t-0{,}1)+13{,}792\sin 2(t-0{,}1)]\mathrm{e}^{-3(t-0{,}1)}+22\}.$$

A válasz sem a $t=0$, sem a $t=0{,}1$ időpontban nem folytonos.

A választ célszerűbb lehet egy $\cos 2t$ és egy $\sin 2t$ függvény összege helyett egyetlen, $\cos(2t+\rho)$ alakú függvénnyel kifejezni, mint például

$$-28\cos 2t+30\sin 2t=41{,}04\cos(2t-2{,}322).$$

Az állapotváltozók felírása során is alkalmazhattuk volna ezt az alakot, de ott ez nem kényelmes, mert körülményes az összeget képezni. A konjugált komplex sajátérték-párhoz tartozó két összetevő összege számítható mint bármelyik sajátértékhez tartozó összetevő valós részének kétszerese, hiszen $z+z^*\equiv 2\,\mathcal{R}e\{z\}$ bármely z komplex számra. #

2.3-2.5. Az impulzusválasz számítása

A rendszer impulzusválaszának számítása önmagában is fontos feladat (például a rendszer GV stabilitásának eldöntésére). Célszerű lehet azonban az impulzusválasz számítása annak érdekében is, hogy elkerüljük a gerjesztett összetevő számítását és a kezdeti feltételek érvényesítését. Ez különösen akkor előnyös, amikor ha a gerjesztést nem egyszerű függvény írja le (például intervallumonként különböző függvények) vagy ha a rendszernek többféle gerjesztéshez tartozó válaszát akarjuk számítani.

Először a diszkrét idejű, azután a folytonos idejű rendszer impulzusválaszának számítását tárgyaljuk egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszerre szorítkozva.

Diszkrét idejű rendszer impulzusválasza

Az $u[k]=\delta[k]$ gerjesztéshez tartozó $y[k]=h[k]$ impulzusválasz számítása során a rendszer a $k=0$ diszkrét időponttól eltekintve gerjesztetlen, vagyis a válasz a $k\in\mathbf{Z}_+$ ütemekre megegyezik a válasz szabad összetevőjével. Egyszeres sajátértékek esetén (35) értelmében

$$\mathbf{x}[k]=\sum_{i=1}^{N}K_i\,\mathbf{m}_i\,\lambda_i^k\,.$$

Mivel $\delta[-1]=0$, ezért $\mathbf{x}[0]=\mathbf{0}$, mivel $\delta[0]=1$, ezért $\mathbf{x}[1]=\mathbf{B}$, vagyis a $P_i=K_i\lambda_i$ új ismeretlen együtthatók bevezetésével a P_i együtthatókból képzett vektor

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m}_i\,P_i=\mathbf{B} \tag{2.3-51}$$

lineáris egyenletrendszer szolgál az együtthatók meghatározására. Az $\mathbf{m}_i$ sajátvektorokból képzett $\boldsymbol{M}$ modális mátrix felhasználásával

$$\mathbf{P}=\boldsymbol{M}^{-1}\,\mathbf{B} \tag{2.3-52}$$

adja az együtthatók kifejezését. Az impulzusválaszt meghatározó állapotvektort ezek szerint

$$\mathbf{x}[k]=\varepsilon[k-1]\sum_{i=1}^{N}\mathbf{m}_i\,P_i\,\lambda_i^{k-1}$$

írja le, ahol a P_i együtthatók már ismertnek tekinthetők. Az $y=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}+D\,u$ összefüggés alapján az *impulzusválasz* kifejezése

$$h[k] = D\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\sum_{i=1}^{N} \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{m}_i P_i\,\lambda_i^{k-1}. \tag{2.3-53}$$

A P_i együtthatókat a (51) vagy (52) adja.

1. példa Határozzuk meg a 2.3-2.2. pont 1. példájában vizsgált DI rendszer impulzusválaszát!

Az említett példában végzett számításaink szerint a sajátértékek $\lambda_1 = 0{,}5$ és $\lambda_2 = 0{,}4$ a sajátvektorok $\mathbf{m}_1 = [-0{,}4 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ és $\mathbf{m}_2 = [-0{,}6 \quad 1]^{\mathrm{T}}$. A két P_i együttható meghatározására szolgáló (51) egyenletrendszer és megoldása

$$\left.\begin{aligned} -0{,}4\,P_1 - 0{,}6\,P_2 &= -0{,}24\,, \\ P_1 + P_2 &= 1{,}5\,; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} P_1 = 3{,}3\,, \\ P_2 = -1{,}8\,. \end{cases}$$

Az impulzusválasz kifejezése ezek szerint az

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{m}_1\,P_1 = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 1 \end{bmatrix} 3{,}3 = 3{,}3\,; \quad \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_2\,P_2 = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} -0{,}6 \\ 1 \end{bmatrix}(-1{,}8) = -1{,}8$$

összefüggések felhasználásával

$$h[k] = \delta[k] + \varepsilon[k-1]\left\{3{,}3\,(0{,}6)^{k-1} - 1{,}8\,(0{,}4)^{k-1}\right\}.$$

Az impulzusválasz ismeretében bármely gerjesztésre adott válasz számítása megoldható konvolúcióval. Ekkor nincs szükség a gerjesztett összetevő számítására és a kezdeti feltételek érvényesítésére. Az előző pontokban megoldott DI példa megoldása is kényelmesebb lehet ezzel a módszerrel. #

2. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}24 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\,; \quad y = [-0{,}2 \quad -0{,}24 \quad 1{,}5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u\,.$$

Határozzuk meg e rendszer impulzusválaszát!

A karakterisztikus egyenlet és megoldásai, vagyis az állapotmátrix sajátértékei

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0{,}24 & \lambda+1 \end{vmatrix} \equiv \lambda\left(\lambda^2 + \lambda + 0{,}24\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -0{,}6\,, \\ \lambda_2 = -0{,}4\,, \\ \lambda_3 = 0\,. \end{cases}$$

A $\lambda_3 = 0$ sajátérték különleges szerepet játszik, hiszen $\lambda_3^k = 0, k \in \mathbf{Z}_+$. A sajátvektorok meghatározására szolgáló egyenletrendszer és megoldása $m_{i,1} = 1$ választással (esetünkben $m_{3,3}$ nem is választható egységnyinek):

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i\,m_{i,1} - m_{i,2} &= 0\,, \\ \lambda_i\,m_{i,2} - m_{i,3} &= 0\,; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{m}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}6 \\ 0{,}36 \end{bmatrix}, \ \mathbf{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}4 \\ 0{,}16 \end{bmatrix}, \ \mathbf{m}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\lambda_3 = 0$ egyszeres sajátérték, ezért az impulzusválaszt a $k = 0$ és 1 ütemekre lépésről lépésre kell számolni és csak a $k = 2$ ütemtől kezdve írható fel sajátfüggvények összegeként:

$$\begin{bmatrix} x_1[1] \\ x_2[1] \\ x_3[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1[2] \\ x_2[2] \\ x_3[2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Az általános alak és a kezdeti (a $k = 2$ időpontra vonatkozó) feltételek

$$\left.\begin{aligned} x_1[k] &= K_1(-0{,}6)^{k-2} + K_2(-0{,}4)^{k-2}, \\ x_2[k] &= -0{,}6K_1(-0{,}6)^{k-2} - 0{,}4K_2(-0{,}4)^{k-2}, \\ x_3[k] &= 0{,}36K_1(-0{,}6)^{k-2} + 0{,}16K_2(-0{,}4)^{k-2}; \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &K_1 + K_2 = 0, \\ &-0{,}6K_1 - 0{,}4K_2 = 1, \\ &0{,}36K_1 + 0{,}16K_2 = -1. \end{aligned}\right.$$

Az egyenletrendszer látszólag túlhatározott, de bármelyik két (!) egyenletből $K_1 = -5$, K_2=5 adódik Az y kifejezésébe helyettesítve végeredményben

$$h[k] = \delta[k] + 1{,}5\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\left\{-2{,}42(0{,}6)^{k-2} + 0{,}68(0{,}4)^{k-2}\right\}$$

adódik az impulzusválaszra. #

Folytonos idejű rendszer impulzusválasza

Az $u(t) = \delta(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t) = h(t)$ impulzusválasz számítására egy kerülő út a következő. Határozzuk meg először az $u_a(t) = \varepsilon(t)$ gerjesztéshez tartozó $y_a(t) = g(t)$ ugrásválaszt; ennek ismeretében (2.1-42) értelmében a $h(t) = g'(t)$ impulzusválasz általánosított differenciálással számítható.

A FI impulzusválasz közvetlen számításához vegyük figyelembe, hogy az $u(t) = \delta(t)$ gerjesztés a $t = 0$ helytől eltekintve mindenütt nullának tekinthető, ezért az állapotvektor megegyezik a szabad összetevőjével. Egyszeres sajátértékek esetén (35) értelmében

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{N} K_i\,\mathbf{m}_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}.$$

Az $\mathbf{x}(+0)$ kezdeti állapot számításához integráljuk az állapotegyenletet $t = -0$ és $+0$ között. Mivel $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$, ezért az (45) mintájára

$$\mathbf{x}(+0) = \mathbf{B}\int_{-0}^{+0} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{B}.$$

A K_i állandók meghatározására szolgáló lineáris egyenletrendszer

$$\sum_{i=1}^{N} K_i\,\mathbf{m}_i = \mathbf{B}. \tag{2.3-54}$$

Az $\boldsymbol{M}$ modális mátrix felhasználásával ennek megoldása a K_i együtthatókbólképzett vektora:

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{M}^{-1}\mathbf{B}. \tag{2.3-55}$$

A FI impulzusválasz kifejezése $y = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + D\,u$ értelmében

$$h(t) = D\,\delta(t) + \varepsilon(t)\sum_{i=1}^{N} \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{m}_i\,K_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \tag{2.3-56}$$

ahol a K_i együtthatók az (54) vagy az (55) értelmében ismertek.

3. példa Határozzuk meg a 2.3-2.2. pont 2. példájában vizsgált FI rendszer impulzusválaszát!

Képezzük az említett példában meghatározott

$$g(t)=\varepsilon(t)\left\{2\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{3}\right\}$$

ugrásválasz általánosított deriváltját:

$$h(t)=\delta(t)\left\{2\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{3}\right\}+\varepsilon(t)\left\{-2\,\mathrm{e}^{-t}+7\,\mathrm{e}^{-3t}\right\}=\varepsilon(t)\left\{-2\,\mathrm{e}^{-t}+7\,\mathrm{e}^{-3t}\right\},$$

mivel a $t=0$ helyen $\delta(t)$ szorzója nulla.

Az impulzusválasz közvetlen számításához használjuk fel, hogy előző számításunk értelmében az A rendszermátrix sajátértékei $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-3$; sajátvektorai pedig $\mathbf{m}_1=[-1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{m}_2=[-1\ \ 3]^{\mathrm{T}}$. A K_i együtthatók meghatározására szolgáló egyenletrendszer és megoldása

$$\left.\begin{aligned}-K_1-K_2&=0,\\ K_1+3K_2&=1;\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}K_1&=-1/2,\\ K_2&=1/2.\end{aligned}\right.$$

Az impulzusválasz kifejezésében ezek szerint

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{m}_1\,K_1=[1\ \ 5]\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2,\quad \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}_2\,K_2=[1\ \ 5]\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)=7.$$

Mivel $D=0$, ezért az impulzusválaszra

$$h(t)=\delta(t)\left\{2\,\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{3}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{1}{3}\right\}+\varepsilon(t)\left\{-2\,\mathrm{e}^{-t}+7\,\mathrm{e}^{-3t}\right\}=\varepsilon(t)\left\{-2\,\mathrm{e}^{-t}+7\,\mathrm{e}^{-3t}\right\}$$

adódik, amint azt előzőleg más módon meghatároztuk. #

*2.3-2.6. Többszörös sajátértékek esete

Az eddigiekben feltételeztük, hogy az A rendszermátrix minden λ_i sajátértéke egyszeres. A gyakorlatban ez rendszerint így is van, legfeljebb a $\lambda_i=0$ jelent kivételt.

Lehet úgy érvelni, hogy mivel az állapotmátrix rendezői nem ismertek pontosan, ezért többszörös sajátértékek nem is létezhetnek. Bármelyik együtthatót vagy sajátértéket a feltételezett hibahatáron belül megváltoztathatjuk, miáltal a többszörös sajátértékek egyszeressé változtathatók (A 2.2-3.2. pontban a rendszeregyenlettel kapcsolatban erre már rámutattunk.)

Fogalmi szempontból mégis érdemes a többszörös sajátértékek esetével fogalakozni. Számítástechnikailag is előnyösebb lehet több, közeli sajátértéket egyetlen, többszörös sajátértékkel helyettesíteni.

Ha az A rendszermátrixnak többszörös sajátértéke is van, akkor a szabad összetevő általános alakja már nem állítható elő λ_i^k illetve $\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ alakú sajátfüggvények szuperpozíciójaként, hiszen ekkor ezek száma kisebb, mint N. Igazolható, hogy ha például λ_1 a DI illetve FI rendszermátrix egy r-szeres sajátértéke, akkor ehhez λ_1^k, $k\,\lambda_1^k$, $k^2\,\lambda_1^k$,..., $k^{r-1}\lambda_1^k$ illetve $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $t^2\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, ..., $t^{r-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ sajátfüggvények tartoznak

(r számú sajátfüggvény), amelyek mindegyike kielégíti a gerjesztetlen rendszer állapotegyenletét. A sajátfüggvények összes száma továbbra is N, a rendszermátrix rendszáma. A sajátfüggvények együtthatóinak kapcsolata nem fogalmazható meg egyszerűen.

*2.3-2.7. Sajátfüggvényével gerjesztett rendszer

Tekintsük most azt a speciális esetet, amikor $\lambda_i = \lambda$ az A rendszermátrix egy (valós vagy komplex értékű) egyszeres sajátértéke és a DI rendszer gerjesztése $u[k] = U\lambda^k$, illetve a FI rendszer gerjesztése $u(t) = U\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ összetevőt tartalmaz. Ha λ komplex, akkor a gerjesztésben biztosan szerepel egy $U^*(\lambda^*)^k$ illetve $U^*\mathrm{e}^{\lambda^* t}$ alakú tag is. A gerjesztett összetevőt a következő alakban keressük:

$$\begin{aligned} &\mathrm{DI}:\ u[k] = U\lambda^k \Rightarrow \mathbf{x}_g[k] = \mathbf{X}\lambda^k + \mathbf{V}k\lambda^k;\\ &\mathrm{FI}:\ u(t) = U\,\mathrm{e}^{\lambda t} \Rightarrow \mathbf{x}_g(t) = \mathbf{X}\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathbf{V}t\,\mathrm{e}^{\lambda t}. \end{aligned} \tag{2.3-57}$$

Ezt az $\mathbf{x}' = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$ állapotegyenletbe helyettesítve

$$\begin{aligned} &\mathrm{DI}:\ \mathbf{X}\lambda^{k+1} + \mathbf{V}(k+1)\lambda^{k+1} = \boldsymbol{A}\mathbf{X}\lambda^k + \boldsymbol{A}\mathbf{V}k\lambda^k + \mathbf{B}U\lambda^k;\\ &\mathrm{FI}:\ \mathbf{X}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathbf{V}(1+\lambda t\,\mathrm{e}^{\lambda t}) = \boldsymbol{A}\mathbf{X}\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \boldsymbol{A}\mathbf{V}t\,\mathrm{e}^{\lambda t} + \mathbf{B}U\,\mathrm{e}^{\lambda t}. \end{aligned}$$

A **függvények** együtthatóinak egyezéséből a DI és FI esetben egyaránt

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\mathbf{X} + \lambda\mathbf{V} = \mathbf{B}U, \quad (\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\mathbf{V} = \mathbf{0}. \tag{2.3-58}$$

A $2N$ számú X_p, V_p ismeretlenre $2N$ számú lineáris egyenletünk van, de az egyenletek nem függetlenek, az egyenletrendszer megoldása ezért nem egyértelmű. Bármelyik lehetséges megoldást választhatjuk, mert az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_f + \mathbf{x}_g$ állapotvektorra vonatkozó kezdeti feltétel alapján egyértelmű megoldáshoz jutunk.

Ebben az esetben is érvelhetünk úgy, hogy a gerjesztésben szereplő λ_i nem pontosan egyezik meg a λ_i sajátértékkel, ezért azt például $(1+10^{-6})\lambda_i$ értékkel helyettesíthetjük, tehát nincs is szükség e speciális eset vizsgálatára.

1. példa A 2.3-2.2. pont 1. példájában vizsgált DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{aligned} x_1' &= -0{,}24\,x_2 - 0{,}24\,u,\\ x_2' &= x_1 + x_2 + 1{,}5\,u;\\ y &= x_2 + u. \end{aligned}$$

Határozzuk meg e rendszer válaszát, ha gerjesztése $u[k] = 4\,\varepsilon[k](0{,}4)^k$.

Mint láttuk, az állapotmátrix két sajátértéke $\lambda_1 = 0{,}6$, $\lambda_2 = 0{,}4$. Mivel a gerjesztés megegyezik az egyik sajátválasszal, ezért a az állapotvektor gerjesztett összetevőjét

$$\begin{aligned} x_{g,1}[k] &= X_1 + V_1\,k\,(0{,}4)^k,\\ x_{g,2}[k] &= X_2 + V_2\,k\,(0{,}4)^k \end{aligned}$$

alakban keressük. Az állapotegyenletbe helyettesítve

$$X_1\,(0{,}4)^{k+1} + V_1\,(k+1)(0{,}4)^{k+1} = -0{,}24\left[X_2(0{,}4)^k + V_2\,k\,(0{,}4)^k\right] - 0{,}96\,(0{,}4)^k,$$
$$X_2\,(0{,}4)^{k+1} + V_2\,(k+1)(0{,}4)^{k+1} = \left[X_1\,(0{,}4)^k + V_1\,k\,(0{,}4)^k\right] + \left[X_2\,(0{,}4)^k + V_2\,k\,(0{,}4)^k\right] + 6\,(0{,}4)^k.$$

A $(0{,}4)^k$ és a $k\,(0{,}4)^k$ függvény együtthatóinak egyezésének feltételei

$$0{,}4\,X_1 + 0{,}4V_1 = -0{,}24X_2 - 0{,}96\,, \qquad 0{,}4\,V_1 = -\,0{,}24\,V_2\,,$$
$$0{,}4\,X_2 + 0{,}4V_2 = X_1 + X_2 + 6\,, \qquad 0{,}4\,V_1 = V_1 + V_2\,.$$

A két jobb oldali egyenletből egyaránt a $V_1 = -0{,}6\,V_2$ egyenlet adódik. Ez a másik két egyenletbe helyettesítve

$$X_1 + 0{,}6\,X_2 = -2{,}4 + 0{,}6\,V_2, \qquad X_1 + 0{,}6\,X_2 = -6 + 0{,}4\,V_2\,.$$

A két egyenlet akkor nem ellentmondó (jobb oldaluk is egyenlő), ha $V_2 = -18$. Ekkor $V_1 = -10{,}8$ és $X_1 + 0{,}6\,X_2 = -13{,}2$. Az $X_2 = 0$ önkényes választással az állapotváltozók időfüggésének általános alakja

$$x_1[k] = -\,0{,}4\,K_1\,(0{,}6)^k - 0{,}6\,K_2\,(0{,}4)^k - 13{,}2\,(0{,}4)^k + 10{,}8\,k\,(0{,}4)^k,$$
$$x_2[k] = K_1\,(0{,}6)^k + K_2\,(0{,}4)^k - 18\,k\,(0{,}4)^k.$$

A kezdeti állapot $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$. Az együtthatókra vonatkozó egyenletrendszer és megoldása

$$\left.\begin{aligned} -\,0{,}4\,K_1 - 0{,}6\,K_2 &= 13{,}2 \\ K_1 + K_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} K_1 &= 66\,, \\ K_2 &= -\,66\,. \end{aligned}\right.$$

A válasz $y = x_2 + u$ kifejezésébe helyettesítve

$$y[k] = \varepsilon[k]\left\{66\,(0{,}6)^k - 62\,(0{,}4)^k - 18\,k\,(0{,}4)^k\right\}.$$

Ellenőrizhetjük hogy x_1, x_2, y a $k = 1$ helyen helyes eredményt ad. #

2. példa A 2.3-2.2. pont 2. példájában vizsgált FI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = x_2\,, \quad x_2' = -\,3\,x_1 - 4\,x_2 + u\,;$$
$$y = x_1 + 5\,u\,.$$

Határozzuk meg e rendszer válaszát, ha gerjesztése $u(t) = 4\,\varepsilon(t)\,\mathrm{e}^{-t}$.

Mint már láttuk, az A rendszermátrix két sajátértéke $\lambda_i = -1$, $\lambda_2 = -3$. Mivel a gerjesztés e^{-t} összetevője megegyezik az egyik sajátválasszal, ezért az állapotvektor gerjesztett összetevőjét a következő alakban keressük:

$$x_{g,1}(t) = X_1\,\mathrm{e}^{-t} + V_1\,t\,\mathrm{e}^{-t},$$
$$x_{g,2}(t) = X_2\,\mathrm{e}^{-t} + V_2\,t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Az állapotegyenletbe helyettesítve ezeket a függvényeket

$$X_1\,\mathrm{e}^{-t} + V_1\,\mathrm{e}^{-t} - V_1\,t\,\mathrm{e}^{-t} = X_2\,\mathrm{e}^{-t} + V_2\,t\,\mathrm{e}^{-t},$$
$$X_2\,\mathrm{e}^{-t} + V_2\,\mathrm{e}^{-t} - V_2\,t\,\mathrm{e}^{-t} = -\,3\left\{X_1\,\mathrm{e}^{-t} + V_1\,t\,\mathrm{e}^{-t}\right\} - 4\left\{X_2\,\mathrm{e}^{-t} + V_2\,t\,\mathrm{e}^{-t}\right\} + 4\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Az e^{-t} és a $t\,\mathrm{e}^{-t}$ tagok együtthatóinak egyenlősége a következő egyenletrendszerre vezet:

$$-X_1+V_1=X_2\,, \qquad -V_1=V_2\,,$$
$$-X_2+V_2=3X_1-4X_2+4\,. \qquad -V_2=-3V_1-4V_2 \Rightarrow -V_1=V_2\,.$$

Az X_i együtthatókra vonatkozó két egyenlet $V_2=-V_1$ felhasználásával

$$X_1+X_2=V_1\,,\ 3X_1+3X_2=4+V_1\,.$$

E két egyenlet akkor nem ellentmondásos, ha $3V_1=4+V_1$, amiből

$$V_1=2 \ \Rightarrow V_2=-2,\ X_1+X_2=2.$$

A két X_i egyike önkényesen megválasztható. Az állapotváltozók időfüggésének általános alakja $X_1=1,\ X_2=2-1=1$ választással

$$x_1(t)=[1-K_1]\mathrm{e}^{-t}-K_2\,\mathrm{e}^{-3t}+2t\,\mathrm{e}^{-t},$$
$$x_2(t)=[1+K_1]\mathrm{e}^{-t}+3K_2\,\mathrm{e}^{-3t}-2t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

Az $\mathbf{x}(+0)=\mathbf{0}$ kezdeti állapotot figyelembe vevő egyenletek és megoldásuk

$$\left.\begin{aligned}K_1+K_2&=1\\K_1+3K_2&=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}K_1&=2,\\K_2&=-1\end{aligned}\right..$$

A válasz $y=x_1+5\,x_2$ kifejezésébe helyettesítve

$$y(t)=\varepsilon(t)\left\{14\,\mathrm{e}^{-t}-14\,\mathrm{e}^{-3t}+\frac{22}{9}-9\,t\,\mathrm{e}^{-t}\right\}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy a válasz kezdeti értéke helyesen kiadódik. #

2.3-2.F. Feladatok

F-1. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1'=0{,}4\,x_1+0{,}03\,x_2+u\,,$$
$$x_2'=x_1+0{,}2\,x_2\,;$$
$$y=x_2\,.$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a rendszer gerjesztése

$(a)\ u[k]=\varepsilon[k]$.

$(b)\ u[k]=\varepsilon[k]\,(-0{,}1)^k$.

$(c)\ u[k]=\varepsilon[k](0{,}1)^k$.

$(d)\ u[k]=\varepsilon[k]-\varepsilon[k-3]$.

$(e)\ u[k]=9\{1-\varepsilon[k]\}+\varepsilon[k]$.

Az *(e)* esetre feltételezze a rendszer stabilitását, amit később igazolni is fogunk. Ellenőrizze az eredményeket a $k=0$, 1 és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel!

F-2. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = 0{,}4\,x_1 + 0{,}08\,x_2 + u\,,$$
$$x_2' = x_1 + 0{,}2\,x_2\,;$$
$$y = x_2\,.$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a gerjesztés

(a) $u[k] = \delta[k]$. (b) $u[k] = \varepsilon[k]$.

Ellenőrizze az eredményeket a $k = 0$, 1 és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel.

F-3. Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}24 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\,;$$

$$y = \begin{bmatrix} -0{,}2 & -0{,}24 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u\,.$$

Határozza meg e rendszer impulzusválaszát!

2.3-2.M. Megoldások

M-1. A sajátértékek $\lambda_1 = 0{,}1$ és $\lambda_2 = 0{,}5$.

$$(a)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{20}{9} - \frac{45}{9}(0{,}5)^k + \frac{25}{9}(0{,}1)^k\right\}.$$

$$(b)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{25}{3}(-0{,}1)^k + \frac{25}{6}(0{,}5)^k - \frac{25}{2}(0{,}1)^k\right\}.$$

$$(c)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{25}{4}(0{,}5)^k - \frac{25}{4}(0{,}1)^k - 25\,k\,(0{,}1)^k\right\}.$$

(d) Az (a) feladat megoldása felhasználható.

$$y[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]\}\left\{\frac{20}{9} - \frac{45}{9}(0{,}5)^k + \frac{25}{9}(0{,}1)^k\right\} + \varepsilon[k-3]\left\{4{,}375\,(0{,}5)^{k-3} - 2{,}275\,(0{,}1)^{k-3}\right\}.$$

(e) A kezdeti értékek $x_1[0] = 16$ és $x_2[0] = 20$. Ezek felhasználásával

$$y[k] = \frac{20}{9} + 40\,(0{,}5)^k - \frac{200}{9}(0{,}1)^k\,,\quad k \in \mathbf{N}.$$

M-2. A sajátértékek $\lambda_1 = 0{,}6$ és $\lambda_2 = 0$. Ebből $\boldsymbol{A}^k = \lambda_1^{k-1}\boldsymbol{A}$, $k = 1, 2, \ldots$ és

$$(a)\ y[k] = \varepsilon[k-2](0{,}6)^{k-2}.$$
$$(b)\ y[k] = \varepsilon[k-2]\left\{2{,}5 - 1{,}5\,(0{,}6)^{k-2}\right\}.$$

M-3. A sajátértékek és a sajátvektorok mint a 2.3-2.5. pont 2. példájában. A kezdeti állapot $\mathbf{x}(+0)=[0 \quad 0 \quad 1]^{\mathrm{T}}$. Ezek felhasználásával

$$h(t)=\delta(t)+\varepsilon(t)\left\{\frac{121}{30}\mathrm{e}^{-0,6t}-\frac{17}{10}\mathrm{e}^{-0,4t}-\frac{5}{6}\right\}$$

adja az impulzusválaszt. #

2.3-3. Az állapotváltozós leírás megoldása mátrixfüggvényekkel

2.3-3.1. Általános megfontolások

A 2.3-1. szakaszban megfogalmaztuk a lineáris, invariáns, kauzális (FI esetben: differenciális) rendszer állapotváltozós leírását. Az állapotegyenlet normálalakja

$$\mathrm{DI}:\ \mathbf{x}[k+1]=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[k]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[k], \qquad \mathrm{FI}:\ \mathbf{x}'(t)=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t). \tag{2.3-59}$$

Ha ennek megoldásaként az $\mathbf{x}[k]$, illetve az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor időfüggése már ismert, akkor az $\mathbf{y}[k]$, illetve az $\mathbf{y}(t)$ válaszvektor számítása már csak behelyettesítést igényel:

$$\mathrm{DI}:\ \mathbf{y}[k]=\boldsymbol{C}\,\mathbf{x}[k]+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[k]; \qquad \mathrm{FI}:\ \mathbf{y}(t)=\boldsymbol{C}\mathbf{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}(t). \tag{2.3-60}$$

Ebben a szakaszban formalizált módszert mutatunk be az állapotegyenlet megoldására a $k\in\mathbf{N}$ illetve a $t\in\mathbf{R}_+$ intervallumban.

Ismertnek tekintjük egyrészt a gerjesztéseket ugyanitt, másrészt a DI állapotvektor $\mathbf{x}[-1]$ kiindulási értékét vagy az abból számítható $\mathrm{x}[0]=\boldsymbol{A}\,\mathrm{x}[-1]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[-1]$ kezdeti értékét, illetve a FI állapotvektor $\mathbf{x}(-0)$ kiindulási értékét. Bekapcsolási folyamat estén (amikor $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ a k illetve a t idő negatív értékeire) minden kiindulási érték nulla.

2.3-3.2. A megoldás formulája

Igazolni fogjuk, hogy az *állapotegyenlet* azon megoldása, amelynek kezdeti értéke $\mathbf{x}[0]$ vagy kiindulási értéke $\mathbf{x}(-0)$, a következő alakú:

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{DI}:\quad \mathbf{x}[k]=\boldsymbol{A}^k\,\mathbf{x}[0]+\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-i}\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[i], \qquad k\in\mathbf{Z}_+,\\ &\mathrm{FI}:\quad \mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathbf{x}(-0)+\int_{-0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ t\in\mathbf{R}_+.\end{aligned}} \tag{2.3-61}$$

Az integrál -0 alsó határa azt jelenti, hogy ha a gerjesztés tartalmaz $\delta(t)$ Dirac-impulzus összetevőt, akkor azt az integrálás során figyelembe kell venni.

Bevezetve a $p=k-1-i$ új szummációs változót illetve a $\vartheta=t-\tau$ új integrációs változót a következő alak adódik:

$$\begin{aligned}&\mathrm{DT}:\quad \mathbf{x}[k]=\boldsymbol{A}^k\mathbf{x}[0]+\sum_{p=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^p\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[k-1-p], \quad k\in\mathbf{Z}_+,\\ &\mathrm{FI}:\quad \mathbf{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathbf{x}(-0)+\int_{0}^{t+0}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\vartheta}\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t-\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta,\ t\in\mathbf{R}_+.\end{aligned} \tag{2.3-62}$$

A *válasz* számítható vagy úgy, hogy az állapotvektort minden időpontra kiszámítva azt (60)-ba helyettesítjük. Ezt a helyettesítést általánosan is elvégezhetjük, miáltal kiküszöbölhetjük az állapotvektor időfüggvényét (csak a belépő gerjesztés esetén nulla kiindulási állapotot kell ismernünk):

$$\begin{aligned} &\text{DI:}\quad \mathbf{y}[k]=\begin{cases} \boldsymbol{C}\,\mathbf{x}[0]+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[0], & k=0,\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\mathbf{x}[0]+\boldsymbol{C}\sum\limits_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1-i}\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[i]+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}[k], & k\in\mathbf{Z}_+;\end{cases}\\ &\text{FI:}\quad \mathbf{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathbf{x}(-0)+\boldsymbol{C}\int\limits_{-0}^{t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\,\mathbf{u}(t),\quad t\in\mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{2.3-63}$$

Az állapotvektor, illetve a válaszvektor első tagja a *zérus gerjesztésű összetevő*, második, illetve második és harmadik tagja a *zérus állapotú összetevő* (pontosabban: a zérus kezdeti vagy kiindulási állapotú összetevő). Ha minden gerjesztés belépő (értéke nulla $k=0$ illetve $t=0$ előtt), akkor $\mathbf{x}[0]=\mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0)=\mathbf{0}$, ezért ekkor az első tag nulla, tehát $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ megegyezik zérus állapotú összetevőjével. Ez a helyzet a gyakorlati esetek többségében. Ha viszont a gerjesztés azonosan nulla k illetve t nem-negatív értékeire, akkor $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ megegyezik zérus gerjesztésű összetevőjével.

A zérus gerjesztésű összetevő emlékeztet a szabad összetevőre, a zérus állapotú összetevő emlékeztet a gerjesztett összetevőre, de nem azonosak. Ez abból is látszik, hogy belépő gerjesztés esetén a zérus állapotú összetevő nulla, míg a szabad összetevő általában nem nulla.

A DI állapotvektor és válasz kifejezésében szereplő $\boldsymbol{A}^k$, $k\in\mathbf{N}$ mátrixfüggvény a kvadratikus mátrix önmagával való ismételt szorzását jelenti. A FI állapotvektor és válasz kifejezésében szereplő $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$, $t\in\mathbf{R}$ exponenciális mátrixfüggvényt hatványsora definiálja:

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\frac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\frac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\ldots\ . \tag{2.3-64}$$

Igazolható, hogy ez bármely $\boldsymbol{A}$ mátrix esetén konvergens. Kellő számú tag figyelembe vételével a függvény tetszőleges pontossággal számítható, de csak t kellően kis értékeire használható eljárás. A (61) vagy (63) tényleges felhasználásához még meg kell adni $\boldsymbol{A}^k$ és $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ számításának gyakorlati módszerét. Számítógépes programmal ez nem jelent nehézséget. Az elvi háttérhez a 2.3-3.4. pontban tárgyaljuk az $\boldsymbol{A}$ mátrix sajátértékeit, majd ezek felhasználásával a 2.3-3.5. pontban a mátrixfüggvények számítását.

Igazoljuk most, hogy (61) valóban megoldása az állapotegyenletnek.

A DI esetben kövessük a lépésről lépésre megoldás módszerét, miközben minden lépésnél helyettesítsük be az előző eredményt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[1]&=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[0]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[0],\\ \mathbf{x}[2]&=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[1]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[1]=\boldsymbol{A}^2\,\mathbf{x}[0]+\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[0]+\boldsymbol{A}\,\mathbf{u}[1],\\ \mathbf{x}[3]&=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}[2]+\boldsymbol{A}\,\mathbf{u}[2]=\boldsymbol{A}^3\mathbf{x}[0]+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[0]+\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[1]+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}[2], \end{aligned}$$

és így tovább. A (61) ugyanezt adja, vagyis helyes megoldást ad. Az igazolás a feltételezett megoldásnak az állapotegyenletbe helyettesítésével is elvégezhető.

A FI megoldás igazolásához a (64) értelmezés alapján belátható, hogy az $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ mátrixfüggvény ugyanúgy differenciálható, mint az e^{At} skalár függvény. Képezzük az állapotvektor (61) szerinti kifejezésének idő szerinti deriváltját:

$$\mathbf{x}'(t) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathbf{x}(-0) + \int_{-0}^{t} \boldsymbol{A}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t).$$

Az első két tag összege a (61) értelmében $\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t)$, tehát az (59) FI állapotegyenlet valóban ki van elégítve.

2.3-3.3. Az impulzusválasz kifejezése

Valamely DI illetve FI egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns rendszer $h[k]$ illetve $h(t)$ *impulzusválasza* az $u[k] = \delta[k]$ illetve az $u(t) = \delta(t)$ gerjesztéshez tartozó válasza (2.1-1. és 2.1-2. szakasz). Az állapotváltozós leírás ismeretében az impulzusválasz a következőképpen állítható elő.

Az egységimpulzus illetve a Dirac-impulzus gerjesztés belépő jel, ennek következtében $\mathbf{x}[0] = \mathbf{0}$ illetve $\mathbf{x}(-0) = \mathbf{0}$. A (63)-ban az összeg megegyezik az $i = 0$ tagjával, az integrál megegyezik a $u(t)$ szorzójával a $\tau = 0$ helyen. Ebből következően (figyelembe véve az egy gerjesztést, egy választ)

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{DI:}\quad h[k] = D\,\delta[k] + \varepsilon[k-1]\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{k-1}\mathbf{B},\quad k \in \mathbf{Z};\\ &\text{FI:}\quad h(t) = D\,\delta(t) + \varepsilon(t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathbf{B},\qquad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}} \tag{2.3-65}$$

Látható, hogy ha $D = 0$, akkor a DI impulzusválasz késleltetve van (legkorábban a $k = 1$ ütemben lép be), a FI impulzusválasz „simított" (nem tartalmaz Dirac-impulzust). Sokan csak az ilyen állapotváltozós leírású rendszert tartják elfogadhatónak (egyébként a rendszer nem „proper").

A válasz (63) szerinti kifejezése felfogható az impulzusválasz (65) kifejezésének és a gerjesztésnek a konvolúciójának is. Az adott gerjesztéshez tarozó válasz számításához az állapotváltozók időfüggvényére nincs feltétlenül szükség, mint azt már láttuk.

2.3-3.4. Mátrix sajátértékei

A rendszermátrix sajátértékei nem csak számítástechnikai, hanem fogalmi szempontból is fontos szerepet játszanak. Ez a pont és a 2.3-2.2. pont sok átfedést tartalmaz.

Legyen $\boldsymbol{A}$ egy *kvadratikus mátrix,* sorainak és oszlopainak száma N. Az

$$\mathbf{m} = [m_1 \quad m_2 \quad \ldots \quad m_N\,]^{\mathrm{T}} \tag{2.3-66}$$

vektor a mátrix egy *sajátvektora,* ha kielégíti a következő egyenletet:

$$\boldsymbol{A}\,\mathbf{m} = \lambda\,\mathbf{m}. \tag{2.3-67}$$

Itt a valós vagy komplex értékű λ állandó az $\boldsymbol{A}$ mátrix egy *sajátértéke.* Ha $\mathbf{m}$ egy sajátvektor, akkor $K\,\mathbf{m}\ (K \neq 0)$ is egy sajátvektor, ezért $\mathbf{m}$ normálható, például egy normája vagy valamelyik nem nulla értékű rendezője egységnyinek választható.

A (67) nullára redukált alakja

$$(\lambda\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\mathbf{m} = \mathbf{0}. \tag{2.3-68}$$

Itt $\boldsymbol{I}$ a kvadratikus, *N-dimenziós* egységmátrix (tehát minden főátlóbeli eleme 1, többi eleme 0).

A (68) homogén lineáris egyenletrendszernek csak akkor van az $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ triviális megoldástól különböző megoldása, ha determinánsa nulla, vagyis ha λ_i megoldása az $\boldsymbol{A}$ mátrix $D(\lambda) = 0$ *karakterisztikus egyenletének*:

$$\boxed{D(\lambda) \equiv \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0; \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N. \qquad (2.3\text{-}69)}$$

A determináns részletesebben felírt alakja

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - A_{11} & -A_{12} & \ldots & -A_{1N} \\ -A_{21} & \lambda - A_{22} & \ldots & -A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_{N1} & -A_{N2} & \ldots & \lambda - A_{NN} \end{vmatrix}. \qquad (2.3\text{-}70)$$

Ebből következik, hogy a $D(\lambda)$ *karakterisztikus polinom* általános alakja

$$D(\lambda) = \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + d_2 \lambda^{N-2} + \ldots + d_{N-1} \lambda + d_N. \qquad (2.3\text{-}71)$$

A karakterisztikus egyenletnek N számú gyöke van (a karakterisztikus polinomnak N számú nullahelye vagy zérusa van). Mivel az A_{pq} és így a d_i együtthatók valósak, ezért a sajátértékek vagy *valósak* vagy konjugált *komplex párokat* alkotnak. A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_N). \qquad (2.3\text{-}72)$$

A sajátértékek *egyszeresek*, ha $\lambda_p \neq \lambda_q$, $p \neq q$, egyébként egy vagy több sajátérték *többszörös*. Az utóbbi eset a gyakorlatban ritkán fordul elő, de a DI esetben $\lambda = 0$ gyakran többszörös sajátérték. Az állapotváltozós leírás megoldásához a sajátértékek ismeretére rendszerint szükség van.

A *Cayley–Hamilton*-tétel értelmében minden kvadratikus mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, vagyis a (69) szerinti jelöléssel

$$\boldsymbol{A}^N + d_1 \boldsymbol{A}^{N-1} + \ldots + d_{N-1} \boldsymbol{A} + d_N \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}. \qquad (2.3\text{-}73)$$

Ebből következik, hogy miután ismételt szorzással meghatároztuk az $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \ldots, \boldsymbol{A}^{N-1}$ kvadratikus mátrixokat, az $\boldsymbol{A}^N$ mátrix már szorzás nélkül is számítható:

$$\boldsymbol{A}^N = -d_N \boldsymbol{I} - d_{N-1} \boldsymbol{A} - d_{N-2} \boldsymbol{A}^2 - \ldots - d_1 \boldsymbol{A}^{N-1}.$$

Az $\boldsymbol{A}^N$ ismeretében hasonló módon számítható $\boldsymbol{A}^{N+1}$, $\boldsymbol{A}^{N+2}$ és így tovább.

A fenti összefüggés felhasználható kvadratikus mátrix pozitív egész hatványainak számítására. Lényegesebb azonban az, hogy a tétel értelmében a mátrix bármely pozitív egész hatványa (és így végtelen sora, például exponenciális függvénye) meghatározható úgy, hogy $N-1$ számú ismételt szorzásra van csak szükség. Erre több lehetőség is ismert. Ezek közül kettőt mutatunk be a következő pontokban. Az eljárások alkalmasak a mátrix tetszőleges (negatív vagy nem egész) hatványának számítására is.

A legtöbb matematikai számítógépes program alkalmas kvadratikus mátrix hatványának vagy exponenciális függvényének számítására. Ennek alapján az Euler-reláció felhasználásával számítható mátrix szinusza, koszinusza, ezek szorzata a mátrix hatványával vagy exponenciális függvényével.

2.3-3.5. Mátrix függvénye egyszeres sajátértékek esetén

Legyen $\boldsymbol{A}$ egy $N \times N$ dimenziós kvadratikus mátrix, amelynek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ sajátértékei egyszeresek. Meg akarjuk határozni az $\boldsymbol{A}^k$ $(k \in \mathbf{N})$ és az $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ $(t \in \mathbf{R})$ mátrixot. A mátrix sajátértékeit ismertnek tekintjük. A sok ismert módszer közül egyet mutatunk be.

Az $\boldsymbol{A}^k$ vagy az $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ mátrixfüggvény előállítása érdekében határozzuk meg az $\boldsymbol{A}$ mátrix N számú $\boldsymbol{L}_i$ *Lagrange-mátrixát* a következő összefüggés alapján:

$$\boldsymbol{L}_i = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{N} \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_p \boldsymbol{I}}{\lambda_i - \lambda_p} \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.3-74}$$

Így például $N = 3$ esetén a három Lagrange-mátrix

$$\boldsymbol{L}_1 = \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I}}{\lambda_1 - \lambda_3}, \quad \boldsymbol{L}_2 = \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I}}{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad \boldsymbol{L}_3 = \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}}{\lambda_3 - \lambda_2}.$$

Láthatjuk, hogy $\boldsymbol{A}$ legnagyobb előforduló hatványa valóban $\boldsymbol{A}^{N-1}$. Igazolható továbbá, hogy $\boldsymbol{L}_p \boldsymbol{L}_q = \boldsymbol{0}$, $p \neq q$, továbbá hogy

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{I}. \tag{2.3-75}$$

Ez felhasználható a számított Lagrange-mátrixok ellenőrzésére.

Igazolható, hogy a kvadratikus $\boldsymbol{A}$ mátrix *hatványai* a következő összefüggéssel számíthatók *egyszeres sajátértékek* esetén:

$$\boxed{\boldsymbol{A}^k = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k \boldsymbol{L}_i. \qquad (2.3\text{-}76)}$$

Tekintsük még azt a valamivel általánosabb esetet, amikor az $\boldsymbol{A}$ mátrix M számú sajátértéke egyszeres és nem nulla, továbbá $\lambda_0 = 0$ egy $(N-M)$-szeres sajátértéke. Ekkor a mátrix karakterisztikus egyenlete

$$D(\lambda) \equiv \lambda^N + d_1 \lambda^{N-1} + \ldots + d_M \lambda^{N-M} = 0. \tag{2.3-77}$$

Most $\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3, \ldots, \boldsymbol{A}^{M-1}$ számítandó ismételt szorzással, míg $k \geq M$ esetén (76) érvényes, de most a Lagrange-mátrixok kifejezése

$$\boldsymbol{L}_i = \frac{\boldsymbol{A}^{N-M}}{\lambda_i^{N-M}} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{M} \frac{\boldsymbol{A} - \lambda_p \boldsymbol{I}}{\lambda_i - \lambda_p}, \quad i = 1, 2, \ldots, M. \tag{2.3-78}$$

Az ismételt szorzással számítandó legnagyobb hatvány most is $\boldsymbol{A}^{N-1}$.

Az *exponenciális mátrixfüggvény* az $\boldsymbol{A}$ mátrix Lagrange-mátrixainak ismeretében *egyszeres sajátértékek* esetén a következő összefüggéssel számolható:

$$\boxed{\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\lambda_i t} \boldsymbol{L}_i. \qquad (2.3\text{-}79)}$$

A sor alakú definíció felhasználásával is, de a fenti összefüggéssel is igazolható, hogy az exponenciális mátrixfüggvény szorzására vagy differenciálására vonatkozó szabályok megegyeznek a valós változós exponenciális függvényre vonatkozókkal. Például $\boldsymbol{A}$ és $e^{\boldsymbol{A}t}$ szorzata felcserélhető (kommutatívak).

Hasonló módon értelmezettek és számíthatók más olyan mátrixfüggvények is, amelyeknek az egész számsíkon konvergens hatványsoruk van.

1. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k](0{,}5)^k$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és ebből számított sajátértékei

$$\det[\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} \lambda & 0{,}24 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \lambda + 0{,}24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0{,}6, \ \lambda_2 = 0{,}4.$$

Az $\boldsymbol{A}$ mátrix Lagrange-mátrixai az (74) értelmében

$$\boldsymbol{L}_1 = \frac{1}{0{,}2} \begin{bmatrix} -0{,}4 & -0{,}24 \\ 1 & 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1{,}2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1{,}2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{I}.$$

A (61) alkalmazásához a következő mátrixfüggvényt kell számítanunk:

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\left\{\lambda_1^i \boldsymbol{L}_1 + \lambda_2^i \boldsymbol{L}_2\right\}\boldsymbol{B} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ (0{,}6)^i \begin{bmatrix} -2 & -1{,}2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + (0{,}4)^i \begin{bmatrix} 3 & 1{,}2 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} = 3{,}3\,(0{,}6)^i - 1{,}8\,(0{,}4)^i.$$

A válasz kifejezése a (63) értelmében

$$y[0] = 1,$$

$$y[k] = \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ 3{,}3\,(0{,}6)^{k-1-i} - 1{,}8\,(0{,}4)^{k-1-i} \right\} (0{,}5)^i + 1 \cdot (0{,}5)^k =$$

$$= 3{,}3 \frac{0{,}6^k}{0{,}6} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0{,}5}{0{,}6}\right)^i - 18 \frac{0{,}4^k}{0{,}4} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{0{,}5}{0{,}4}\right)^i, \ k \in \mathbf{Z}_+.$$

A vizsgált egyszerű esetben ki tudjuk fejezni az összeget zárt alakban (mértani sor):

$$y[k] = 3{,}3 \frac{0{,}6^k}{0{,}6} \frac{1 - (0{,}5/0{,}6)^k}{1 - (0{,}5/0{,}6)} - 1{,}8 \frac{0{,}4^k}{0{,}4} \frac{1 - (0{,}5/0{,}4)^k}{1 - (0{,}5/0{,}4)}, \ k \in \mathbf{Z}_+.$$

Ez a $k = 0$ helyen is jó eredményt ad. A megoldás végső alakja rendezés után

$$y[k] = \varepsilon[k]\left\{33\,(0{,}6)^k + 18\,(0{,}4)^k - 50\,(0{,}5)^k\right\}, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Behelyettesítve $k = 0$, 1 és 2 értékét a válaszra ugyanazokat az értékeket kapjuk, mint a 2.3-1.2. pont példájában a lépésről lépésre módszerrel. #

2. példa Egy *FI* rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és a sajátértékei

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3.$$

A rendszermátrix Lagrange-mátrixai

$$\boldsymbol{L}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{I}.$$

A (61) alkalmazásához a következő mátrixfüggvényt kell számítanunk:

$$\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\left\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t}\boldsymbol{L}_1 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\boldsymbol{L}_2\right\}\boldsymbol{B} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix}\left\{\mathrm{e}^{-t}\begin{bmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^{-3t}\begin{bmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2\,\mathrm{e}^{-t} + 7\,\mathrm{e}^{-3t}.$$

A válasz kifejezése (63) alapján $\mathbf{x}[-0] = \mathbf{0}$ felhasználásával

$$y(t) = \int_0^t \left[-2\,\mathrm{e}^{-(t-\tau)} + 7\,\mathrm{e}^{-3(t-\tau)}\right] 1\,\mathrm{d}\tau = -2\,\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{e}^{t}-1}{1} + 7\,\mathrm{e}^{-3t}\,\frac{\mathrm{e}^{3t}-1}{3}, \quad t \in \mathbf{R}_+.$$

Rendezés után, a válasz belépő jellegét is kifejezve

$$y(t) = \varepsilon(t)\left\{\frac{1}{3} + 2\,\mathrm{e}^{-t} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^{-3t}\right\}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Az Olvasó ellenőrizheti, hogy a vizsgált állapotváltozós leírás és a 2.2-2.4. pont példájában vizsgált rendszeregyenlet ugyanazt a rendszert írják le. Ennek megfelelően a válaszok is megegyeznek. #

*2.3-3.6. Mátrix függvénye többszörös sajátértékek esetén

Legyen $\boldsymbol{A}$ egy kvadratikus, N-dimenziós mátrix, amelynek $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sajátértékei egyszeresek és egyetlen, $\lambda_{p+1} \equiv \lambda_s$ sajátértéke többszörös, multiplicitása $r = N - p$. Az ilyen mátrix hatványai illetve exponenciális függvénye kifejezhetők a mátrix $\boldsymbol{H}$ *Hermite-mátrixainak* ismeretében:

$$\boldsymbol{A}^k = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k \boldsymbol{H}_{i0} + \sum_{q=0}^{\max(r-1,k)} \frac{k!}{(k-q)!}\lambda_s^{k-q}\boldsymbol{H}_{sq}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{2.3-80}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{e}^{\lambda_i t}\boldsymbol{H}_{i0} + \sum_{q=0}^{r-1} t^q\,\mathrm{e}^{\lambda_s t}\boldsymbol{H}_{sq}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2.3-81}$$

Látható, hogy a $\boldsymbol{H}_{sq}$ mátrix együtthatója a λ_s^k illetve az $e^{\lambda_s t}$ exponenciális függvény λ_s szerinti q-adik deriváltja.

Kézenfekvő az általánosítás arra az esetre, amikor a mátrixnak több többszörös sajátértéke van.

Az $\boldsymbol{A}$ mátrix Hermite-mátrixai a következőképpen határozhatók meg. Írjuk fel a (80) egyenletet $k = 0, 1, 2,..., N-1$ esetére:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{p} \boldsymbol{H}_{i0} + \boldsymbol{H}_{s0} = \boldsymbol{I}, \\
&\sum_{i=0}^{p} \lambda_i \boldsymbol{H}_{i0} + \lambda_s \boldsymbol{H}_{s0} + \boldsymbol{H}_{s1} = \boldsymbol{A}, \\
&\sum_{i=0}^{p} \lambda_i^2 \boldsymbol{H}_{i0} + \lambda_s^2 \boldsymbol{H}_{s0} + 2\lambda_s \boldsymbol{H}_{s1} + 2\boldsymbol{H}_{s2} = \boldsymbol{A}^2, \\
&\vdots \\
&\sum_{i=0}^{p} \lambda_i^{N-1} \boldsymbol{H}_{i0} + \lambda_s^{N-1} \boldsymbol{H}_{s0} + (N-1)\lambda_s^{N-2} \boldsymbol{H}_{s1} + (N-1)(N-2)\lambda_s^{N-3} \boldsymbol{H}_{s2} + \\
&\quad + \ldots + \frac{(N-1)!}{p!} \boldsymbol{H}_{s,r-1} = \boldsymbol{A}^{N-1}.
\end{aligned}
\tag{2.3-82}
$$

Az $\boldsymbol{A}$ itt szereplő hatványait ismételt szorzással számítjuk. Láthatjuk, hogy legfeljebb $\boldsymbol{A}^{N-1}$ számítására van szükség. A (82) összefüggések N számú lineáris mátrixegyenletet jelentenek a $p + r = N$ számú Hermite-mátrixra. Az egyenletrendszer megoldása adja az ismeretlen Hermite-mátrixokat, tehát (80) illetve (81) már alkalmazható a mátrixfüggvény számítására.

Előfordulhat, hogy a $\boldsymbol{H}_{s,r-1}$ vagy még a $\boldsymbol{H}_{s,r-2}, \boldsymbol{H}_{s,r-3}, \ldots$ mátrixokra is zérus mátrixot kapunk. Ekkor van olyan N-nél kisebb fokszámú ún. minimálegyenlet, amelyet az $\boldsymbol{A}$ mátrix kielégít. Ennek előzetes meghatározásával a számítás egyszerűsíthető. Nem foglalkozunk részletesebben ezzel a nagyon speciális esettel.

Az Hermite-mátrixok alkalmazhatók más, sorával definiált mátrixfüggvény számítására is, ha annak van többszörös sajátértéke.

Példa Határozzuk meg az $\boldsymbol{A}^k$ és az $e^{\boldsymbol{A}t}$ mátrixot, ha

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}25 & 1 \end{bmatrix}.$$

A mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0{,}25 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \lambda + 0{,}25 \equiv (\lambda - 0{,}5)^2 = 0.$$

Ebből következik, hogy $\lambda_1 = 0{,}5$ a mátrix egy kétszeres sajátértéke, a mátrixnak további sajátértéke nincs $(N = 2, p = 0, r = 2)$. Az Hermite-mátrixokra vonatkozó (82) egyenletek a következő alakúak

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{H}_{10} = \boldsymbol{I}, \\
&\lambda_1 \boldsymbol{H}_{10} + \boldsymbol{H}_{11} = \boldsymbol{H}.
\end{aligned}
$$

Ebből következik, hogy $\boldsymbol{H}_{10} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{H}_{11} = \boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}$, vagy részletesebben:

$$\boldsymbol{H}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}_{11} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 1 \\ -0{,}25 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

A két keresett mátrixfüggvény (80) és (81) értelmében

$$\boldsymbol{A}^k = \lambda_1^k \boldsymbol{H}_{10} + k\,\lambda_1^{k-1} \boldsymbol{H}_{11} = \begin{bmatrix} (1-k)(0{,}5)^k & 2k(0{,}5)^k \\ -0{,}5k(0{,}5)^k & (1+k)(0{,}5)^k \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \boldsymbol{H}_{10} + t\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \boldsymbol{H}_{11} = \begin{bmatrix} (1-0{,}5t)\mathrm{e}^{0{,}5t} & t\,\mathrm{e}^{0{,}5t} \\ -0{,}25t\,\mathrm{e}^{0{,}5t} & (1+0{,}5t)\mathrm{e}^{0{,}5t} \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük az eredményeket $k = 0$ és 1 illetve $t = 0$ esetére. #

*2.3-3.7. Az állapotegyenlet szétcsatolása

Ebben a pontban az állapotegyenlet egy olyan átalakítását mutatjuk be, amely a megoldását nagyon egyszerűvé teszi. Arra az esetre szorítkozunk, amikor a rendszermátrix minden sajátértéke egyszeres.

Az $\boldsymbol{A}$ mátrix egyszeres λ_i sajátértékéhez tartozó $\mathbf{m}_i$ *sajátvektora* a (68) szerinti

$$(\lambda_i \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\mathbf{m}_i = \mathbf{0} \tag{2.3-83}$$

egyenlet egy megoldása. Hagyjuk el a lineáris egyenletrendszer utolsó egyenletét és válasszuk a sajátvektor utolsó rendezőjét egységnyinek. A többi rendező a

$$\begin{bmatrix} \lambda_i - A_{11} & -A_{12} & \dots & \lambda_i - A_{1(N-1)} \\ -A_{21} & \lambda_i - A_{22} & \dots & -A_{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -A_{(N-1)1} & -A_{(N-1)2} & \dots & \lambda_i - A_{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{i1} \\ m_{i2} \\ \vdots \\ m_{i(N-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1N} \\ A_{2N} \\ \vdots \\ A_{(N-1)N} \end{bmatrix}; \; i = 1, 2, \dots, N \tag{2.3-84}$$

lineáris egyenletrendszer megoldása. Az i-edik sajátvektor ennek alapján

$$\mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} m_{i,1} & m_{i,2} & \dots & m_{i,N-1} & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{2.3-85}$$

Mindegyik sajátvektor megszorozható egy állandóval. Az $\boldsymbol{A}$ mátrix $\boldsymbol{M}$ *modális mátrixa* a sajátvektoraiból alkotott kvadratikus N-dimenziós mátrix:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & \mathbf{m}_2 & \dots & \mathbf{m}_N \end{bmatrix}. \tag{2.3-86}$$

Igazolható, hogy ha a sajátértékek egyszeresek, akkor a modális mátrix nem szinguláris, tehát meghatározható az inverze. Igazolható továbbá, hogy ekkor

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{M}^{-1}, \quad \boldsymbol{\Lambda} \equiv \langle \lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \dots \;\; \lambda_N \rangle. \tag{2.3-87}$$

Itt $\langle \dots \rangle$ diagonális mátrixot jelent, amely a főátlós elemeket tartalmazza. A (87) az $\boldsymbol{A}$ mátrix úgynevezett spektrál-felbontása. Ebből már következik, hogy

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{M} \langle \lambda_1^k \;\; \lambda_2^k \;\; \dots \;\; \lambda_N^k \rangle \boldsymbol{M}^{-1}, \tag{2.3-88}$$

$$e^{At} = \boldsymbol{M}\left\langle e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad \ldots \quad e^{\lambda_N t}\right\rangle \boldsymbol{M}^{-1}. \tag{2.3-89}$$

Ezek után (61) vagy (63) alapján számítható az állapotvektor vagy a válaszvektor.

Az új állapotváltozókra vonatkozó állapotváltozós leírás előállításához írjuk fel az állapotegyenletet:

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u} = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\Lambda}\,\boldsymbol{M}^{-1}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}.$$

Szorozzunk balról az $\boldsymbol{M}^{-1}$ mátrixszal és vezessük be az $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{M}^{-1}\,\mathbf{x}$ új állapotvektort. Az állapotváltozós leírás ekkor az alábbi alakot ölti:

$$\hat{\mathbf{x}}' = \boldsymbol{\Lambda}\,\hat{\mathbf{x}} + \left(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B}\right)\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \left(\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{M}\right)\hat{\mathbf{x}} + \boldsymbol{D}\,\mathbf{u}. \tag{2.3-90}$$

Ez az új állapotváltozók bevezetésének – a 2.3-1.2. és a 2.3-1.3. pontban már említett – egy speciális és célszerű esete. Az új rendszermátrix most a sajátértékekből alkotott $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonális mátrix. A (90) megadja az új állapotváltozós leírásban szereplő többi mátrix kifejezését is a régi mátrixokkal és az $\boldsymbol{M}$ mátrixszal. A $\boldsymbol{\Lambda}$ mátrix diagonális jellege következtében az állapotegyenlet struktúrája most ún. *szétcsatolt formájú:*

$$\hat{x}'_p = \lambda_p \hat{x}_p + \mathbf{b}_p^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}, \quad p = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.3-91}$$

ahol $\mathbf{b}_p^{\mathrm{T}}$ az $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B}$ mátrix p-edik sora. Ha a rendszernek csak egy gerjesztése van, akkor $\mathbf{b}_p^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u} = b_p\,u$, ahol b_p az $\boldsymbol{M}^{-1}\mathbf{B}$ vektor p-edik rendezője. A szétcsatolt állapotegyenlet egyes egyenletei ekkor egymástól függetlenül megoldhatók. Könnyen belátható, hogy

$$\mathrm{DI}: \quad \hat{x}_p[k] = \lambda_p^k\,\hat{x}_p[0] + \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_p^{k-1-i}\,\mathbf{b}_p^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}[i], \tag{2.3-92}$$

$$\mathrm{FI}: \quad \hat{x}_p(t) = e^{\lambda_p t}\hat{x}_p(-0) + \int_{-0}^{t} e^{\lambda_p (t-\tau)}\,\mathbf{b}_p^{\mathrm{T}}\,\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2.3-93}$$

Az $\hat{x}_i[k]$ illetve $\hat{x}_i(t)$ állapotváltozók ismeretében számítható az $\mathbf{y}[k]$ illetve $\mathbf{y}(t)$ válasz.

Ha az $\boldsymbol{A}$ mátrix sajátértékei nem mind egyszeresek, akkor az eljárás némi általánosítást igényel. Ezt azonban nem tárgyaljuk.

Ha a rendszermátrix egyszeres sajátértékei között komplex párok is vannak, akkor egyes feladatok megoldásához (például a hálózati reprezentáció meghatározáshoz) nem a szétcsatolt alak a legelőnyösebb. A rendszermátrix ilyenkor olyan blokk-diagonális alakra is hozható, amelynek vagy csak a főátlós elemei vagy az ezekre támaszkodó 2×2 méretű blokkok különböznek nullától, viszont ezek minden eleme valós. Ez az alak már alkalmas a hálózati reprezentáció előállítására. Ezt az eljárást nem tárgyaljuk.

1. példa Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}24 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}50 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u[k] = \varepsilon[k](0{,}5)^k$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\det[\lambda\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}] = \begin{vmatrix} \lambda & 0{,}24 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \lambda + 0{,}24 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 0{,}6,\ \lambda_2 = 0{,}4.$$

A sajátvektorok $m_{i2}=1$ választással a következő két egyenlet bármelyikének megoldása:

$$\lambda_i\, m_{i1} = -0{,}24 \quad \text{vagy} \quad -m_{i1} = -(\lambda_i - 1) \;\Rightarrow\; m_{11} = -0{,}4,\; m_{21} = -0{,}6.$$

Az $\boldsymbol{A}$ rendszermátrix $\boldsymbol{M}$ modális mátrixa és annak inverze

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -0{,}4 & -0{,}6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

A (88) értelmében

$$\boldsymbol{A}^k = \begin{bmatrix} -0{,}4 & -0{,}6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6^k & 0 \\ 0 & 0{,}4^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\,(0{,}6)^k + 3\,(0{,}4)^k & -1{,}2\,(0{,}6)^k + 1{,}2\,(0{,}4)^k \\ 5\,(0{,}6)^k - 5\,(0{,}4)^k & 3\,(0{,}6)^k - 2\,(0{,}4)^k \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük, hogy $k = 0$ és 1 esetén valóban $\boldsymbol{I}$ és $\boldsymbol{A}$ adódik. Könnyen belátható, hogy ez a kifejezés megegyezik az $\boldsymbol{A}^k = 0{,}6^k\,\boldsymbol{L}_1 + 0{,}4^k\,\boldsymbol{L}_2$ szerintivel, amelyet a 2.3-3.5. pont 1. példájában kaptunk. A válasz számításának további menete megegyezik az ott követettel, ezért azt nem ismételjük itt meg. #

2. példa Egy FI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a választ, ha a rendszer gerjesztése $u(t) = \varepsilon(t)$.

A rendszermátrix karakterisztikus egyenlete és sajátértékei

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda+4 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + 4\,\lambda + 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1,\; \lambda_2 = -3.$$

A sajátvektorok $m_{i2} = 1$ választással a következő két egyenlet egyikének megoldása:

$$\lambda_i\, m_{i1} = 1 \quad \text{vagy}\; 3\, m_{i1} = -(\lambda_i + 4) \;\Rightarrow\; m_{11} = -1,\; m_{12} = -1/3.$$

Az $\boldsymbol{A}$ mátrix $\boldsymbol{M}$ modális mátrixa és annak inverze ($m_{22} = -3$ célszerű választással):

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix}.$$

A (85) értelmében

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5\,\mathrm{e}^{-t} - 0{,}5\,\mathrm{e}^{-3t} & 0{,}5\,\mathrm{e}^{-t} - 0{,}5\,\mathrm{e}^{-3t} \\ -1{,}5\,\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\,\mathrm{e}^{-3t} & -0{,}5\,\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Ha $t = 0$, akkor helyesen $\boldsymbol{I}$ adódik. Könnyen ellenőrizhető, hogy az exponenciális mátrixfüggvény e kifejezése megegyezik a 2.3-3.5. pont 2. példája alapján előállíthatóval. A válasz számításának további menete megegyezik az ott követettel, ezért azt itt nem ismételjük meg. #

2.3-3.8. Folytonos idejű válasz közelítő számítása

A FI választ megadó (63) integrál akkor számítható zárt alakban, ha a gerjesztést egyszerű jel írja le. Általános esetben a számítást numerikusan, valamilyen *közelítő* módszerrel végezhetjük el. Erre egy elterjedt lehetőség az, hogy a választ előre rögzített vagy alkalmasan megválasztott $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_M = T$ időpontokban számítjuk. Ha ezeket „elég sűrűre" választjuk, akkor $\mathbf{y}(t)$ a választott intervallumban kellő pontossággal ismertnek tekinthető. Szükség esetén interpoláció is alkalmazható.

A továbbiakban olyan belépő gerjesztésekre szorítkozunk, amelyek végesek t véges nem-negatív értékeire. Az esetleges Dirac-impulzus összetevők hatását külön vesszük figyelembe (2.3-3.3. pont). A *lépésközre* a

$$h_k = t_{k+1} - t_k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, M-1 \tag{2.3-94}$$

jelölést fogjuk alkalmazni. Minél kisebb lépésközöket alkalmazunk, annál pontosabb lesz az eredmény, de annál több válaszértéket kell számítanunk az adott intervallum vizsgálatához. A pontosság nem csak a lépésközök csökkentésével, hanem a közelítés alkalmazott módszerével is növelhető.

Elsődleges célunk az állapotvektor meghatározása az egyes időpontokban. Ezek ismeretében a válaszvektor számítása már egyszerű feladat:

$$\mathbf{y}(t_k) = \boldsymbol{C}\,\mathbf{x}(t_k) + \boldsymbol{D}\,\mathbf{u}(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, M\,. \tag{2.3-95}$$

Az állapotvektor közelítő értékeinek számítására minden olyan eljárás alkalmas, amely használható az elsőrendű, nemlineáris

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{2.3-96}$$

vektoriális differenciálegyenlet megoldására. Esetünkben $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t)$.

A legegyszerűbb közelítések az előrelépő és a hátralépő *Euler-módszer*:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) \approx \mathbf{x}(t_k) + h_k\,\mathbf{x}'(t_k) = \mathbf{x}(t_k) + h_k\,\{\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t_k) + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t_k)\},$$
$$\mathbf{x}(t_{k+1}) \approx \mathbf{x}(t_k) + h_k\,\mathbf{x}'(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + h_k\,\{\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}(t_{k+1}) + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t_{k+1})\}.$$

Ezekből $\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k + h_k)$ kifejezhető:

$$\text{előrelépő Euler: } \mathbf{x}(t_k + h_k) \approx [\boldsymbol{I} + h_k\,\boldsymbol{A}]\,\mathbf{x}(t_k) + h_k\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t_k), \tag{2.3-97}$$

$$\text{hátralépő Euler: } \mathbf{x}(t_k + h_k) \approx [\boldsymbol{I} - h_k\,\boldsymbol{A}]^{-1}\,\{\mathbf{x}(t_k) + h_k\,\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}(t_k + h_k)\}. \tag{2.3-98}$$

További, ezeknél hatékonyabb módszereket a 2.5-2.5. pontban fogunk tárgyalni.

Az előrelépő Euler-módszer $N = 1$ rendszámú (vagyis skalár) esetben úgy értelmezhető, hogy az $x(t)$ függvényt a t_k helyen az érintőjével közelítjük, hiszen annak meredeksége a megoldandó differenciálegyenletből számítható. A hátralépő Euler-módszernél a függvényt a t_k helyen a t_{k+1} pontbeli érintőjével közelítjük, amelyet azonban magát is csak közelítően tudjuk számítani. Ennek ellenére a hátralépő Euler-módszer azonos lépésköz, sőt azonos mennyiségű számítási munka (nagyjából kétszeres lépésköz) esetén többnyire pontosabb közelítést jelent, mint az előrelépő. A megadott két összefüggés ennek az érintővel történő közelítésnek az általánosítása tetszőleges rendszámra. A bonyolultabb eljárások egy része az Euler-módszer finomítása és továbbfejlesztése.

A h_k lépésközök megválasztása komoly megfontolást igényel, ha az A mátrix sajátértékei széles tartományt fognak át, azaz ha $|\lambda_i|_{\max} >> |\lambda_i|_{\min}$ (a rendszer „stiff"). A számítás elején olyan kis lépésközt kell választanunk, hogy $h_k\,|\lambda_i|_{\max}$ is elég kicsi legyen. Előbb-utóbb azonban nagyobb lépésközt célszerű választani, különben a számítás túlságosan hosszadalmas lesz. Hasonló eljárást kell követnünk, ha a gerjesztések gyorsan és lassan változó szakaszokra bonthatók.

Többnyire egy lépésköz megválasztása után azt addig nem változtatjuk meg, amíg az állapotvektor megváltozásának egy normája nem lesz túlságosan nagy vagy túlságosan kicsi. A számítástechnikai szempontokat nem részletezzük tovább. A számítógépes programok különféle (rendszerint megválasztható) kritériumok alapján optimalizálják az alkalmazott lépésközt.

2.3-2.F. Feladatok

F-1. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = 0{,}4\,x_1 + 0{,}03\,x_2 + u\,, \qquad x_2' = x_1 + 0{,}2\,x_2\,;$$
$$y = x_2\,.$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a gerjesztés

$$(a)\; u[k] = \varepsilon[k]. \qquad (b)\; u[k] = \varepsilon[k](-0{,}1)^k.$$
$$(c)\; u[k] = \varepsilon[k](0{,}1)^k. \qquad (d)\; u[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-3].$$
$$(e)\; u[k] = 9\,\{1 - \varepsilon[k]\} + \varepsilon[k].$$

Az *(e)* esetre feltételezze a rendszer stabilitását, amit később igazolni is fogunk.

Ellenőrizze az eredményeket a $k = 0, 1$ és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel!

F-2. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = 0{,}4\,x_1 + 0{,}08\,x_2 + u\,,$$
$$x_2' = x_1 + 0{,}2\,x_2\,;$$
$$y = x_2\,.$$

Határozza meg az $y[k]$ választ, ha a gerjesztés

$$(a)\;\; u[k] = \delta[k]. \qquad (b)\; u[k] = \varepsilon[k].$$

Ellenőrizze az eredményt a $k = 0$, 1 és 2 ütemekre a lépésről lépésre módszerrel.

F-3. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}24 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u\,, \quad y = \begin{bmatrix} -0{,}2 & -0{,}24 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u\,.$$

Határozza meg a rendszer $h[k]$ impulzusválaszát!

F-4. Határozza meg annak a FI rendszernek az impulzusválaszát, amelynek állapotváltozós leírása a 2.3-3.5. pont 2. példájában adott!

***F-5.** Igazolja, hogy a (2.3-19) szerinti Frobenius-mátrix modális mátrixa $N = 3$ és egyszeres sajátértékek estén

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}.$$

Az állítás tetszőleges rendszámra kézenfekvő módon általánosítható.

***F-6.** Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszer állapotváltozós leírása egyszeres sajátértékek esetén a rendszermátrix diagonalizálása után a következő alakra hozható:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0' \\ \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^* \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_1^{*\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + D u.$$

A 0 indexű mátrixok és vektorok valósak, az 1 indexűek komplexek, a csillag a konjugáltat jelöli. Az $\boldsymbol{A}$ részmátrixok diagonálisak, elemeik a valós, illetve a komplex sajátértékek. Mutassa meg, hogy a

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \mathrm{j}\boldsymbol{I} & -\mathrm{j}\boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \frac{1}{2}\boldsymbol{I} & -\frac{1}{2}\mathrm{j}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{0} & \frac{1}{2}\boldsymbol{I} & \frac{1}{2}\mathrm{j}\boldsymbol{I} \end{bmatrix}$$

transzformációs mátrixszal a következő, valós elemű diagonális mátrixokat tartalmazó állapotváltozós leírás adódik:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0' \\ \hat{\mathbf{x}}_1' \\ \hat{\mathbf{x}}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + D u.$$

Adja meg a 2 és 3 indexű mátrixok és vektorok kifejezését az 1 indexűekkel! Milyen célszerűbb alakra rendezhető át ez az állapotváltozós leírás?

***F-7.** Adott egy DI, lineáris, invariáns rendszer állapotegyenlete és $\mathbf{x}[0]$ kezdeti állapota, N az állapotváltozók száma.

Hogyan kell megválasztani az $u[k]$ gerjesztés-értékeket ($k = 0, 1, \ldots, N-1$) ahhoz, hogy $k \geq N$ esetén $\mathbf{x}[k] = \mathbf{0}$ legyen? Mindig megoldható ez a feladat?

2.3-2.M. Megoldások

M-1. A sajátértékek $\lambda_1 = 0{,}1$, $\lambda_2 = 0{,}5$.

A válaszok kifejezése

$$(a)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{20}{9} - 5\,(0{,}5)^k + \frac{25}{9}\,(0{,}1)^k\right\}.$$

$$(b)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{25}{3}\,(-0{,}1)^k + \frac{25}{6}\,(0{,}5)^k - \frac{25}{2}\,(0{,}1)^k\right\}.$$

$$(c)\ y[k] = \varepsilon[k]\left\{\frac{25}{4}\,(0{,}5)^k - \frac{25}{4}\,(0{,}1)^k - 25\,k\,(0{,}1)^k\right\}.$$

(d) Az *(a)* szerinti eredmény felhasználható.

$$y[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-3]\}\left\{\frac{20}{9} - 5\,(0{,}5)^k + \frac{25}{9}\,(0{,}1)^k\right\} +$$
$$+\ \varepsilon[k-3]\left\{4{,}375\,(0{,}5)^{k-3} - 2{,}775\,(0{,}1)^{k-3}\right\}.$$

(e) A kezdeti értékek $x_1[0] = 16$ és $x_2[0] = 20$. Ezek felhasználásával

$$y[k] = \frac{20}{9} + 40\,(0{,}5)^k - \frac{200}{9}\,(0{,}1)^k,\quad k \in \mathbf{N}.$$

M-2. A sajátértékek $\lambda_1 = 0{,}6$, $\lambda_2 = 0$. Ebből $\boldsymbol{A}^k = \lambda_1^{k-1}\boldsymbol{A}$, $k = 1, 2, \ldots$ és

$$(a)\ y[k] = \varepsilon[k-2]\,(0{,}6)^{k-2}.$$
$$(b)\ y[k] = \varepsilon[k-2]\left\{2{,}5 - 1{,}5\,(0{,}6)^{k-2}\right\}.$$

M-3. A sajátértékek $\lambda_1 = 0{,}6$, $\lambda_2 = 0{,}4$, $\lambda_0 = 0$. A Lagrange-mátrixok

$$\boldsymbol{L}_1 = \frac{\boldsymbol{A}}{\lambda_1}\,\frac{\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I}}{\lambda_1 - \lambda_2},\quad \boldsymbol{L}_2 = \frac{\boldsymbol{A}}{\lambda_2}\,\frac{\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

$\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{I}$ és $\lambda_1\boldsymbol{L}_1 + \lambda_2\boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{A}$ teljesül. Figyelembe véve, hogy $k = N - M = 1$ esetén az $\boldsymbol{A}^{k-1} = \boldsymbol{I}$ tag nem számolható a Lagrange-mátrixokkal, kapjuk hogy

$$h[k] = D\,\delta[k] + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\,\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{k-1}\,\mathbf{B}.$$

A szorzásokat elvégezve:

$$h[k] = \delta[k] + 1{,}5\,\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\left\{0{,}98\,(0{,}6)^{k-2} + 0{,}28\,(0{,}4)^{k-2}\right\}.$$

Ez megegyezik a 2.2-2. szakasz 1. példájában kapottal, mivel a vizsgált rendszeregyenlet és állapotváltozós leírás ugyanazt a rendszert jellemzik (2.2-1.F-3. feladat).

M-4. Felhasználva az idézett példát és a (65)-öt kapjuk, hogy $h(t) = \varepsilon(t)\left\{-2\,\mathrm{e}^{-t} + 7\,\mathrm{e}^{-3t}\right\}$. A megoldást most teljesen mechanikusan tudjuk előállítani szemben a megfelelő rendszeregyenlet megoldásával (2.2-2.4. pont 2. példa).

***M-5.** A sajátértékek kielégítik a $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$ egyenletet. Ennek alapján könnyen belátható az $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\Lambda}$ egyenlet érvényessége.

***M-6.** A (9) felhasználásával adódik, hogy

$$\boldsymbol{A}_2 = \mathcal{R}e\{\boldsymbol{A}_1\},\ \boldsymbol{A}_3 = \mathcal{I}m\{\boldsymbol{A}_1\};$$
$$\boldsymbol{B}_2 = 2\,\mathcal{R}e\{\boldsymbol{B}_1\},\ \boldsymbol{B}_3 = -2\,\mathcal{I}m\{\boldsymbol{B}_1\};\ \boldsymbol{C}_2 = \mathcal{R}e\{\boldsymbol{C}_1\},\ \boldsymbol{C}_3 = \mathcal{I}m\{\boldsymbol{C}_1\}.$$

Célszerű az állapotváltozók sorrendjét úgy megválasztani, hogy a konjugált párt alkotó sajátértékekhez tartozók kövessék egymást, akkor a transzformált rendszermátrix blokk-diagonális lesz 1×1 és 2×2 méretű blokkokkal.

***M-7.** Az állapotegyenlet megoldása alapján $\mathbf{x}[N]$ kifejezhető. Átrendezve

$$\left[\boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{A}^{N-2}\boldsymbol{B}\quad \ldots\quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\right]\left[u[0]\quad u[1]\quad \ldots\quad u[N-1]\right]^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}[N] - \boldsymbol{A}^N\mathbf{x}[0].$$

A lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a keresett $u[k]$ értékeket, és természetesen $u[k]=0,\, k \geq N$. A feladat nem megoldható, ha a bal oldali mátrix nem invertálható (ekkor a rendszert nem vezérelhetőnek nevezik). Látható, hogy tetszőleges $\mathbf{x}[N]$ végső állapot is előírható. A feltétel $N' > N$ időpontra is vonatkozhat, de ekkor a megoldás nem egyértelmű (bizonyos $u[k]$ értékek megválaszthatók).

2.3-4. Aszimptotikus stabilitás

2.3-4.1. Az aszimptotikus stabilitás feltételei

A rendszer állapotváltozós leírása mélyebb betekintést ad a rendszer viselkedésébe, mit az impulzusválasszal vagy a rendszeregyenlettel történő leírás. Ez lehetővé teszi egy, a GV stabilitásnál szigorúbb stabilitás értelmezését.

A lineáris, invariáns rendszer *aszimptotikusan stabilis,* ha a gerjesztetlen rendszer minden *állapotváltozója* nullához tart bármely kezdeti állapot esetén:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{DI}:\ \mathbf{u}[k]=0,\, k\in\mathbf{N} \Rightarrow\ \mathbf{x}[k]\to 0,\ k\to\infty \\ \mathrm{FI}:\ \mathbf{u}(t)=0,\, t\in\mathbf{R}_+ \Rightarrow\ \mathbf{x}(t)\to 0,\ t\to\infty \end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{aszimptotikusan stabilis rendszer} \quad (2.3\text{-}99)$$

Az „aszimptotikusan stabilis" elnevezésből nem derül ki egyértelműen, hogy az állapotváltozókra vonatkozó feltételről van szó, nem csak a válasz aszimptotikus viselkedéséről.

Ha a gerjesztetlen rendszer állapotváltozói nullához tartanak, akkor a válaszok is nullához tartanak. A fordított állítás nem mindig igaz. Előfordulhat ugyanis, hogy a gerjesztetlen rendszer minden válasza nullához tart, de egyes állapotváltozókra ez nem érvényes. Erre a nagyon speciális esetre később még visszatérünk.

Ha a gerjesztés nulla pozitív időkre, akkor az állapotvektor megegyezik a zérus gerjesztésű összetevőjével. A (61)-ből következik, hogy ekkor a gerjesztetlen rendszer állapotvektorának időfüggése

$$\mathbf{x}[k] = \boldsymbol{A}^k\,\mathbf{x}[0],\quad k\in\mathbf{N};\quad \mathbf{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\,\mathbf{x}(-0),\quad t\in\mathbf{R}_+.$$

A mátrixfüggvények és a mátrix sajátértékeinek kapcsolatából következik az alábbi állítás helyessége.

A lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor *aszimptotikusan stabilis,* ha A rendszermátrixának minden *sajátértéke* az egységsugarú körön belül, illetve a bal félsíkon van

$$\left.\begin{array}{l}\text{DI: minden } |\lambda_i| < 1 \\ \text{FI: minden } \mathcal{R}e\{\lambda_i\} < 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \text{aszimptotikusan stabilis rendszer} \qquad (2.3\text{-}100)$$

A tétel akkor is igaz, ha a sajátértékek többszörösek, mivel a $k^p \lambda_i^k$ illetve a $t^p e^{\lambda_i t}$ sajátfüggvények nullához tartanak bármely $p \in \mathbf{N}$ esetén, ha az exponenciális tényező nullához tart.

Ha a fenti feltételek csak úgy teljesülnek, hogy < nem érvényes, de ≤ már érvényes, továbbá az egységnyi abszolút értékű (az egységsugarú körre eső) illetve a nulla valós részű (a képzetes tengelyre eső) sajátértékek egyszeresek, akkor a rendszer nem aszimptotikusan stabilis, de az aszimptotikus stabilitás *határhelyzetében* van. Ekkor a gerjesztetlen rendszer állapotváltozói nem tartanak nullához, de végesek maradnak: vagy egy állandóhoz vagy egy korlátos periodikus jelhez tartanak. A modellezett objektumtól is függ, hogy egy ilyen rendszert stabilisnak tekintünk-e vagy nem.

Ha a nem aszimptotikusan stabilis rendszer nincs az aszimptotikus stabilitás határhelyzetében, akkor aszimptotikusan *labilisnak* nevezhető. Az ilyen rendszer csak korlátozott feltételek mellett (például csak bizonyos időpontig) tekinthető lineárisnak.

*2.3-4.2. A rendszeregyenlet és a rendszermátrix sajátértékei

Vizsgáljuk meg egy rendszer rendszeregyenletének $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sajátértékeinek és rendszermátrixának vagy állapotegyenletének $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ sajátértékeinek kapcsolatát.

Az esetek többségében a *sajátértékek* kétféle rendszere azonos, azaz $n = N$ és megfelelő sorszámozás választásával $\lambda_i(\text{rendszeregyenlet}) = \lambda_i(\text{rendszermátrix})$.

Előfordulhat azonban, hogy fellépnek „járulékos" sajátértékek. A lehetséges eseteket a következő táblázatos összeállítás szemlélteti:

rendszeregyenlet	állapotegyenlet		
$(p + q = n)$	$(p + r = N)$		
λ_i	λ_i	$i = 1, 2, \ldots, p;$	(2.3-101)
λ_{yi}	-	$i = 1, 2, \ldots, q;$	
-	λ_{xi}	$i = 1, 2, \ldots, r.$	

Ennek belátásához tekintsük egy rendszernek a rendszeregyenletét és állapotváltozós leírását, amelyek a 2.3-1.4. pontban megadott módon kapcsolódnak egymáshoz. Ezek sajátértékei nyilván megegyeznek.

Késleltessük most a DI rendszeregyenletet 1, 2,..., q ütemmel illetve képezzük a FI rendszeregyenlet 1., 2.,..., q-adik deriváltját. Szorozzuk meg az egyenleteket tetszőleges $c_1, c_2, \ldots, c_q$ állandókkal és adjuk össze az egyenleteket. Most egy olyan új rendszeregyenletünk van, amely az eredetivel megegyező rendszert ír le. Elemi megfontolásokkal belátható, hogy az új rendszeregyenlet karakterisztikus egyenlete

$F(\lambda)\cdot F_q(\lambda)=0$, ahol $F(\lambda)$ az eredeti rendszeregyenletnek (és esetünkben az állapotegyenletnek is) a karakterisztikus polinomja, míg $F_q(\lambda)$ egy q-adfokú polinom, amelynek együtthatói a c_i választott állandók. Az új rendszeregyenletnek ezek szerint q számú olyan sajátértéke van, amely nem sajátértéke az állapotegyenletnek.

Egészítsük most ki az állapotváltozókat r számú új állapotváltozóval, az állapotegyenletet r számú új egyenlettel. Válasszuk az $\boldsymbol{A}$ mátrix új oszlopainak első N sorát és a $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ sorvektor új oszlopait zérusnak. Ekkor egy új állapotváltozós leíráshoz jutunk, amely a gerjesztés-válasz kapcsolat szempontjából ugyanazt a rendszert írja le, mint az eredeti. Az új állapotegyenlet sajátértékei egyrészt az eredeti egyenlet sajátértékei, továbbá r számú új sajátérték, amelyek nem sajátértékei a rendszeregyenletnek.

A gyakorlatban a különböző leírásokat vagy fizikai megfontolások vagy mérési eredmények alapján kapjuk és nem az előzőleg leírt, értelmetlennek tűnő átalakításokkal. Célunk csak annak bemutatása volt, hogy megjelenhetnek a rendszeregyenletben vagy az állapotegyenletben olyan sajátértékek, amelyek csak az egyik leíráshoz tartoznak, a másikhoz nem. Ennek egy következményét tárgyaljuk a következő pontban.

A modellezett objektum ismerete nélkül nem lehet eldönteni, hogy a különböző, azonos GV kapcsolatot leíró rendszer közül melyik jelenti a legjobb leírást, tehát hogy mely sajátértékeknek van fizikai realitásuk.

2.3-4.3. Aszimptotikus stabilitás és gerjesztés-válasz stabilitás

A lineáris, invariáns rendszer akkor és csakis akkor GV stabilis (korlátos gerjesztéshez korlátos válasz tartozik), ha impulzusválasza abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható (2.1-1.3. és 2.3. pont). Az impulzusválasz (39) kifejezéséből következik, hogy az akkor rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ha $\boldsymbol{A}^k \to 0, k \to \infty$ illetve $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \to 0, t \to \infty$ teljesül. A mátrixfüggvényeknek a Lagrange- vagy az Hermite-mátrixszokkal kifejezett alakjából (2.3-3.5. és 6. pont) következik, hogy ez teljesül, ha a rendszermátrix sajátértékei a DI esetben az egységsugarú kör belsejében, a FI esetben a bal félsíkon helyezkednek el. A (100) figyelembe vételével ebből az alábbi állítás következik.

A lineáris, invariáns rendszer biztosan *GV stabilis,* ha *aszimptotikusan stabilis.*

A GV stabilitásnak ez az elegendő feltétele azonban – legalábbis elméletileg – nem szükséges is.

Ha a rendszer nem aszimptotikusan stabilis, de GV stabilis, akkor el kell döntenünk, hogy a rendszert stabilisnak tekintjük vagy nem. Ha az állapotváltozók a modellezett objektum fizikai változói által meghatározottak, akkor többnyire nem tekintjük az ilyen rendszert stabilisnak. A GV stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis rendszer egy olyan objektum modelljének tekinthető, amelyen belül katasztrófák állhatnak elő, de ennek nincs kihatása a GV kapcsolatra. Előfordulhat azonban, hogy az állapotváltozós leírás nem megfelelő modellje az objektumnak. Ez a helyzet például ha egy célszerűtlen hálózati modellből adódott (l. a következő fejezetet). Ha a rendszer teljesen vezérelhető és teljesen megfigyelhető (ezeket a fogalmakat nem tárgyaljuk), akkor a GV stabilis rendszer aszimptotikusan stabilis is.

Az aszimptotikus stabilitás és a GV stabilitás mellett más stabilitási fogalmak is használatosak. Ennek egyik oka az, hogy e két stabilitási fogalom nehezen terjeszthető ki nemlineáris vagy variáns rendszerekre. Igen elterjedt a Ljapunov értelmű stabilitás, amelynek eldöntése azonban korántsem egyszerű (2.5-2.6. pont). Másrészt a nemlineáris

rendszer egyensúlyi pontjának vagy pontjainak stabilitása többnyire eldönthető a lineáris rendszerre vonatkozó aszimptotikus stabilitás fogalmának és technikájának felhasználásával, amint azt a 2.5-2.2. pontban látni fogjuk.

2.3-4.F. Feladatok

F-1. Egy rendszermátrix rendezői

$$A_{11}=1,\quad A_{12}=-1,$$
$$A_{21}=1,\quad A_{22}=P.$$

Határozza meg a P valós paraméter azon értéktartományát, amelyben a DI vagy a FI rendszer aszimptotikusan stabilis!

F-2. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Mutassa meg, hogy a rendszer nem aszimptotikusan stabilis! Válassza meg C_1 és C_2 értékét úgy, hogy a rendszer mégis GV stabilis legyen, ha ez lehetséges!

F-3. Oldja meg az előző feladatot, ha a megadott állapotváltozós leírás egy FI rendszerre vonatkozik!

F-4. Adjon feltételeket az A rendszermátrix elemeire $N = 2$ esetén, amelyek biztosítják a DI illetve a FI rendszer aszimptotikus stabilitását!

F-5. Egy DI illetve egy FI rendszer rendszermátrixának egy sajátértéke nulla.
Lehet-e aszimptotikusan stabilis ez a rendszer?

F-6. A rendszermátrix egy sajátértéke

(*a*) $\lambda_a = -1$,

(*b*) $\lambda_b = +1$,

(*c*) két sajátértéke konjugált komplex pár: $\lambda_c = +\mathrm{j}$, $\lambda_c^* = -\mathrm{j}$.

Aszimptotikusan stabilis-e a DI illetve a FI rendszer a három esetben?

F-7. Egy másodrendű rendszer rendszermátrixában $A_{12} = 0$.
Adja meg az A_{11}, A_{21} és A_{22} paraméterek azon értéktartományát, amelyben a DI illetve a FI rendszer aszimptotikusan stabilis!
Adja meg a stabilitási tartomány ábráját a háromdimenziós paramétertérben, ha az egyszerűen lehetséges!
Lehet-e ez a rendszer GV stabilis, ha nem aszimptotikusan stabilis?

2.3-4.M. Megoldások

M-1. A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 - (1+P)\lambda + (1+P) = 0.$$

Az aszimptotikus stabilitás szükséges és elegendő feltételei DI illetve FI rendszer esetén (2.2-3.2. pont):

DI:	FI:
$1-(1+P)+(1+P)>0,$	$-(1+P)>0,$
$1+(1+P)+(1+P)>0,$	$1+P>0;$
$1-\lvert 1+P\rvert>0;$	

vagyis

$-1{,}5<P<0;,$ nincs ilyen P érték.

M-2. Az állapotváltozós leírás (vagy a rendszermátrix) karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 1{,}5\,\lambda - 1 = 0.$$

Az együtthatókra vonatkozó feltételek nincsenek kielégítve. Valóban: a két sajátérték $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = 2$. A λ_2 sajátérték az egységsugarú körön kívüli. Az $\boldsymbol{A}$ mátrix Lagrange-mátrixai

$$\mathbf{L}_1 = \frac{-1}{2{,}5}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Az impulzusválaszban akkor nem fog a $\boldsymbol{C}\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{B}\,\lambda_2^k$ tag szerepelni, ha az exponenciális függvény szorzója nulla:

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0{,}4\,C_1 + 0{,}8\,C_2 = 0,$$

vagyis ha $C_1 = -2C_2$, ahol C_2 tetszőleges. Ha azonban például $C_1 = -2{,}000001\,C_2$, akkor a nem aszimptotikusan stabilis rendszer nem is GV stabilis.

M-3. Az előző megoldás most is érvényes, mert λ_2 a jobb félsíkon van.

***M-4.** A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0,$$
$$a_1 = -A_{11} - A_{22}, \quad a_2 = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \equiv \det(\mathbf{A}).$$

Ezután alkalmazható a (2.2-41) illetve a (2.2-48) kritériumrendszer.

Az eredményeket nehéz áttekinthető alakra hozni (például ábrázolni) a négy független paraméterrel kifejezve, amelyek a stabilitás szempontjából két független paraméterre redukálhatók.

M-5. A DI esetben a rendszer aszimptotikusan stabilis. A FI esetben a rendszer nem aszimptotikusan stabilis, sőt ha $\lambda = 0$ a rendszermátrixnak többszörös sajátértéke, akkor a rendszer (aszimptotikusan) labilisnak is nevezhető.

M-6. A DI esetben a rendszer egyik megadott (az egységsugarú körre eső) sajátérték esetén sem aszimptotikusan stabilis; ha a megadott sajátértékek mindegyike egyszeres, akkor a rendszer az (aszimptotikus) stabilitás határhelyzetében van; ha a megadott sajátértékek bármelyike többszörös, akkor a rendszer (aszimptotikusan) labilis. A FI esetben $\lambda_a = -1$: a rendszer aszimptotikusan stabilis; $\lambda_b = +1$: a rendszer nem aszimptotikusan stabilis (aszimptotikusan labilis); $\lambda_c = +\mathrm{j}$, $\lambda_c^* = -\mathrm{j}$: a rendszer nem aszimptotikusan stabilis; ha e sajátérték-pár egyszeres, akkor a rendszer az aszimptotikus stabilitás határhelyzetében van, ha többszörös, akkor a rendszer (aszimptotikusan) labilis.

M-7. A két sajátérték $\lambda_1 = A_{11}$, $\lambda_2 = A_{22}$, vagyis az aszimptotikus stabilitás nem függ A_{12} értékétől. Ebből következik, hogy az aszimptotikus stabilitás feltételei:

$$\text{DI:} \quad -1 < A_{11}, A_{22} < 1$$

$$\text{FI:} \quad A_{11}, A_{22} < 0$$

A stabilitási tartomány ábrázolása az A_{11}, A_{22} paramétersíkon nagyon egyszerű.

A nem aszimptotikusan stabilis rendszer lehet GV stabilis, ha a λ_1 sajátérték a stabilitási tartományba esik és a válasz nem függ az x_2 állapotváltozótól.

A feladat megoldható az előző feladat megoldása alapján is, de az valamivel több megfontolást igényel.

2.4. Jelfolyam hálózatok

Az előző fejezetekben a rendszert, mint gerjesztéseinek és válaszainak kapcsolatát tekintettük, a lineáris, invariáns rendszer jellemzésére különféle matematikai leírásokat használtunk (impulzusválasz, rendszeregyenlet, állapotváltozós leírás). Ebben a fejezetben lineáris, invariáns, kauzális rendszerek jelfolyam hálózattal (röviden: hálózattal) történő leírását tárgyaljuk. Látni fogjuk, hogy az állapotváltozók egyszerűen értelmezhetők a rendszer hálózati reprezentációjában.

A 2.4-1. szakaszban az alapfogalmakat és az általános törvényeket tárgyaljuk. Ennek során definiáljuk a lineáris jelfolyam hálózat komponenseit, karakterisztikájukat és összekapcsolási szabályokat.

A 2.4-2. szakaszban megmutatjuk, hogy miként állítható elő a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírása és rendszeregyenlete, értelmezzük a hálózat regularitását és stabilitását.

A 2.4-3. szakaszban megmutatjuk, hogy akár az állapotváltozós leírásával, akár a rendszeregyenletével jellemzett rendszerhez miként rendelhető hálózati reprezentáció. A realizációs feladatra a 4.3-2. szakaszban még visszatérünk. A nemlineáris és variáns rendszerek hálózati reprezentációjával a 2.5-1.3. pontban foglalkozunk.

2.4-1. Általános törvények

2.4-1.1. Elemi komponensek

Mint már említettük (1.3-2.1. pont) egy jelfolyam hálózat – amelyre ebben a fejezetben a *hálózat* rövidebb elnevezést is alkalmazni fogjuk – *komponensek* összekapcsolását jelenti.

Minden komponensnek meghatározott számú $p_1, p_2, \ldots$ bemeneti változója és $q_1, q_2, \ldots$ kimeneti változója lehet.

A komponens *karakterisztikája* kifejezi kimeneti változóit a bemeneti változóival.

Részletesebben csak olyan komponensekkel foglakozunk, amelyeknek legfeljebb egy p bemeneti és legfeljebb egy q kimeneti változójuk van. Az általánosabb lineáris komponens ugyanis helyettesíthető ilyenek összekapcsolásával (2.4-1.3. pont).

A továbbiakban elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózatok vizsgálatára szorítkozunk. Sokan csak az ilyen hálózatokat nevezik „hálózatnak".

Az általunk vizsgálandó lineáris, invariáns, kauzális jelfolyam hálózatok *elemi komponensei* a következők:

A komponens neve	DI karakterisztikája	FI karakterisztikája	
forrás	$q[k] = u[k]$	$q(t) = u(t)$	
nyelő	$p[k] = y[k]$	$p(t) = y(t)$	
erősítő	$q[k] = K\,p[k]$	$q(t) = K\,p(t)$	(2.4-1)
DI késleltető	$q[k] = p[k-1]$	–	
FI integrátor	–	$q(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	

Az erősítő *memóriamentes* komponens, a késleltető illetve az integrátor *dinamikus* (nem memóriamentes, memóriával bíró) komponensek.

Az u változó az adott DI illetve FI jel, az y változó a keresett DI illetve FI jel. Az erősítő és a késleltető illetve az integrátor *lineáris* komponensek (nagyon egyszerű lineáris rendszerek), a forrás és a nyelő nem tekinthető lineáris komponensnek (habár nemlineárisnak sem szokás nevezni őket). Természetesen u, illetve y a hálózat által reprezentált rendszer gerjesztését, illetve válaszát jelenti.

A *késleltető* illetve az *integrátor* kimeneti változójára az x jelet fogjuk használni. Később látni fogjuk, hogy ez célszerű jelölés, mert ezek lehetnek a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozói. Jelölje a késleltető illetve az integrátor bemeneti változóját p_x, akkor a karakterisztikájuk

$$\text{DI}: \; x[k] = p_x[k-1] \qquad \text{FI}: \; x(t) = \int_{-\infty}^{t} p_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

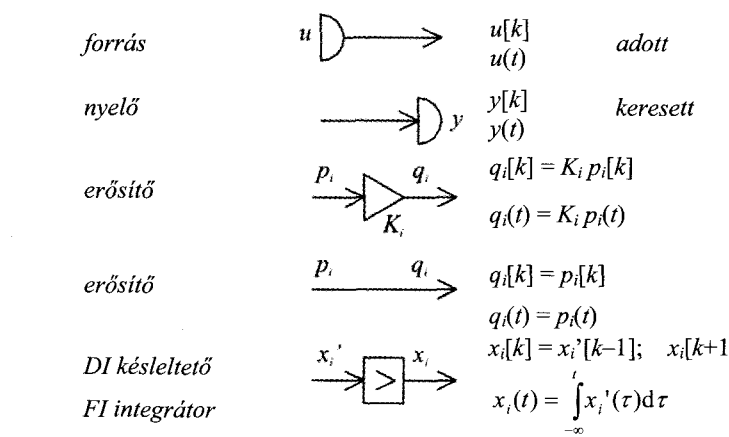
A k változó helyére $k+1$ változót írva illetve a FI karakterisztikát t szerint differenciálva kapjuk

$$\text{DI}: \; x'[k] = p_x[k]; \qquad \text{FI}: \; x'(t) = p_x(t), \tag{2.4-2}$$

ahol $x'[k] \equiv x[k+1]$ illetve $x'(t)$ az $x(t)$ általánosított deriváltja. Míg az első alak az oksági kapcsolatot fejezi ki (késleltetés vagy integrálás), a második alak kényelmes jelölésnek tekintendő. Összefoglalva a dinamikus komponensek karakterisztikája a következő:

Az i-edik DI *késleltető* kimeneti változójának jele x_i, bemeneti változójának jele x_i'.
Az i-edik FI *integrátor* kimeneti változójának jele x_i, bemeneti változójának jele x_i'.

Az 1. ábrán láthatjuk a lineáris, invariáns, kauzális (a FI esetben: differenciális) rendszereket reprezentáló jelfolyam hálózat elemi komponenseinek rajzjelét és karakterisztikáját.



2.4-1. ábra A vizsgált hálózatok elemi komponensei a forrás, a nyelő, az erősítő K_i vagy 1 erősítéssel, a DI késleltető illetve a FI integrátor

A következő szakaszban látni fogjuk, hogy ilyen komponensek összekapcsolásával realizálhatók azok a rendszerek, amelyek rendszeregyenlete a 2.2. fejezetben, állapotváltozós leírása a 2.3. fejezetben megadott.

A karakterisztikák általánosítása lineáris, *variáns,* kauzális hálózatokra kézenfekvő. Csak az erősítő karakterisztikája más variáns esetben. A variáns erősítő K erősítése a k illetve a t idő ismert függvénye, tehát a variáns erősítő karakterisztikája $q_i[k]=K_i[k]p_i[k]$, $q_i(t)=K_i(t)p_i(t)$. Látni fogjuk, hogy az állapotváltozós leírás előállítása ebben az általánosabb esetben ugyanúgy történik, mint az invariánsé.

Nemlineáris jelfolyam hálózatokkal a 2.5-1.3. pontban foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy csak az erősítő általánosítására lesz szükség.

A FI rendszert reprezentáló hálózat egy további kauzális, lineáris, invariáns elemi komponense a FI idejű késleltető, amelynek karakterisztikája $q_i(t)=p_i(t-T_i), T_i>0$. Az ilyen komponenst is tartalmazó hálózat nem differenciális FI rendszert reprezentál, állapotváltozós leírása nem a 2.3. fejezetben megadott alakú. Ennek megoldása az időtartományban nehéz. Mint látni fogjuk, a frekvencia-tartományban és a komplex frekvencia-tartományban a FI késleltető vagy sok más lineáris, invariáns komponens figyelembe vétele sem okoz elvi nehézséget (3.3. és 4.4. fejezet).

2.4-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek

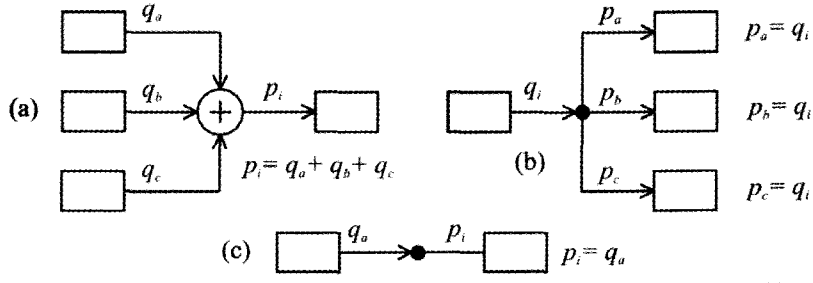
A jelfolyam hálózat összekapcsolási szabályait és kényszereit az 1.3-2.1. pontban és az 1.3-1. ábrán már megfogalmaztuk, itt csak megismételjük őket.

Egy *összegező csomópontban* egyesíthető tetszőleges számú kimeneti pólus és egyetlen bemeneti pólus. Az egyetlen bemeneti pólushoz tartozó bemeneti változó azon kimeneti változók összege, amelyek a csomópontban egyesített bemeneti pólusokhoz vannak rendelve. A 2a ábra jelöléseivel

$$p_i = q_a + q_b + \dots \tag{2.4-3}$$

Egy *szétágazó csomópontban* egyesíthető egyetlen kimeneti pólus és tetszőleges számú bemeneti pólus. Minden bemeneti pólushoz rendelt bemeneti változó megegyezik az egyetlen kimeneti pólushoz rendelt kimeneti változóval. A 2b ábra jelöléseivel

$$p_a = q_i\,,\quad p_b = q_i,\ \dots \tag{2.4-4}$$



2.4-2. ábra A csomópontok ábrázolása: (a) összegező csomópont; (b) szétágazó csomópont; (c) egyszerű csomópont

Ha csak egyetlen kimeneti és egyetlen bemeneti változó van egy csomópontban egyesítve, akkor ez az *egyszerű csomópont* tekinthető akár összegező, akár szétágazó csomópontnak. A 2c ábrán látható módon az utóbbi a szokásosabb.

A következő szakaszban módszert fogunk adni az elemi komponensekből álló jelfolyam hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának előállítására. A rendszeregyenlet ebből (2.3-1.5. pont) egyszerű hálózatokra közvetlenül is előállítható. A rendszeregyenletet később tárgyalandó (3. vagy 4. fejezet) módszerekkel egyszerű előállítani.

*2.4-1.3. Sokváltozós lineáris komponens helyettesítése

Egy komponensnek általában P számú p_i bemeneti változója és Q számú q_i kimeneti változója van. A karakterisztika általános alakja

$$q_i = \mathscr{H}_i\{p_1, p_2, \ldots, p_P\}, \quad i = 1, 2, \ldots, Q. \tag{2.4-5}$$

A $\mathscr{H}_i$ operátorok lehetnek a k illetve a t idő függvényei is.

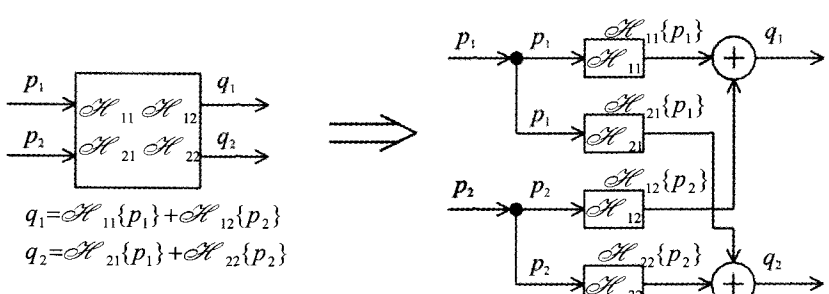
Lineáris komponens esetén $P \geq 1$ és $Q \geq 1$, hiszen a forrás és a nyelő nem lineáris komponensek. Egy *lineáris komponens* $\mathscr{H}_i$ operátorai lineárisak, ezért, a karakterisztika általános alakja

$$q_i = \mathscr{H}_{i,1}\{p_1\} + \mathscr{H}_{i,2}\{p_2\} + \ldots + \mathscr{H}_{i,P}\{p_P\}, \quad i = 1, 2, \ldots, Q, \tag{2.4-6}$$

ahol minden $\mathscr{H}_{i,j}$ operátor lineáris. Ha a komponens lineáris és invariáns, akkor a $\mathscr{H}_{i,j}$ operátorok nem függnek a k illetve a t időtől.

Egy olyan lineáris komponens, amelynek P számú bemeneti és Q számú kimeneti változója van, a (6)-ból következően helyettesíthető $P \times Q$ számú egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponens alkalmas összekapcsolásával. A $P = 2, Q = 2$ eset látható a 3. ábrán. Az általánosítás kézenfekvő, habár az ábrát nehéz áttekinthetően megrajzolni.

Egyesek az összegező és a szétágazó csomópont is komponensnek tekintik. Ezek azonban nem helyettesíthetők egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponensekkel. A „szétágazó" helyett a „szétágaztató" elnevezés pontosabb lenne.



2.4-3. ábra Két-bemenetű, két-kimenetű lineáris komponens helyettesítése egy-bemenetű, egy-kimenetű lineáris komponensek összekapcsolásával

A helyettesítés számítástechnikai szempontból nem egyértelműen előnyös, hiszen megjelennek új változók. Célszerűbb lehet ezért lemondani az elemi komponensekre szorítkozó leírásról. A továbbiakban azonban csak elemi komponenseket tartalmazó hálózatokkal foglalkozunk.

2.4-1.F. Feladatok

F-1. Értelmezzen olyan DI illetve FI elemi lineáris komponenst, amelyet két valós paraméter jellemez, és amely feleslegessé teszi az erősítő és a késleltető illetve az integrátor alkalmazását.

F-2. Egy két-bemenetű, két-kimenetű lineáris DI komponens karakterisztikája

$$q_1[k]=K_1 p_1[k-1]+K_2 p_2[k],$$
$$q_2[k]=K_3 p_1[k-1]+K_4 p_2[k-1].$$

Adjon meg egy olyan összetett komponenst, amely csak elemi komponenseket tartalmaz!

F-3. Egy két-bemenetű, két-kimenetű lineáris FI komponens karakterisztikája

$$q_1(t)=K_1\int_{-\infty}^{t} p_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau+K_2 p_2(t),$$

$$q_2(t)=K_3\int_{-\infty}^{t} p_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau+K_4\int_{-\infty}^{t} p_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Adjon meg egy olyan összetett komponenst, amely csak elemi komponenseket tartalmaz!

***F-4.** Igazolja, hogy a $q=(p_1+p_2)^2$ karakterisztikájú nemlineáris DI illetve FI komponens nem helyettesíthető a 3. ábrán láthatóhoz hasonló módon.

***F-5.** Igazolja, hogy a $q=\mathscr{H}\{p\}+u$ karakterisztikájú (u adott) nemlineáris DI illetve FI komponens helyettesíthető a 3. ábrán láthatóhoz hasonló módon.

2.4-1.M. Megoldások

M-1. Tekintsük a következő karakterisztikájú DI illetve FI komponenst:

$$\mathrm{DI}:\ q[k]=K\,p[k-n];$$

$$\mathrm{FI}: q(t)=K\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\tau_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{\tau_1} p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\cdots\mathrm{d}\tau_{n-2}\,\mathrm{d}\tau_{n-1}.$$

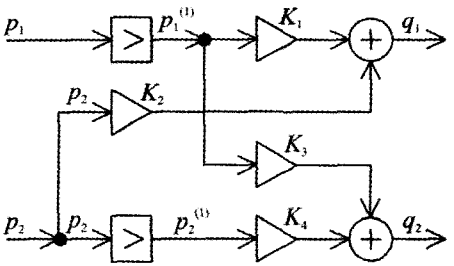
Ez a komponens erősítőt reprezentál, ha $n=0$ és késleltetőt vagy integrátort reprezentál, ha $K=1$ és $n=1$.

M-2. Egy realizáció látható a 4. ábrán (a következő oldalon), amelyen $p_i^{(k)}[k]=p_i[k-1]$.

M-3. A 4. ábra hálózata most is egy lehetséges kapcsolás, amelyen $p_i^{(1)}$ a $p_i(t)$ deriváltja.

***M-4.** A karakterisztika egy más alakja

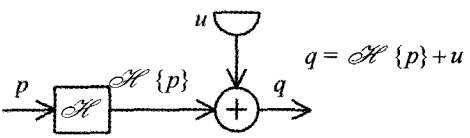
$$q=p_1^2+p_2^2+2\,p_1\,p_2.$$



2.4-4. ábra A 2. vagy a 3. feladatban adott karakterisztikájú, két-bemenetű, két-kimenetű lineáris komponens egy helyettesítése elemi komponensek összekapcsolásával

Ebből következik, hogy a két négyzetre emelő nemlineáris komponensen kívül egy további nemlineáris komponensre, a szorzóra is szükség van, amelynek két bemenete és egy kimenete van.

***M-5.** Egy lehetséges kapcsolás az 5. ábrán látható. Ha a $\mathscr{H}$ operátor lineáris, akkor a karakterisztika inhomogén lineáris (tehát nemlineáris). Ha a $\mathscr{H}$ operátor lineáris, akkor az általánosítás sok-bemenetű, sok-kimenetű komponensre kézenfekvő.



2.4-5. ábra Egy nemlineáris, egy-bemenetű, egy-kimenetű komponens helyettesítése.

2.4-2. Az állapotváltozós leírás előállítása

2.4-2.1. Elemi megfontolások

Ebben a szakaszban megvizsgáljuk, miként állítható elő az elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózat, illetve az általa reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának normálalakja:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \boldsymbol{A}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\,\mathbf{u}\,, \\ \mathbf{y} &= \boldsymbol{C}\,\mathbf{x} + \boldsymbol{D}\,\mathbf{u}\,, \end{aligned} \tag{2.4-7}$$

ahol a DI esetben $\mathbf{x}'[k] \equiv \mathbf{x}[k+1]$, míg a FI esetben $\mathbf{x}'(t)$ az $\mathbf{x}(t)$ általánosított deriváltja. Példáink során egy gerjesztésre és egy válaszra szorítkozunk, amikor $\boldsymbol{B} = \mathbf{B}$ oszlopvektor, $\boldsymbol{C} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ sorvektor és $\boldsymbol{D} = D$ skalár. Az eljárások azonban alkalmazhatók olyan hálózatokra is, amelyek sok-gerjesztésű, sok-válaszú rendszereket reprezentálnak.

A választott jelölések a következő állítást fejezik ki.

Az i-edik DI *késleltető* illetve az i-edik FI *integrátor* x_i *kimeneti változója* választható a rendszer i-edik *állapotváltozójának*. A rendszer N rendszáma megegyezik a hálózat által tartalmazott késleltetők illetve integrátorok számával.

Az *állapotegyenlet* az x_i' bemeneti változók kifejezése az x_j állapotváltozókkal és az u_j gerjesztésekkel, a *válasz állapotváltozós kifejezése* a nyelők y_i bemeneti változóinak kifejezése az x_j állapotváltozókkal és az u_j gerjesztésekkel.

Az eljárás a következő. Jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_N$ a dinamikus komponensek kimeneti változóit. Ezáltal értelmeztük a $x_1', x_2', \ldots, x_N'$ bemeneti változókat is. Kíséreljük meg előállítani az összekapcsolási kényszerek alkalmazásával az x_i' bemeneti változókat az x_j kimeneti változókkal és az u_j gerjesztésekkel. Szükség esetén egyes erősítők p_i bemeneti változóját további ismeretlenként kezeljük, mindegyiket kifejezzük a többi változóval. Ennek az erősítőnek a kimeneti változója $K_i p_i$, míg a q_i változót nem is használjuk. Az így előálló lineáris algebrai egyenletrendszerből kifejezzük az x_i' és az y_i változókat az x_j és u_j változókkal. Ezzel előállítottuk az állapotegyenletet alkotó N számú egyenletet és a válaszok kifejezését is.

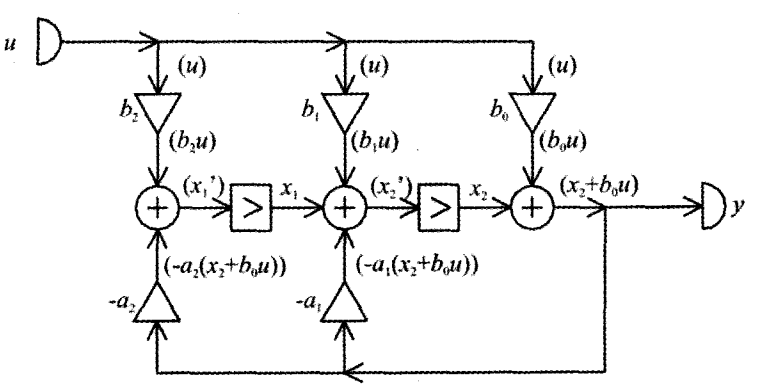
Általánosan fogalmazva: a hálózat ismeretében kellő számú lineáris algebrai egyenletet kell előállítanunk, majd az x_i' és y_i változókra megoldanunk az x_j és u_j változókat ismertnek tekintve.

A példákkal illusztrálni fogjuk, hogy az eljárás követése egyszerűbb, mint általános leírása.

Kivételesen előfordulhat, hogy a leírt eljárással nem fejezhetők ki az x_i' változók a kívánt alakban. Ekkor a hálózat *nem reguláris,* az ilyen hálózatot nem tekintjük egy rendszer megfelelő modelljének (l. a következő pontot is).

A hálózati reprezentáció az – eddig csak formálisan bevezetett – állapotváltozók egy értelmezését adja. Tudjuk, hogy az így értelmezett állapotváltozók bármely független lineárkombinációja is tekinthetők állapotváltozóknak. Ez egyben arra is utal, hogy egy rendszernek több hálózati reprezentációja is lehet (a 2.4-3. szakaszban foglakozunk az egyenletek realizálásával).

1. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az állapotváltozós leírását, amelynek egy hálózati reprezentációja a 6. ábrán látható. Az erősítésekre alkalmazott jelölések okát látni fogjuk.



2.4-6. ábra Két dinamikus komponenst tartalmazó hálózat. Ez egy másodrendű rendszer úgynevezett első kanonikus realizációja

Kijelöltük az x_1 és x_2 változókat. Zárójelben feltüntettük azokat a változókat, amelyek a szemlélet alapján kifejezhetők. Ezek a következők: x_1' és x_2', azután b_0u, b_1u, b_2u, a jobb oldali összegező csomópontnál $x_2 + b_0u$ majd ennek felhasználásával

$-a_1(x_2+b_0u)$ és $-a_2(x_2+b_0u)$. Némi gyakorlat birtokában ez „fejben" elvégezhető. Esetünkben nem volt szükség járulékos változók bevezetésére. Nem minden hálózat egyenletei írhatók fel ilyen egyszerű módon.

Fejezzük most ki a késleltetők vagy az integrátorok bemeneti változóit:

$$x_1' = -a_2(x_2+b_0u)+b_2u \equiv (0)x_1+(-a_2)x_2+(b_2-b_0a_2)u,$$
$$x_2' = x_1-a_1(x_2+b_0u)+b_1u \equiv x_1+(-a_1)x_2+(b_1-b_0a_1)u.$$

Ezzel meg is kaptuk az $\mathbf{x}'=\boldsymbol{A}\,\mathbf{x}+\boldsymbol{B}\,\mathbf{u}$ állapotegyenletet. A válasz kifejezése

$$y = x_2+b_0u \equiv (0)x_1+(1)x_2+b_0u.$$

Ennek általános alakja $\mathbf{y}=\boldsymbol{C}\,\mathbf{x}+\mathbf{D}\,\mathbf{u}$.

Az Olvasó ellenőrizheti, hogy ez a (2.3-20) szerinti második Frobenius-alakja a következő rendszeregyenletnek:

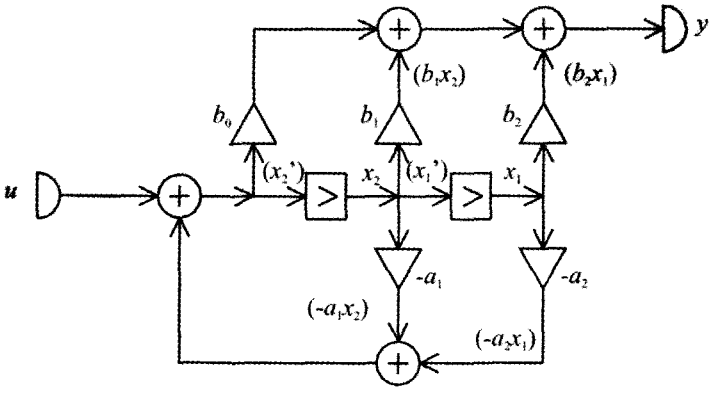
$$\text{DI}: \quad y+a_1y^{(1)}+a_2y^{(2)} = b_0u+b_1u^{(1)}+b_2u^{(2)},$$
$$\text{FI}: \quad y^{(2)}+a_1y^{(1)}+a_2y = b_0u^{(2)}+b_1u^{(1)}+b_2u.$$

Ez megmagyarázza az erősítésekre alkalmazott jeleket. Ha $a_1=0$, $a_2=0$ (azaz elhagyjuk e két erősítőt), akkor a DI hálózat egy FIR típusú DI rendszert reprezentál. #

2. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az állapotváltozós leírását, amelynek egy hálózati reprezentációja a 7. ábrán látható.

Az előző példa mintájára, a 7. ábrán zárójelben megadott változók felhasználásával felírhatók a következő egyenletek:

$$x_1' = x_2,$$
$$x_2' = -a_2x_1-a_1x_2+u;$$
$$y = (b_2-b_0a_2)x_1+(b_1-b_0a_1)x_2+b_0u.$$



2.4-7. ábra Két dinamikus komponenst tartalmazó hálózat. Ez egy másodrendű rendszer úgynevezett második kanonikus realizációja

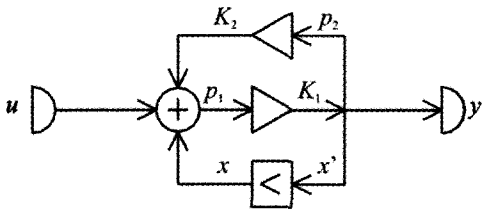
A rendszeregyenlet megegyezik az előző példában megadottal a (2.3-19) első Frobenius-alak értelmében. A DI hálózat az $a_1=0$, $a_2=0$ speciális esetben FIR típusú rendszert reprezentál. #

2.4-2.2. A hálózat regularitása

Mint már említettük: előfordulhat, hogy az elemi komponensek összekapcsolásából álló hálózat állapotváltozós leírása nem állítható elő, ha minden dinamikus komponens kimeneti változóját állapotváltozónak tekintjük. Az ilyen *nem reguláris* (vagy nemreguláris) hálózatot nem tekintjük egy rendszer korrekt reprezentációjának.

Illusztrációként tekintsük a 8. ábrán látható hálózatot, amelyre felírhatók a következő egyenletek:

$$p_1 = K_2 p_2 + x + u\,, \qquad x' = K_1\, p_1\,,$$
$$p_2 = K_1\, p_1\,, \qquad y = K_1\, p_1\,.$$



2.4-8. ábra Memóriamentes hurkot tartalmazó hálózat. Ez nem feltétlenül reguláris

Ha $K_1 K_2 \neq 1$, akkor a p_i változók kiküszöbölhetők:

$$p_1 = K_0\,(x+u),\;\; p_2 = K_1 K_0\,(x+u);\;\; K_0 \equiv \frac{1}{1-K_1 K_2}\,.$$

Ennek felhasználásával kapjuk az állapotváltozós leírást:

$$x' = K_1\, K_0\, x + K_1\, K_0\, u\,,$$
$$y = K_1\, K_0\, x + K_1\, K_0\, u\,;\;\; K_0 \equiv 1/(1-K_1 K_2).$$

Ebben az esetben a hálózat reguláris és egy rendszer reprezentációjának tekinthetjük.

Ha azonban $K_1 K_2 = 1$, akkor a következő egyenletrendszer adódik $(K_2 = 1/K_1)$:

$$p_1 - \frac{1}{K_1} p_2 = x + u\,,$$
$$K_1\, p_1 - p_2 = 0\,.$$

Ez az egyenletrendszer ellentmondásos, determinánsa nulla, vagyis nem megoldható. A hálózatnak nincs állapotváltozós leírása, tehát nem reguláris.

Hamis okoskodás lenne azt állítani, hogy a lineáris egyenletrendszer „megoldása" $x + u = 0$, vagyis $x = -u$, mert ez *nem* állapotegyenlet (nem x' van kifejezve!). Ha mégis elfogadjuk ezt a nem korrekt egyenletet, akkor a hálózat alapján (nem az egyenletrendszerből) azt kapjuk, hogy $y = x' = -u'$ vagy részletesebben

$$\text{DI:}\quad y[k] = -u[k+1]\,; \qquad\qquad \text{FI:}\quad y(t) = -u'(t).$$

A DI egyenlet egy prediktort, a FI egyenlet egy differenciátort ír le. Nyilvánvaló, hogy erősítőkkel és késleltetővel nem realizálhatunk egy prediktort és nem tűnik hihetőnek, hogy erősítőkkel és integrátorral lehet differenciátort realizálni. A nem reguláris hálózatból azonban nem mindig adódnak ilyen abszurd eredmények.

A 8. ábrán látható hálózatot megvizsgálva azt látjuk, hogy az egy *memóriamentes hurkot,* vagyis egy olyan zárt jelfolyamot tartalmaz, amelyben nincsen dinamikus komponens. Egy ilyen hurok fizikailag mindenképpen gyanús jelenséget ír le, hiszen azt fejezi ki, hogy egy változó értékét minden időpontban a saját, ugyanezen időpontbeli értéke befolyásolja, ami végtelen gyors terjedési sebességet feltételez. Ez természetesen lehetetlen, de általánosan nem dönthető el, hogy közelítésként elfogadható-e. A vizsgált példában $p_1 = K_1 K_2 p_1 + x + u$ adódik, de csak akkor jelent nem reguláris hálózatot, ha az erősítések szorzata pontosan 1, amit még szándékosan sem könnyű létrehozni.

Nehézségeink lehetnek a vizsgált hálózati modellel akkor is, ha az erősítések szorzata nem pontosan egységnyi. Ennek illusztrálásra tekintsük azt az esetet, amikor $K_1 = 1$ és $K_2 = 1 + \varepsilon$, ahol $|\varepsilon|$ kis szám. Ekkor az állapotváltozós leírásban szereplő egyetlen számérték $A \equiv K_1 K_0 \equiv K_1/(1 - K_1 K_2) = -1/\varepsilon$. Ez az A együttal a rendszer egyetlen sajátértéke. Ha most $\varepsilon = +0{,}001$, akkor $A = -1000$. Ha viszont $\varepsilon = -0{,}001$, akkor $A = +1000$. Az erősítés kicsiny változása drasztikus változást okoz abban a paraméterben, amely alapvetően meghatározza a rendszer viselkedését (a FI esetben például a stabilitást). A hálózat ekkor érzékeny a két erősítés értékére.

Mindebből arra következtethetünk, hogy a hálózati modellben célszerű kerülni a memóriamentes hurkot.

Egyes álláspontok szerint a memóriamentes hurkot tartalmazó hálózat nem tekinthető korrekt modellnek.

2.4-2.3. A hálózat stabilitása

A hálózat állapotváltozós leírásának ismeretében eldönthetjük, hogy az általa reprezentált rendszer aszimptotikusan stabilis-e (a rendszermátrix minden sajátértéke az egységsugarú körön belül illetve a bal félsíkon helyezkedik el) vagy hogy gerjesztés-válasz stabilis-e (az impulzusválasz abszolút összegezhető vagy abszolút integrálható). A hálózat stabilitására a következő definíció szokásos.

Egy *hálózat* akkor és csakis akkor *stabilis,* ha az általa reprezentált rendszer aszimptotikusan stabilis.

Ez azt jelenti (2.3-3.1. pont), hogy

$$\text{ha } \mathbf{u}[k] = \mathbf{0},\ k \in \mathbf{N}, \text{ akkor } \mathbf{x}[k] \to \mathbf{0},\ \mathbf{y}[k] \to \mathbf{0},\ k \to \infty\,;$$

$$\text{ha } \mathbf{u}(t) = \mathbf{0},\ t \in \mathbf{R}_+, \text{ akkor } \mathbf{x}(t) \to \mathbf{0},\ \mathbf{y}(t) \to \mathbf{0},\ t \to \infty.$$

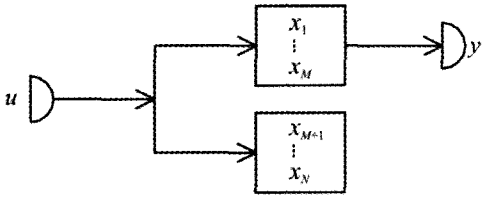
A rendszermátrix sajátértékeinek elhelyezkedése a rendszermátrix karakterisztikus polinomjának együtthatói ismeretében ellenőrizhető (2.2-4. szakasz).

Mint tudjuk, az aszimptotikusan stabilis rendszer GV stabilis is, de a GV stabilitás nem biztosítéka az aszimptotikus stabilitásnak. Ennek az állításnak most adhatunk egy más megfogalmazást is.

Egy *stabilis hálózat* aszimptotikusan stabilis és így gerjesztés-válasz stabilis rendszert reprezentál. Egy nem stabilis hálózat reprezentálhat olyan rendszert, amely esetleg gerjesztés-válasz stabilis, de biztosan nem aszimptotikusan stabilis.

Illusztrációként tekintsünk egy olyan hálózatot, amelynek struktúrája a 9. ábrán látható. A választ csak az $x_1, x_2, \ldots, x_M$ állapotváltozók befolyásolják, vagyis a válasz nem

függ az $x_{M+1}, x_{M+2}, \ldots, x_N$ állapotváltozóktól. Ha a „felső" részhálózat stabilis, az „alsó" viszont nem, akkor a hálózat nem stabilis. Ugyanakkor ez a hálózat egy GV stabilis rendszert reprezentál, amely azonban nem aszimptotikusan stabilis. Egy GV stabilis rendszert reprezentáló, de nem stabilis hálózat nem feltétlenül ilyen struktúrájú. A 9. ábra csak e jelenség egy egyszerű értelmezését illusztrálja.



2.4-9. ábra Egy olyan hálózat struktúrája, amely egy gerjesztés-válasz stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis rendszert reprezentál.

Gyakorlati megfontolások alapján úgy is dönthetünk, hogy az objektumnak a GV stabilitás nem kielégítő tulajdonsága, ha nem aszimptotikusan stabilis is. Dönthetünk azonban úgy is, hogy a hálózat nem megfelelő modellje az objektumnak. Ilyenkor a feladat egy az objektumot jobban leíró hálózat konstrukciója. Ez lehet az eredetinél egyszerűbb (elhagyjuk a nem stabilis részhálózatot), de rendszerint bonyolultabb (figyelembe veszünk valamilyen előzőleg elhanyagolt hatást).

2.4-2.4. A rendszeregyenlet előállítása

A hálózat ismeretében az általa reprezentált rendszert leíró rendszeregyenlet többféle módon is előállítható. Egy lehetőség abban áll, hogy először előállítjuk az állapotváltozós leírást, ami az előzőek szerint egyszerű feladat, majd abból állítjuk elő a rendszeregyenletet a 2.3-1.4. pontban tárgyalt módon. Egy másik, még egyszerűbb módszert a 4.3-1. szakaszban fogunk látni (az átviteli függvény felhasználásával).

A következő két példa illusztrálja, hogy a hálózat alapján a rendszeregyenlet közvetlen előállítása néha egyszerű, máskor azonban körülményes. Nem érdemes nagyon sok időt vesztegetni az „egyszerű" megoldásra, ha az nem kézenfekvő.

1. példa Határozzuk meg a 10. ábrán megadott hálózat (vö. 6. ábra) által reprezentált rendszer rendszeregyenletét!

A forrásból és a nyelőből kiindulva könnyen követhetjük a zárójelben megadott változók kifejezését. Külön célszerű tárgyalni a DI és a FI esetet.

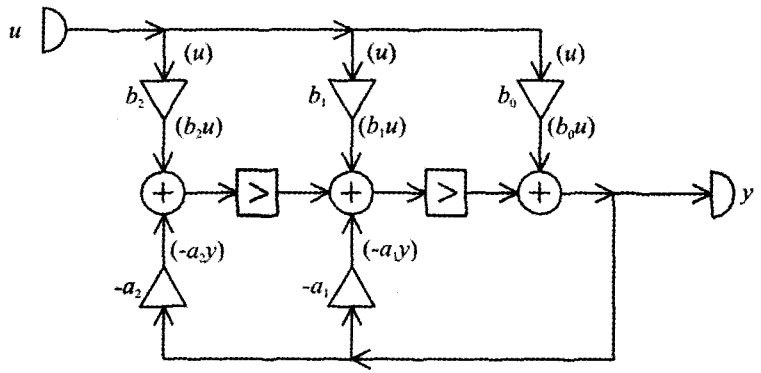
A DI esetben a bal oldali és a jobb oldali késleltető kimeneti változójának kifejezése késleltetéssel állítható elő:

$$\{b_2 u - a_2 y\}^{(1)} = b_2 u^{(1)} - a_2 y^{(1)},$$
$$\{b_2 u^{(1)} - a_2 y^{(1)} - a_1 y + b_1 u\}^{(1)} = b_2 u^{(2)} - a_2 y^{(2)} - a_1 y^{(1)} + b_1 u^{(1)}.$$

A válasz kifejezése az ábra alapján

$$y = b_2 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_0 u - a_2 y^{(2)} - a_1 y^{(1)}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ezzel meg is kaptuk a másodrendű rendszeregyenlet ismert alakját.



2.4-10. ábra Másodrendű hálózat, amelynek minden változója kifejezhető a gerjesztés és a válasz segítségével, ezért a rendszeregyenlet könnyen előállítható

A FI esetben ugyanezek az egyenletek érvényesek, csak az integrátorok kimeneti változója most bemeneti változójuk integrálja. Formálisan az (i) felső index helyére ($-i$) felső index írandó. A rendszeregyenlet integrális alakja ezek szerint

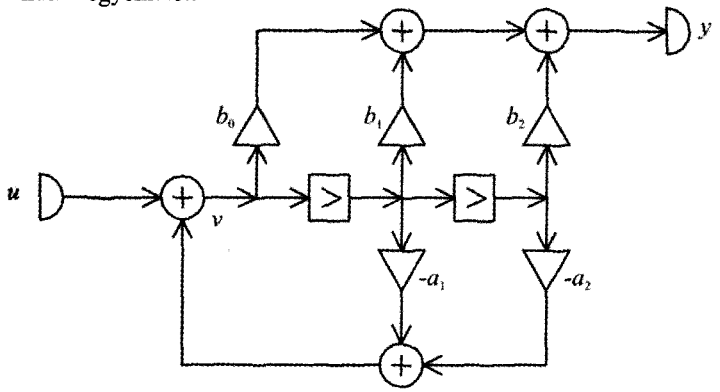
$$y = b_2 u^{(-2)} + b_1 u^{(-1)} + b_0 u - a_2 y^{(-2)} - a_1 y^{(-1)}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

A szokásos differenciális alakot ebből kétszeri differenciálással és rendezéssel kapjuk:

$$y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_2 y = b_0 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_2 u, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Erre a hálózatra a rendszeregyenlet előállítása igen egyszerű volt. #

2. példa Határozzuk meg a 11. ábrán megadott hálózat (vö. 7. ábra) által reprezentált rendszer rendszeregyenletét!



2.4-11. ábra Másodrendű hálózat rendszeregyenletének előállítása egy segédváltozó bevezetésével

Most nem egyszerű a változókat a gerjesztéssel és a válasszal közvetlenül kifejezni, ezért bevezetünk egy v segédváltozót (a bal oldali összegezőből kimenő változót). A DI esetben felírható egyenletek

$$v = -a_1 v^{(1)} - a_2 v^{(2)} + u,$$
$$y = b_0 v + b_1 v^{(1)} + b_2 v^{(2)}.$$

A v segédváltozó kiküszöbölése nem egyszerű feladat. Képezzük v késleltetett alakjait:

$$v^{(1)} = -a_1 v^{(2)} - a_2 v^{(3)} + u^{(1)},$$
$$v^{(2)} = -a_1 v^{(3)} - a_2 v^{(4)} + u^{(2)}.$$

Helyettesítsük a második egyenletet az elsőbe, majd mindkettőt v kifejezésébe. Ezáltal kifejeztük a $v, v^{(1)}, v^{(2)}$ változókat a $v^{(3)}, v^{(4)}$ és az $u, u^{(1)}, u^{(2)}$ változók lineárkombinációjaként. Helyettesítsük ezeket y kifejezésébe, továbbá ennek egy és két ütemmel késleltetett alakjába:

$$y^{(1)} = b_0 v^{(1)} + b_1 v^{(2)} + b_2 v^{(3)},$$
$$y^{(2)} = b_0 v^{(2)} + b_1 v^{(3)} + b_2 v^{(4)}.$$

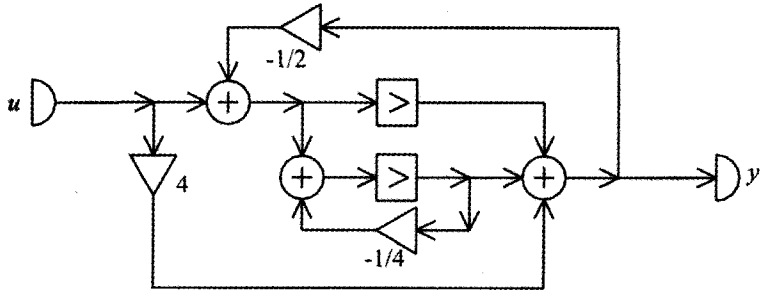
Oldjuk meg a változókra vonatkozó lineáris egyenletrendszert az y változóra úgy, hogy az $y^{(1)}$ és az $y^{(2)}$ változót ismertnek tekintjük. Belátható, hogy ekkor az előző példában meghatározott rendszeregyenlet adódik.

A FI eset hasonlóan tárgyalható (lásd az előző példát).

E hálózat rendszeregyenletének ilyen módon történő előállításánál nem nyertünk azáltal, hogy csak egy segédváltozót vezettünk be és nem az állapotváltozós leírásból indultunk ki, amelyikben két állapotváltozó is szerepel, viszont ezek kiküszöbölésére kidolgozott módszert követhetünk. #

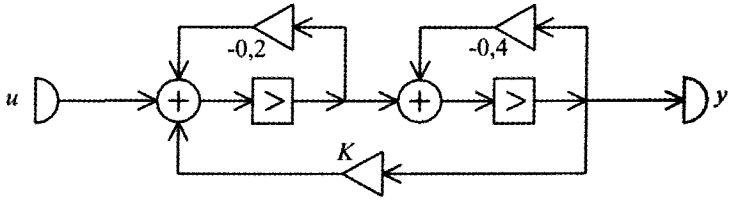
2.4-2.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a 12. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását!



2.4-12. ábra A feladatban szereplő másodrendű jelfolyam hálózat

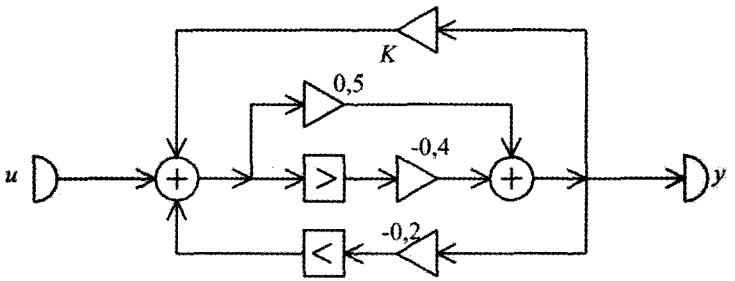
F-2. Határozza meg a 13. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását! A K erősítést kezelje paraméterként.



2.4-13. ábra Egy másik másodrendű jelfolyam hálózat, amelyben az egyik erősítés **határozatlan**

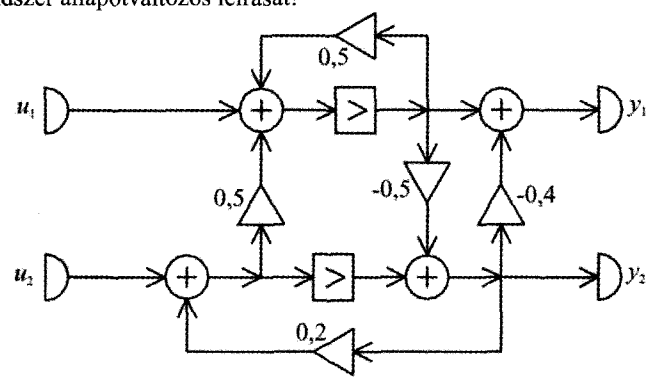
F-3. Határozza meg a 13. ábra szerinti hálózat K erősítését úgy, hogy
(*a*) a rendszermátrix egyik sajátértéke nulla legyen!
(*b*) a hálózat ne legyen reguláris!
(*c*) a DI hálózat stabilis legyen!
(*d*) a FI hálózat stabilis legyen!

F-4. Oldja meg az előző feladat *(a)* és *(b)* részét a 14. ábrán látható hálózatra!



2.4-14. ábra Másodrendű jelfolyam hálózat amelyben az egyik erősítés határozatlan

F-5. Határozza meg a 15. ábrán vázolt hálózat által reprezentált két-gerjesztésű, két-válaszú rendszer állapotváltozós leírását!



2.4-15. ábra Két-gerjesztésű, két-válaszú rendszert reprezentáló másodrendű hálózat

F-6. Határozza meg a 13. ábrán látható hálózatra $x_1[0], x_2[0]$, illetve $x_1(-0), x_2(-0)$ értékét, ha $u = u^-$ állandó értékű a k illetve t negatív értékeire és

$$(a)\ K=-0{,}32. \qquad (b)\ K=+1.$$

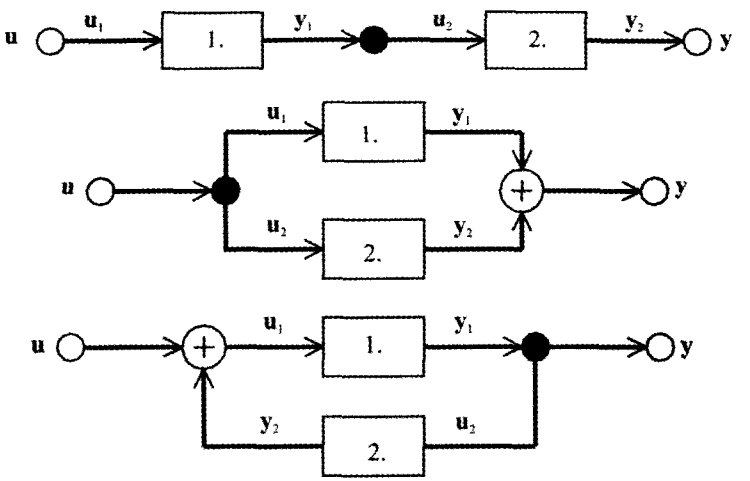
***F-7.** Két több-gerjesztésű, több-válaszú, folytonos idejű illetve diszkrét idejű rendszer állapotváltozós leírása

$$\mathbf{x}_1' = \boldsymbol{A}_1\,\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{B}_1\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \boldsymbol{C}_1\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{A}_1\mathbf{u}_1; \qquad \mathbf{x}_2' = \boldsymbol{A}_2\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{B}_2\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{y}_2 = \boldsymbol{C}_2\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{D}_2\mathbf{u}_2.$$

A két részrendszert a 16a, b, illetve c ábrán látható módon összekapcsoljuk. Az ábrán a vastag vonalak arra utalnak, hogy a jelfolyam több változót reprezentálhat.

Mik a feltételei annak, hogy több gerjesztés és több válasz esetén az általános lineáris komponenseket tartalmazó hálózat egy rendszert reprezentáljon?

Határozza meg az előálló rendszer állapotváltozós leírását, vagyis értelmezzük a rendszer állapotvektorát, ***A, B, C, D*** mátrixait!



2.4-16. ábra Két sokváltozós részrendszer különféle összekapcsolásából álló sokváltozós rendszer

2.4-2.M. Megoldások

M-1. Jelölje x_1 a felső, x_2 az alsó késleltető illetve integrátor kimeneti változóját. Ekkor

$$x_1' = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - u,$$
$$x_2' = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{4}x_2 - u;$$
$$y = x_1 + x_2 + 4u.$$

M-2. Jelölje x_1 a bal oldali, x_2 a jobb oldali késleltető illetve integrátor kimeneti változóját. Ekkor $x_1' = -0{,}2\,x_1 + K\,x_2 + u$, $x_2' = x_1 - 0{,}4\,x_2$; $y = x_2$.

M-3. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 0{,}6\lambda + 0{,}08 - K = 0$. Ebből már következnek a megoldások.

(*a*) Ha $K = 0{,}08$, akkor $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0{,}6$.

(*b*) Nincs ilyen véges K érték.

(*c*) $1 + 0{,}6 + 0{,}08 - K > 0$, $1 - 0{,}6 + 0{,}08 - K > 0$, $1 - |0{,}08 - K| > 0$ ki van elégítve, ha $-0{,}92 < K < +0{,}48$.

(*d*) $0{,}6 > 0$, $0{,}08 - K > 0$ ki van elégítve, ha $K < 0{,}08$.

M-4. A felső dinamikus komponensre $x_1' = K\left(0{,}5x_1' - 0{,}4\,x_1\right) + x_2 + u$. Ha $K \neq 2$, akkor $K_0 = 1/(1 - 0{,}5\,K)$ jelöléssel

$$x_1' = -0{,}4\,K\,K_0\;x_1 + K_0\,x_2 + K_0\,u,$$
$$x_2' = \left(0{,}08 + 0{,}04\,K\,K_0\right)x_1 - 0{,}1\,K_0 x_2 - 0{,}1\,K_0\,u;$$
$$y = \left(-0{,}4 - 0{,}2\,K\,K_0\right)x_1 + 0{,}5\,K_0 x_2 + 0{,}5\,K_0\,u.$$

A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + \left(0{,}1\,K_0 + 0{,}4\,K\,K_0\right)\lambda - 0{,}08\,K_0 = 0$.

(*a*) Nincs ilyen véges K érték.
(*b*) Ha $K = 2$. Ekkor a memóriamentes hurokban az erősítések szorzata 1.

M-5. Az 1. feladathoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

M-6. Az állandó gerjesztéshez tartozó gerjesztett összetevő k illetve t negatív értékeire maga is állandó:

DI hálózat:	FI hálózat:
$x_1' = x_1 = x_1[0]$,	$x_1' = 0,\ x_1 = x_1(-0)$,
$x_2' = x_2 = x_2[0]$,	$x_2' = 0,\ x_2 = x_2(-0)$,
$x_1[0] = \dfrac{1{,}4}{1{,}68 - K} u^-$,	$x_1(-0) = \dfrac{0{,}4}{0{,}08 - K} u^-$,
$x_2[0] = \dfrac{1}{1{,}68 - K} u^-$,	$x_2(-0) = \dfrac{1}{0{,}08 - K} u^-$.

Ezek a megoldások azonban csak akkor érvényesek, ha k illetve t negatív értékeire a hálózat stabilis. Ekkor az osztások biztosan értelmezettek. Ha a hálózat nem stabilis, akkor negatív időkre nem alakul ki állandósult állapot, a feladatnak nincs értelme. Az M-3. értelmében az (*a*) esetben az eredmények használhatók, a (*b*) esetben nem.

***M-7.** Ha minden komponens egy-gerjesztésű és egy-válaszú, akkor nincs külön általános feltétel. Egyébként a csomópontokban szétágazó vagy összegeződő változók számának meg kell egyeznie; szükség esetén a hiányzó változókat nulla érétkű változóknak tekinthetjük. A továbbiakban feltételezzük, hogy a változók sorszámozása is össze van hangolva.

A rendszer állapotváltozóinak választhatók a két rendszer állapotváltozóinak összessége, vagyis

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}.$$

(*a*) Az alapvető egyenletek $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_2$. Az $\mathbf{y}$ kifejezésének előállítása után már egyszerűen adódik, hogy

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix},\ C = [D_2 C_1 \quad C_2],\ D = D_2 D_1.$$

(*b*) Az alapvető egyenletek $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$. Az $\mathbf{y}$ kifejezésének előállítása után már egyszerűen adódik, hogy

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\ C = [C_1 \quad C_2],\ D = D_1 + D_2.$$

(*c*) Az alapvető egyenletek $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} + \mathbf{y}_2$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{y}_1$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1$. Az $\mathbf{y}$ kifejezésére vonatkozó egyenlet megoldható, ha az alábbi $\boldsymbol{F}$ mátrix létezik (ekkor reguláris a hálózat). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\boldsymbol{F} = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2\right]^{-1}, \quad \hat{\boldsymbol{C}}_1 = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{C}_1, \quad \hat{\boldsymbol{C}}_2 = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{D}_1\,\boldsymbol{C}_2, \quad \hat{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{D}_1.$$

Az $\mathbf{y}$ kifejezésének előállítása után már egyszerűen adódik, hogy

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{D}_2\hat{\boldsymbol{C}}_1 & \boldsymbol{B}_1\left(\boldsymbol{C}_2 + \boldsymbol{D}_2\hat{\boldsymbol{C}}_2\right) \\ \boldsymbol{B}_2\hat{\boldsymbol{C}}_1 & \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_2\hat{\boldsymbol{C}}_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_1\hat{\boldsymbol{D}}_2 \\ \boldsymbol{B}_2\hat{\boldsymbol{D}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \left[\hat{\boldsymbol{C}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{C}}_2\right], \quad \boldsymbol{D} = \hat{\boldsymbol{D}}.$$

A leírás biztosan értelmezett, ha legalább az egyik $\boldsymbol{D}_i$ zérus(mátrix). Ez a feltétel természetesen nem szükséges, az $\boldsymbol{F}$ mátrix csak kivételesen nem értelmezett.

Többváltozós esetben a mátrixszorzatoknak értelmezetteknek kell lenniük, ami automatikusan teljesül, ha az összetartozó kimeneti és bemeneti változók száma megegyezik. Szükség esetén bevezethetünk nulla értékű változókat.

2.4-3. Az egyenletek realizálása

2.4-3.1. A feladat megfogalmazása

Az előző két szakaszban a lineáris jelfolyam hálózatok *analízisének* problémáját tárgyaltuk: adott volt a hálózat, célunk az általa reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának vagy rendszeregyenletének előállítása.

Foglalkozzunk most a *realizáció* feladatával: célunk egy olyan hálózat konstruálása, amely adott állapotváltozós leírású vagy rendszeregyenletű rendszert reprezentál. Az impulzusválaszával jellemzett rendszer realizációjával a 4.3-2. szakaszban foglalkozunk. Egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns, kauzális rendszerekre szorítkozunk. Itt nem foglakozunk azzal a kérdéssel, hogy honnan származik a rendszer leírása, hanem azt adottnak tekintettjük. A hálózati realizáció célja rendszerint az, hogy ténylegesen megvalósítsuk a rendszer matematikai leírásával jellemzett objektumot.

Többnyire az olyan realizációkat részesítjük előnyben, amelyek minimális számú dinamikus komponenst (DI késeltetőt illetve FI integrátort) tartalmaznak. Ezeket *kanonikus realizációknak* nevezzük. (Egyesek a kanonikus jelzőt szűkebb értelemben használják, például csak bizonyos kapcsolásokat neveznek kanonikusnak.)

Egy rendszerleíráshoz többnyire sok realizáció, sőt sok kanonikus realizáció tartozik. Lehetőségünk van ezek közül a (valamilyen értelemben) optimálist kiválasztani. Ennek szempontjaival nem foglalkozunk. Megemlítjük azonban, hogy a realizáció feladatát gyakran célszerű visszavezetni másodrendű rendszerek realizációjára és ilyenek összekapcsolására. Ennek néhány módszerét a 4.3. szakaszban tárgyaljuk.

Ebben a szakaszban bemutatjuk az állapotváltozós leírás és a rendszeregyenlet néhány realizációját. Másodrendű rendszerekre szorítkozunk egyrészt az egyszerűség kedvéért, másrészt azért is, mert az általánosítás kézenfekvő.

A szóhasználattal kapcsolatban megjegyezzük, hogy ha a hálózatot tekintjük adottnak, akkor azt mondjuk, hogy az egy rendszert reprezentál. Ha viszont a rendszer valamilyen leírását tekintjük adottnak, akkor azt mondjuk, hogy egy megfelelő hálózat realizálja a rendszert.

2.4-3.1. Az állapotváltozós leírás realizálása

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns, kauzális, másodrendű DI illetve differenciális FI rendszer állapotváltozós leírása

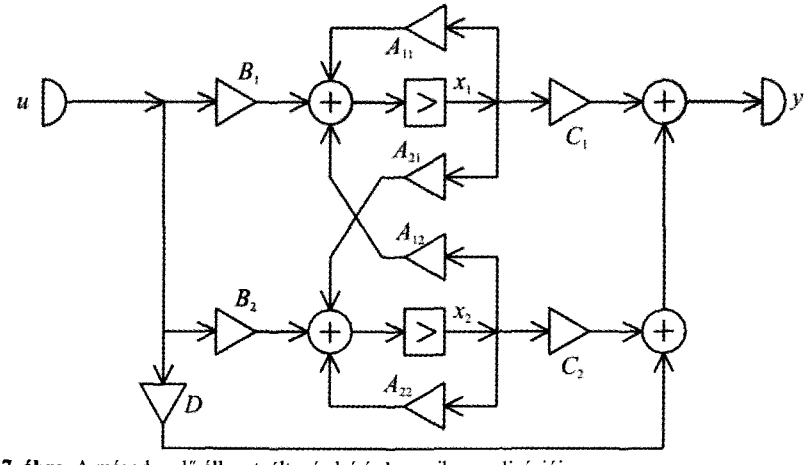
$$\begin{aligned} x_1' &= A_{11}\, x_1 + A_{12}\, x_2 + B_1 u\,, \\ x_2' &= A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + B_2 u\,; \\ y &= C_1 x_1 + C_2 x_2 + D\, u\,. \end{aligned} \tag{2.4-8}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a 17. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszernek éppen ez az állapotváltozós leírása.

A kapcsolás általánosítása nagyobb rendszámú ($N > 2$ számú állapotváltozó) rendszerekre kézenfekvő, habár a kapcsolás áttekinthető felrajzolása általános esetben nem egyszerű. A hálózat N számú dinamikus komponenst és általános esetben $N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$ számú erősítőt tartalmaz. Az erősítők tényleges száma ennél rendszerint kevesebb, mert az állapotváltozós leírásban szereplő együtthatók egy része rendszerint nulla, tehát ezeket nem kell ténylegesen realizálni. A +1 és −1 együttható realizálása is többnyire egyszerűen megoldható.

Alkalmas transzformációs mátrixszal az állapotváltozós leírás olyan alakra hozható, amely az eredetinél jóval kevesebb nullától különböző együtthatót tartalmaz, tehát realizálása kevesebb erősítőt igényel. Ennek módját nem részletezzük (2.3-2.7. pont).

Még célszerűbb előállítani az állapotváltozós leíráshoz rendelt rendszeregyenletet (2.3-1.4. pont) és azt realizálni a következő pontban leírt módon.



2.4-17. ábra A másodrendű állapotváltozós leírás kanonikus realizációja

A 17. ábra szerinti realizáció akkor is használható, ha a rendszer variáns, tehát az állapotváltozós leírás együtthatói az idő ismert függvényei. Ekkor az erősítések is időfüggők, a realizáló hálózat variáns.

2.4-3.3. A rendszeregyenlet realizálása

Az egy-gerjesztésű, egy-válaszú, lineáris, invariáns, kauzális, n-edrendű DI illetve differenciális FI rendszer rendszeregyenlete

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \; y + a_1 y^{(1)} + a_2 y^{(2)} + \ldots + a_n y^{(n)} = b_0 u + b_1 u^{(1)} + b_2 u^{(2)} + \ldots + b_n u^{(n)}; \\ &\text{FI}: \; y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} u^{(1)} + b_n u. \end{aligned} \tag{2.4-9}$$

A DI esetben $y^{(i)}[k] \equiv y[k-i]$, míg a FI esetben $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i-edik általánosított deriváltja.

A 2.4-2.1. pont 1. és 2. példájában láttuk, hogy a 6. és a 7. ábrán megadott másodrendű hálózat olyan rendszert reprezentál (most úgy is mondhatjuk, hogy realizál), amelynek a rendszeregyenlete éppen a megadott. Az általánosítás n tetszőleges értékére kézenfekvő. Ezek a hálózatok n számú dinamikus komponenst és legfeljebb $2n+1$ számú erősítőt tartalmaznak. Ennél kevesebb dinamikus komponenssel a rendszeregyenlet nem realizálható, ezért mindkét hálózat kanonikus realizáció. Megjegyezzük, hogy a 7. ábra szerinti kapcsolás egyszerűsíthető, amennyiben mind a forrásnál, mind a nyelőnél csak egyetlen összegező csomópontra van szükség.

Ha N és n az adott rendszerre megegyezik (ez a tipikus eset, az ettől eltérő leírások rendszerint valamilyen elfajulást jelentenek), akkor a rendszeregyenlethez tartozó realizációk ugyanannyi dinamikus komponenst, de többnyire kevesebb erősítőt tartalmaznak, mint az állapotváltozós leírás realizációja általános esetben. Az erősítők szükséges száma többek között attól is függ, hogy a leírásban hány együttható értéke 0, +1 vagy −1, mert ezek realizálása többnyire megoldható erősítő nélkül is.

A 6. és 7. ábrákon adott realizációk akkor is használhatók, ha a rendszer variáns, tehát a rendszeregyenlet együtthatói az idő ismert függvényei. Ekkor az erősítések is időfüggők, a realizáló hálózat variáns. A váltakozva 0 és 1 erősítésű erősítő egy kapcsolóval egyenértékű.

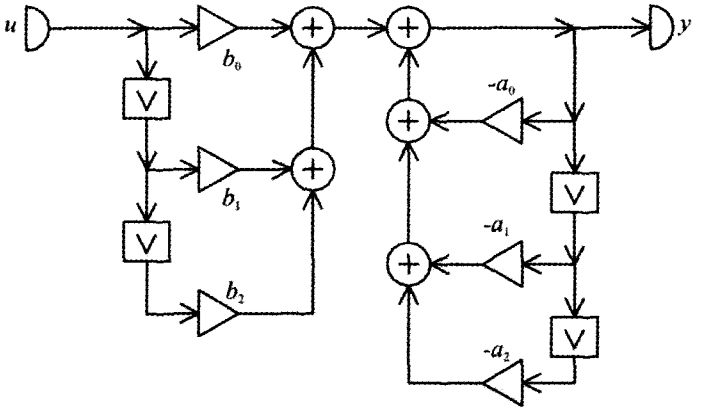
Más struktúrájú kanonikus realizációkat a 4.3-2. szakaszban tárgyalunk. A különböző realizációk gyakorlati szempontból előnyös tulajdonságaival azonban nem foglalkozunk a későbbiekben sem.

2.4-3.F. Feladatok

F-1. Igazolja, hogy a 18. ábrán látható hálózat a másodrendű rendszeregyenlet egy nem kanonikus realizációja! A hálózat könnyen általánosítható nagyobb rendszámra.

***F-2.** Az állapotváltozós leírás a rendszermátrix egyszeres sajátértékei esetén átalakítható szétcsatolt formájúvá (2.3-3.7. pont).

Hogyan hasznosítható ez az átalakítás a hálózati realizáció előállításakor?



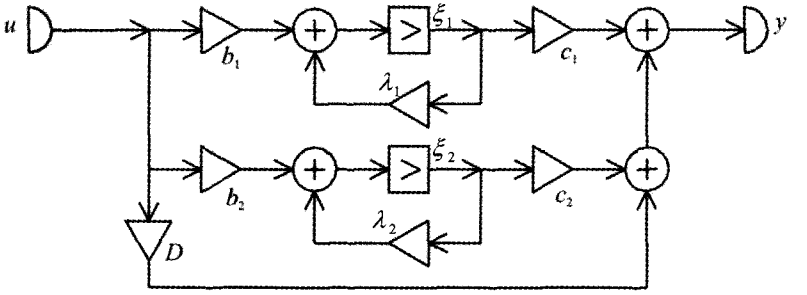
2.4-18. ábra A másodrendű rendszeregyenlet egy nem kanonikus realizációja

2.4-3.M. Megoldások

M-1. A DI esetben közvetlenül megkapjuk a rendszeregyenletet. A FI esetben a rendszeregyenlet integrális alakját kapjuk, amelyből kétszeres differenciálással adódik a rendszeregyenlet szokásos alakja.

A realizáció azért nem kanonikus, mert négy dinamikus komponenst tartalmaz, holott a rendszer csak másodrendű.

***M-2.** Ha minden sajátérték egyszeres és valós, akkor a rendszermátrix diagonálissá tehető. A 17. ábrán vázolt hálózat ekkor a 19. ábrán láthatóra egyszerűsödik. Általános esetben az állapotváltozók száma N, ekkor a realizáló hálózat N számú dinamikus komponenst (kanonikus realizáció!) és legfeljebb $2N+1$ számú erősítőt tartalmaz.



2.4-19. ábra A másodrendű szétcsatolt állapotváltozós leírás realizációja a rendszer- mátrix egyszeres, valós sajátértékei esetén

Komplex sajátértékek esetén a diagonizálás elvégezhető, de a rendszermátrix főátlós elemei (a sajátértékek) nem valósak, tehát nem realizálhatók erősítővel.

Ilyenkor az állapotmátrix blokk-diagonális alakra hozható, amely például a 17. ábra szerinti hálózattal realizálható. A realizációs feladatot egyszerűbb a komplex frekvenciatartományban megoldani (4.3–2. szakasz).

2.5. Nemlineáris rendszerek

A gyakorlatban előforduló objektumok sokszor teljesülő feltételek mellett kielégítően modellezhetők lineáris, invariáns rendszerrel. Általános esetben azonban csak nemlineáris, variáns rendszer a megfelelő modell. A továbbiakban nemlineáris rendszeren a nemlineáris, variáns rendszert értjük, habár példáink szinte kizárólag az invariáns esetre vonatkoznak.

Egyes esetekben azért vizsgáljuk a nemlineáris modellt, hogy feltételeket kapjunk az egyszerűbb lineáris modell alkalmazhatóságára. Ilyen feltétel lehet például a gerjesztés bizonyos paramétereire vonatkozó korlát. Máskor azonban azért van szükség a nemlineáris modell vizsgálatára, mert a lineáris rendszer alapvetően hibásan írná le az objektum működését. Ez a helyzet például, ha egy változó egy másik változó négyzete vagy abszolút értéke, két változó szorzata.

A nemlineáris rendszer vizsgálata nyilván sokkal bonyolultabb, mint a lineáris rendszeré. Még a rendszert leíró egyenletek osztályozása sem egyszerű. Az egyenletek zárt alakú (képlet jellegű) megoldása csak kivételesen lehetséges. Többnyire csak numerikus megoldásra van lehetőség. Fontos speciális esetet jelent, amikor feltételezhetjük, hogy a változók csak kismértékben változnak egyensúlyi értékük környezetében, habár a numerikus számítás ilyenkor is csak részben takarítható meg.

A 2.5-1. szakaszban az állapotváltozós leírással, a hálózati reprezentációval és az egyensúlyi állapottal foglalkozunk. Nem minden nemlineáris rendszer írható le az általunk vizsgálandó módon, de a tárgyalandó leírási mód sok gyakorlati feladat modellezésére kielégítően használható.

A 2.5-2. szakaszban az állapotegyenlet megoldásának néhány módszerét mutatjuk be. Itt foglalkozunk a stabilitási fogalmakkal is, habár ezt a problémakört is csak érintőlegesen tudjuk vizsgálni.

2.5-1. Állapotváltozós leírás

2.5-1.1. A nemlineáris rendszer fogalma

Egy u gerjesztésű és y válaszú rendszert általánosan az $y = \mathscr{W}\{u\}$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatával jellemezhetünk, ahol a $\mathscr{W}$ operátor a (k diszkrét vagy t folytonos) időtől is függhet. Ha a $\mathscr{W}$ operátor lineáris, akkor a rendszert lineárisnak nevezzük (1.2-2.2. pont). Ha a gerjesztés időbeli eltolása a válaszban ugyanilyen időbeli eltolást okoz, akkor a rendszert invariánsnak nevezzük (1.2-2.3. pont).

Az előzőkben láttuk, hogy a lineáris, invariáns rendszer explicit gerjesztés-válasz kapcsolata a $h[k]$ illetve $h(t)$ impulzusválasz ismeretében megadható (konvolúció; 2.1-1.2. és 2.1-2.2. pont). Ez lineáris, variáns rendszerre is általánosítható. A lineáris, kauzális rendszer további, előzőleg tárgyalt leírásmódjai a rendszeregyenlet (2.2. fejezet), az állapotváltozós leírás (2.3. fejezet) és a hálózati reprezentáció (2.4. fejezet) megadása.

A nemlineáris rendszer vizsgálata természetesen lényegesen bonyolultabb, mint egy lineáris rendszeré. Mivel a szuperpozíció elve nemlineáris rendszerre nem érvényes, ezért egy adott gerjesztéshez tartozó válasz (például az impulzusválasz) ismeretében nem tudjuk a rendszernek egy másik hasonló (még kevésbé egy tetszőleges) gerjesztéséhez tartozó válaszát meghatározni. A rendszeregyenlet típusú leírás általánosítása is ritkán reményteljes (például elsőrendű rendszer esetére). Nemlineáris és variáns rendszerre az állapotváltozós leírás általánosítása a legegyszerűbb, mint azt látni fogjuk.

Nem tekintjük feladatunknak a nemlineáris kapcsolat meghatározásának módját. Azt sejthetjük, hogy a lineáris, invariáns rendszer leírásában szereplő véges számú állandó paraméter meghatározása az objektum elméleti vagy kísérleti vizsgálata alapján lényegesen egyszerűbb, mint függvénykapcsolatok meghatározása és leírása. A feladat numerikus megoldásához egy $\eta = \Phi(\xi)$ függvény kiválasztása (például polinom) és paramétereinek meghatározása (például fokszám, együtthatók) helyett a numerikus analízishez célszerűbb lehet kellő számú összetartozó $\xi_0, \eta_0; \xi_1, \eta_1; \ldots$ értékpár meghatározása és kezelése.

Az előzőkhöz hasonlóan most is igyekszünk együtt tárgyalni a diszkrét idejű (DI) és a folytonos idejű (FI) rendszereket, habár a hangsúlyt az utóbbiakra fogjuk helyezni, mivel a DI rendszert leíró egyenletek numerikusan a lépésről lépésre módszerrel kézenfekvő módon megoldhatók. Többnyire arra az esetre szorítkozunk, amikor a rendszer invariáns. Ha még a gerjesztés is állandó (k illetve t pozitív értékeire), akkor a rendszert leíró egyenletekben az idő explicit módon nem szerepel, csak a változók függenek az időtől. Az ilyen *autonóm rendszer* vizsgálata egyszerűbb.

2.5-1.2. A rendszer állapotváltozós leírása

Egy rendszer *állapotának* korábban megadott (2.3-1.1. pont) definíciója nem feltételezte a rendszer lineáris jellegét, ezért azt nem kell általánosítani. Az *állapotegyenlet* megadja a DI állapotvektor $\mathbf{x}'[k] \equiv \mathbf{x}[k+1]$ siettetett értékét, illetve a FI differenciális rendszer állapotvektorának $\mathbf{x}'(t)$ idő szerinti deriváltját mint az $\mathbf{x}$ állapotvektor és az $\mathbf{u}$ gerjesztésvektor függvényét. A válasz állapotváltozós alakja megadja az $\mathbf{y}$ válaszvektort mint az $\mathbf{x}$ állapotvektor és az $\mathbf{x}$ gerjesztésvektor függvényét. Lineáris rendszerre ezek a kapcsolatok lineárisak voltak.

Egy diszkrét idejű illetve egy differenciális folytonos idejű, kauzális rendszer *állapotváltozós leírása* (pontosabban: az állapotváltozós leírás normálalakja)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2.5-1}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2.5-2}$$

ahol $\mathbf{F}$ és $\mathbf{G}$ ismert, vektor értékű függvények, például $x_1' = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_N, u)$. Ezeknek még a k diszkrét idő vagy a t folytonos idő is lehet független változójuk.

A nem differenciális FI rendszernek nem feltétlenül létezik ilyen leírása (például késleltetés). Megjegyezzük, hogy a fenti tömör normálalak nem mindig állítható elő, esetleg további változók bevezetésére is szükség lehet.

Az állapotváltozó leírás egy másik szokásos normálalakja

$$\begin{aligned} &\text{DI}: \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, k), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, k); \quad k \in \mathbf{Z}; \\ &\text{FI}: \quad \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t); \quad t \in \mathbf{R}, \end{aligned} \tag{2.5-3}$$

ahol az időfüggést okozhatja akár a gerjesztés, akár a rendszer időfüggő jellege.

Elsődleges célunk az $\mathbf{x} = \mathbf{x}[k], k \in \mathbf{N}$ illetve az $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), t \in \mathbf{R}_+$ *állapotvektor* meghatározása, hiszen annak ismeretében a válasz már egyszerűen számítható.

Az állapotvektort leíró függvényt és az állapotvektort ábrázoló ponthalmazt nevezik *trajektóriának* is. A DI esetben az egymást követő pontokat egyenes szakaszokkal célszerű összekötni. Ekkor a trajektória mindkét esetben egy görbe az N-dimenziós térben. Ennek megrajzolása csak $N = 2$ esetén egyszerű. Speciálisan $N = 1$ esetén az $x_1 = x$, $x_2 = x'$ változók síkjában értelmezett a trajektória.

Az $\mathbf{x}[0]$ illetve az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotból induló trajektória tarthat egy ponthoz (stabilis egyensúlyi állapot), tarthat egy zárt görbéhez (ez többnyire periodikus állapotot jelent), tarthat nem zárt görbéhez, de esetleg nincs egyszerű aszimptotikus tulajdonsága (kaotikus rendszer). Egyes esetekről később még részletesebben is szólunk.

Olyan formula előállítása, mint amelyet lineáris invariáns esetben megismertünk (2.3-2.2. pont) csak kivételesen van lehetőség. E helyett az $\mathbf{y}[k]$ illetve az $\mathbf{y}(t_k)$, $k = 0, 1, 2,...$ értékek közelítő meghatározása a célunk. A $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots$ értékeket kellően sűrűn kell megválasztani (vö. 2.3-2.9. pont). Tárgyalni fogunk azonban olyan közelítő eljárásokat is, amelyek formula alakú megoldásra vezetnek (linearizálási módszerek).

2.5-1.3. Nemlineáris jelfolyam hálózat

A nemlineáris rendszerek széles osztálya reprezentálható olyan jelfolyam hálózattal, amelynek komponensei az eddig megismerteken kívül (2.4-1.1. pont) a nemlineáris erősítő. A szorzó tekinthető nemlineáris erősítőnek is.

A legegyszerűbb esetben a *nemlineáris erősítőnek* egyetlen ξ bemeneti és egyetlen η kimeneti változója van. Mindkettő lehet a diszkrét idő illetve a folytonos idő függvénye. Az i-edik nemlineáris erősítő *karakterisztikája*

$$\eta_i = \Phi_i(\xi_i), \tag{2.5-4}$$

ahol Φ_i adott *függvény*. Ennek megadása történhet elemi függvénnyel, mint például $\eta = C|\xi|$ vagy $\eta = A\,\xi + B\,\xi^3$; történhet intervallumonként értelmezett függvényekkel mint például

$$\eta = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi \le 0, \\ C\,\xi, & 0 \le \xi < \infty; \end{cases}$$

vagy történhet ξ_p, η_p számpárok megadásával. Az első módszer tűnhet a legelegánsabbnak, de rendszerint az a legkevésbé pontos. A nemlineáris erősítőre ugyanazt a rajzjelet fogjuk használni, mint a lineáris erősítőre.

Általánosabban a *nemlineáris erősítőnek* tetszőleges számú bemeneti változója és egyetlen kimeneti változója van, karakterisztikája

$$\boxed{\eta_i = \Phi_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{iI}), \qquad (2.5\text{-}5)}$$

ahol Φ_i változóinak ismert függvénye. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a (4) karakterisztikában a $\boldsymbol{\xi}$ független változó egy vektor. Ilyen komponens a *szorzó* is, amelynek karakterisztikája $\eta = \xi_1\,\xi_2$. Szokás a szorzóra speciális rajzjelet is használni. A

lineáris variáns erősítő tekinthető olyan nemlineáris szorzónak, amelynek egyik bemeneti változója az idő ismert függvénye, vagyis egy gerjesztés.

Nincs szükség több kimeneti változós nemlineáris erősítő bevezetésére, mert az helyettesíthető több egy-kimenetű nemlineáris erősítő összekapcsolásával.

Vizsgált hálózatunk ezek szerint a következő komponensek összekapcsolásából áll (lásd az 1a és 1b ábrát):

– forrás	u_i adott DI illetve FI függvény;	$i = 1, 2,..., N_U$;
– nyelő	y_i keresett DI illetve FI függvény;	$i = 1, 2,..., N_Y$;
– lineáris erősítő	$q_i = K_i p_i$, K_i ismert;	$i = 1, 2,..., N_K$;
– DI késleltető/ FI integrátor	x_i' bemeneti, x_i kimeneti változó;	$i = 1, 2,..., N_X$;
– nemlineáris erősítő	$\eta_i = \Phi_i(\xi_{i1}, \xi_{i2}, \ldots, \xi_{iI_i})$, Φ_i ismert;	$i = 1, 2,..., N_\Phi$.

A lineáris jelfolyam hálózatokhoz hasonlóan az összekapcsolási kényszerek alapján most is kifejezhető egyrészt valamennyi komponens bemeneti változója a komponensek kimeneti változójának lineárkombinációjaként, másrészt a karakterisztikák kifejezik a kimeneti változókat a bemeneti változókkal.

A hálózat által reprezentált *rendszer* állapotváltozói továbbra is lehetnek az egyes DI késleltetők vagy FI integrátorok x_i kimeneti változói.

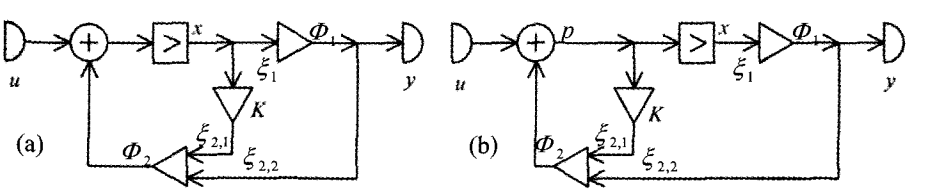
Ha a hálózat nem tartalmaz memóriamentes (azaz csak lineáris és nemlineáris erősítőket tartalmazó) hurkot, akkor a hálózati egyenletekből lineáris műveletekkel előállítható a hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírásának (1) és (2) szerinti alakja.

Példa Az 1a és 1b ábrán látható jelfolyam hálózatban ismert a K erősítés, a $\Phi_1(\xi_1)$ egyváltozós, a $\Phi_2(\xi_{2,1}, \xi_{2,2})$ kétváltozós függvény a hálózatra felírható az alábbi egyenletrendszer (öt ismeretlent tartalmazó öt egyenlet)

$$x' = \Phi_2(\xi_{2,1}, \xi_{2,2}) + u\,,\ \xi_1 = x,\ \xi_{2,1} = Kx,\ \xi_{2,2} = \Phi_1(\xi_1);\ \ y = \Phi_1(\xi_1).$$

A ξ jelű változókat kiküszöbölve kapjuk az állapotváltozós leírás (1), (2) szerinti normálalakját:

$$x' = \Phi_2(Kx, \Phi_1(x)) + u\,, \qquad y = \Phi_1(x).$$



2.5-1. ábra Egy dinamikus komponenst, egy lineáris és két nemlineáris erősítőt tartalmazó hálózat, amelyikben (a) nincs illetve (b) van memóriamentes hurok

Az 1b ábrán látható hálózatra felírható egyenletek a p jelű változó bevezetésével (a ξ jelű változókat az x és p jelűekkel kifejezve)

$$x' = p,\ \ p = \Phi_2(Kp, \Phi_1(x)) + u\,,\ ;\ \ y = \Phi_1(x).$$

A középső egyenlet nem oldható meg képletszerűen p-re, de bármely k_i illetve t_i időpontra p numerikusan kifejezhető x és u aktuális értékével, tehát előállítható az állapotváltozós leírás normálalakja. Ez általánosan azért nem lehetséges, mert az 1b ábra szerinti hálózat memóriamentes hurkot tartalmaz. #

2.5-1.4. Egyensúlyi állapotok

Sok gyakorlati feladatnál a nemlineáris, invariáns rendszer gerjesztései **állandó** értékűek pozitív időkre vagy állandó értékhez tartanak. Formálisan megfogalmazva

$$\begin{aligned} &\text{DI:}\quad \mathbf{u}[k]=\bar{\mathbf{u}},\ k\in\mathbf{N} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u}[k]\to\bar{\mathbf{u}},\ k\to\infty; \\ &\text{FI:}\quad \mathbf{u}(t)=\bar{\mathbf{u}},\ t\in\mathbf{R}_+ \quad \text{vagy} \quad \mathbf{u}(t)\to\bar{\mathbf{u}},\ t\to\infty. \end{aligned} \tag{2.5-6}$$

Ha van olyan $\bar{\mathbf{x}}$ állapotvektor, amely ekkor megoldása az állapotegyenletnek, akkor ez a rendszernek az *egyensúlyi állapota* (egyensúlyi pontja), a megfelelő $\bar{\mathbf{y}}$ érték az *egyensúlyi válasz*. Adott állandó gerjesztés esetén a rendszernek több egyensúlyi állapota és egyensúlyi válasza is lehet.

Mivel az állandó DI állapotvektor eltolt értéke ugyanaz az állandó, míg az állandó FI állapotvektor deriváltja nulla, ezért az $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ állapotegyenletű rendszer egyensúlyi állapotát (állapotait) a következő nemlineáris egyenlet megoldásai adják:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{DI:}\quad \mathbf{F}(\mathbf{x},\bar{\mathbf{u}})=\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_1,\bar{\mathbf{x}}_2,\ldots,\bar{\mathbf{x}}_m; \\ &\text{FI:}\quad \mathbf{F}(\mathbf{x},\bar{\mathbf{u}})=\mathbf{0}; \quad \mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}_1,\bar{\mathbf{x}}_2,\ldots,\bar{\mathbf{x}}_m. \end{aligned}} \tag{2.5-7}$$

Az egyensúlyi válaszok ezek ismeretében a (2) értelmében

$$\bar{\mathbf{y}}_i=\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}}_i,\bar{\mathbf{u}}); \quad i=1,2,\ldots,m. \tag{2.5-8}$$

Az egyensúlyi állapotot vagy az egyensúlyi választ nevezik munkapontnak is.

Szorítkozzunk autonóm rendszer vizsgálatára, vagyis a rendszer invariáns, gerjesztései állandók (speciálisan $\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{0}$ is lehet). Ekkor például a következő kérdésekre kell válaszolnunk:

– Hány egyensúlyi állapota van a rendszernek? Speciálisan: van-e a rendszernek egyensúlyi állapota?

– Milyen feltételek mellett tart a rendszer állapota valamelyik (esetleg az egyetlen) egyensúlyi állapothoz? Speciálisan: melyek azok az egyensúlyi állapotok, amelyek bizonyos feltételek mellett előállhatnak (stabilis egyensúlyi állapotok), melyek azok, amelyek semmiképpen sem állhatnak elő (labilis egyensúlyi állapotok)?

– Milyen folyamatok zajlanak le akkor, ha a rendszernek nincs stabilis egyensúlyi állapota?

– Mikor nevezhető a rendszer stabilisnak?

– Stabilis-e a rendszer, ha csak egyetlen egyensúlyi állapota van és az stabilis?

A fenti kérdésekre a válaszok adott rendszer esetén függhetnek az állandó gerjesztések nagyságától és a kezdeti állapottól. Ennek kapcsán újra meg kell gondolni, hogy mikor nevezhető a rendszer stabilisnak.

Az autonóm rendszernek az állandó (statikus) egyensúlyi állapotai mellett lehetnek időben változó (dinamikus) egyensúlyi állapotai is, speciálisan a periodikusan változó állapotvektora. Ilyen állapot lineáris, invariáns rendszerben is felléphet (például FI esetben van a képzetes tengelyre eső, DI esetben az egységsugarú körre eső egyszeres sajátérték-párja).

Amint látjuk, a nemlineáris rendszer vizsgálata során sok olyan kérdés merül fel, amelyek lineáris, invariáns rendszer esetén vagy fel sem merülnek vagy egyszerűen megválaszolhatók.

Példa Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása

$$x' = -\Phi(x) + u; \quad y = \Phi(x); \quad \Phi(x) = 300\,x - 45\,x^2 + 2\,x^3 .$$

Egy ilyen rendszert reprezentál az 1a és 1b ábrán látható hálózat, ha speciálisan $K = 0, \Phi_1(\xi_1) = \Phi(\xi_1), \Phi_2(\xi_{2,1}, \xi_{2,2}) = -\xi_{2,2}$.

Határozzuk meg az egyensúlyi állapotot és az egyensúlyi választ, ha a gerjesztés $u(t) = \bar{u}, t \in \mathbf{R}_+$, ahol $(a)\,\bar{u} = 400$; $(b)\,\bar{u} = 550$; $(c)\,\bar{u} = 700$.

Az egyensúlyi állapot az $x' = 0$ feltétel alapján a $0 = -\Phi(\bar{x}) + \bar{u}$ egyenlet, vagyis a

$$2\,\bar{x}^3 - 45\,\bar{x}^2 + 300\,\bar{x} - \bar{u} = 0$$

egyenlet valós megoldásai. Ebből következően az egyensúlyi válasz $\bar{y} = \bar{u}$. Ebben a speciális esetben az egyensúlyi válasz meghatározható $\bar{x}$ számítása nélkül. Ennek alapján azonban az egyensúlyi válasz stabilitásáról nem fogunk semmit sem tudni.

A $\Phi(x)$ függvény görbéjét felvázolva láthatjuk, hogy annak egy lokális maximuma és egy lokális minimuma van. Ebből következik, hogy vagy 1 vagy 3 egyensúlyi állapot van. A nemlineáris egyenlet megoldásával kapjuk, hogy

(a) $\bar{u} = 400$; $\bar{x} = 1{,}763$; $\bar{y} = 400$;

(b) $\bar{u} = 550$; $\bar{x}_1 = 3{,}012$; $\bar{x}_2 = 7{,}835$; $\bar{x}_3 = 11{,}653$; $\bar{y} = 550$;

(c) $\bar{u} = 700$; $\bar{x} = 13{,}075$; $\bar{y} = 700$.

Az (a) és a (c) esetben egyetlen egyensúlyi állapot van. Ha az stabilis, akkor valószínűleg az az állapot be is fog állni bármilyen kezdeti állapot mellett. (Mint később látni fogjuk, valóban ez a helyzet.) Ezzel szemben a (b) esetben, amikor három egyensúlyi állapot van, elég nehéz előzetes elképzelést kialakítani. (Később ezt az esetet is meg fogjuk vizsgálni.) #

2.5-1.5. Az egyensúlyi állapot stabilitása

Az autonóm rendszer állandó $\bar{\mathbf{u}}$ gerjesztéshez tartozó állandó $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapotának stabilitása egyszerűen vizsgálható, ha az egyensúlyi állapot izolált (vagyis nincs környezetében másik egyensúlyi pont) és ha az állapotegyenlet (1) szerinti alakjában szereplő **F(x, u)** függvény az $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ pontban differenciálható, vagyis létezik az A derivált mátrixa (Jacobi-mátrixa), amelynek szimbolikus alakja, illetve rendezői

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \Leftrightarrow \quad (A)_{pq} = \left.\frac{\partial F_p(x_1, x_2, \ldots, x_N, \mathbf{u})}{\partial x_q}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}},\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} . \tag{2.5-9}$$

Vezessük be az $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapottól való eltérésre az

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \tag{2.5-10}$$

jelölést. Közelítsük az **F** függvényt $\bar{\mathbf{x}}$ környezetében elsőfokú Taylor-polimomjával:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \approx \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + A\,\tilde{\mathbf{x}} . \tag{2.5-11}$$

Az **F** függvény határozza meg, hogy az állapottérnek az $\bar{\mathbf{x}}$ körüli mely tartományában fogadható el ez a közelítés előírt hibán belül. E tartomány ismeretére azonban jelenleg

nincs szükségünk. Az (1) állapotegyenlet ezzel a közelítéssel a következő lesz: $\bar{\mathbf{x}}' + \tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + A\,\tilde{\mathbf{x}}$. A DI esetben $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{x}}$ és $\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{x}}$, míg a FI esetben $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$. Az állapotegyenlet az egyensúlyi pont környezetében mindkét esetben

$$\tilde{\mathbf{x}}' = A\,\tilde{\mathbf{x}}\,. \tag{2.5-12}$$

Ez alakilag megegyezik a lineáris, invariáns, gerjesztetlen rendszer állapotegyenletével. Ennek egyetlen egyensúlyi állapota $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, amelynek stabilitását az A mátrix sajátértékei határozzák meg. Ebből következik az alábbi megállapítás.

Az $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ állapotegyenletű rendszernek az $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ állandó gerjesztéshez tarozó $\bar{\mathbf{x}}_i$ *egyensúlyi állapota* akkor *stabilis*, ha az A_i mátrix (az $\mathbf{F}$ függvény $\mathbf{x}$ szerinti derivált mátrixa az $\bar{\mathbf{x}}_i$ helyen) minden $\lambda_{i,p}$ sajátértékére teljesül, hogy

$$\text{DI}: \left|\lambda_{i,p}\right| < 1; \quad \text{FI}: \mathcal{R}e\left\{\lambda_{i,p}\right\} < 0, \quad p = 1,2,\ldots,N. \tag{2.5-13}$$

Az egyensúlyi állapot stabilitása azt jelenti, hogy ha $\mathbf{x}[k]$ illetve $\mathbf{x}(t)$ már elég közel került egy stabilis egyensúlyi állapotához, akkor ahhoz fog tartani. Ez azt is jelenti, hogy ha az állapotvektor egy stabilis egyensúlyi állapotába került és valamilyen zavaró hatás miatt onnan kissé kimozdul, akkor oda vissza fog térni. Az nem dönthető el egyszerűen, hogy mikor van az állapotvektor „elég közel" egy egyensúlyi állapotához, vagy hogy mikor mozdult el onnan csak „kissé".

Az egyensúlyi pont stabilitására vonatkozó fenti szemléletes állítás itt nem tárgyalt szigorú megfogalmazása Poincaré és Ljapunov nevéhez fűződik.

Példa Az előző pont példájában vizsgált folytonos idejű rendszerre

$$x' = F(x,u) \equiv -\Phi(x) + u\,; \quad \Phi(x) = 300\,x - 45\,x^2 + 2\,x^3\,;$$
$$A(x,u) = -\Phi'(x) \equiv -\left(300 - 90\,x + 6\,x^2\right).$$

A derivált mátrix most skalár (mivel az állapotváltozók száma $N = 1$), és esetünkben a gerjesztéstől közvetlenül nem függ (persze az egyensúlyi állapot függ a gerjesztéstől). A linearizált rendszer sajátértéke megegyezik A egyensúlyi értékével.

Az előző pont példájában vizsgált három gerjesztés esetén

(a) $\bar{u} = 400 \Rightarrow \bar{x} = 1{,}763;\ \lambda = -160;$

(b) $\bar{u} = 550 \Rightarrow \bar{x}_1 = 3{,}012;\ \lambda_1 = -83{,}36;\ \bar{x}_2 = 7{,}835;\ \lambda_2 = +36{,}83;\ \bar{x}_3 = 11{,}563;\ \lambda_3 = -65{,}97;$

(c) $\bar{u} = 700 \Rightarrow \bar{x} = 13{,}075;\ \lambda = -148{,}99.$

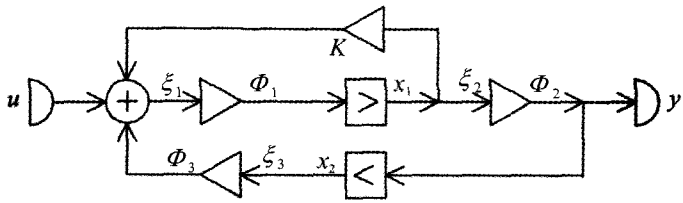
Ezek szerint $\bar{u} = 400$ és $\bar{u} = 700$ esetén az egyetlen egyensúlyi állapot stabilis. Valószínű, hogy bármilyen kiindulási állapot és bármely, ehhez az $\bar{u}$ értékhez tartó gerjesztés esetén ez az állapot fog beállni. Ennek megfelelően $\bar{y} = 400$ vagy $\bar{y} = 700$ lesz az állandósult válasz.

Ha $\bar{u} = 550$, akkor két stabilis egyensúlyi állapot is van, a harmadik labilis. Azt sejthetjük, hogy valamelyik stabilis állapot be fog állni, az állandósult válasz pedig $\bar{y} = 550$ lesz. Azt azonban ezek alapján nem lehet meghatározni, hogy melyik stabilis egyensúlyi állapot fog beállni. Ha a kezdeti állapot valamelyik stabilis egyensúlyi állapot környezetében van, akkor rövid időn belül beáll a közeli állandósult állapot.

Nagyobb rendszám esetén még nehezebb a trajektóriák menetéről előzetes megállapításokat tenni. #

2.5-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a 2. ábrán látható nemlineáris hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását!



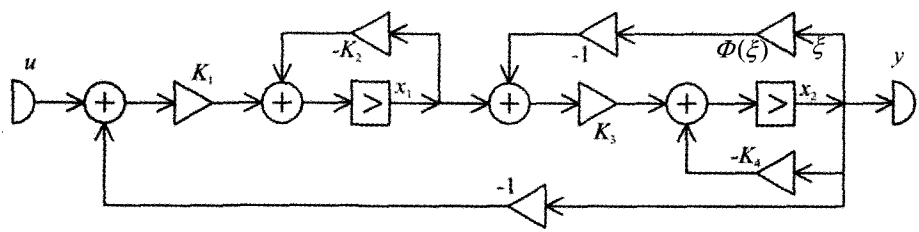
2.5-2. ábra Két dinamikus komponenst, három nemlineáris és egy lineáris erősítőt tartalmazó jelfolyam hálózat

F-2. Állítsa elő az előző feladatban szereplő FI vagy DI rendszer egyensúlyi állapotait meghatározó egyenletrendszert! Hogyan egyszerűsödik ez, ha minden $\Phi_i(\xi_i)$ függvény egyetlen nullahelye a $\xi_i = 0$ érték? (Ez a gyakorlatban sokszor teljesül.)

F-3. Mi a feltétele annak, hogy az előző feladatban meghatározott egyensúlyi állapot stabilis legyen?

F-4. Léteznek-e olyan $\Phi_i(\xi_i)$ karakterisztikák, amelyek mellett az 1. feladatban vizsgált rendszernek nincs egyensúlyi állapota? Feltételezzük, hogy az origó minden karakterisztikának egy pontja.

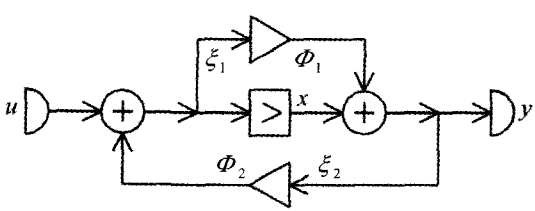
***F-5.** Léteznek-e olyan $\Phi_i(\xi_i)$ karakterisztikák, amelyek mellett az 1. feladatban vizsgált rendszer egyensúlyi állapota bizonyos $\bar{u}$ állandó gerjesztés esetén nem izolált?



2.5-3. ábra Két dinamikus komponenst és egy nemlineáris erősítőt tartalmazó hálózat

F-6. Oldja meg az 1. feladatot a 3. ábrán látható hálózatra!

F-7. Oldja meg az 2. és a 3. feladatot a 3. ábrán látható hálózatra!



2.5-4. ábra Egy dinamikus komponenst és két nemlineáris erősítőt tartalmazó hálózat

F-8. Határozza meg a 4. ábrán látható hálózat által reprezentált rendszer állapotváltozós leírását, ha ez lehetséges! Egyszerűsödik-e a feladat, ha akár az egyik, akár a másik erősítő lineáris?

F-9. Egy folytonos idejű, gerjesztetlen rendszerben az $y(t)$ válasz változásának sebessége (az y' derivált) arányos az y válasz értékének és az 1 telítési értékétől való $1-y$ eltérésének a szorzatával. Ennek megfelelően a rendszer állapotegyenlete

$$y' = \alpha y(1-y); \quad y = y(t).$$

Igazolja, hogy az $y(0)=y_0 > 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás

$$y(t) = \frac{1}{1+C\,\mathrm{e}^{-\alpha t}}; \quad C \equiv \frac{1-y_0}{y_0}.$$

Hogyan viselkedik $y(t)$, ha α pozitív, illetve ha negatív?
Ez olyan kivételes feladat, amikor zárt alakú megoldás előállítható.

F-10. Az előző feladat diszkrét idejű megfelelőjének egy lehetséges alakja

$$y' - y = a\,y\,(1-y'); \quad y = y[k].$$

Állítsa elő az állapotegyenletet és igazolja, hogy az $y[0]=y_0 > 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás

$$y[k] = \frac{1}{1+C\,q^k}; \quad C \equiv \frac{1-y_0}{y_0}, \quad q \equiv \frac{1}{1+a}.$$

Hogyan viselkedik $y[k]$ az a paraméter értékétől függően?
Ez is olyan kivételes feladat, amikor zárt alakú megoldás előállítható.

2.5-1.M. Megoldások

M-1. A 2. ábra jelöléseivel $x_1' = \Phi_1(Kx_1 + \Phi_3(x_2) + u)$, $x_2' = \Phi_2(x_1)$; $y = \Phi_2(x_1)$.

M-2. A FI esetben az $x_i' = 0$ feltételből $\Phi_1(K\,\bar{x}_1 + \Phi_3(\bar{x}_2) + \bar{u}) = 0$, $\Phi_2(\bar{x}_1) = 0$. A megadott speciális esetben $\bar{x}_1 = 0$, $\Phi_3(\bar{x}_2) = -\bar{u}$.

A DI esetben az $x_i' = x_i$ feltételből $\Phi_1(K\bar{x}_1 + \Phi_3(\Phi_2(\bar{x}_1)) + \bar{u}) - \bar{x}_1 = 0$, és ezt felhasználva $\bar{x}_2 = \Phi_2(\bar{x}_1)$. A megadott speciális esetben a feladat nem egyszerűsödik.

Az egyenletek megoldhatósága vagy a megoldás egyértelműsége egyik esetben sem biztosított.

M-3. Vezessük be a következő jelöléseket (a vessző a függvény deriváltjátt jelöli, a derivált a megadott egyensúlyi értékénél számítandó):

$$\bar{\xi}_1 = K\bar{x}_1 + \Phi_3(\bar{x}_2) + \bar{u}, \quad \bar{\xi}_2 = \bar{x}_1, \quad \bar{\xi}_3 = \bar{x};$$
$$F_{11} = K\,\Phi_1'(\bar{\xi}_1), \quad F_{12} = \Phi_1'(\bar{\xi}_1)\Phi_3'(\bar{\xi}_3), \quad F_{21} = \Phi_2'(\bar{\xi}_2).$$

Az egyensúlyi pontban a linearizált állapotváltozós leírás karakterisztikus egyenlete

$$\begin{vmatrix} \lambda - F_{11} & -F_{12} \\ -F_{21} & \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - F_{11}\lambda - F_{12}F_{21} = 0.$$

Az egyensúlyi állapot akkor és csakis akkor stabilis, ha

$$\text{FI}: \quad F_{11} < 0, \quad F_{12}F_{21} < 0.$$
$$\text{DI}: \quad F_{12}F_{21} < 1 - F_{11}, \quad F_{12}F_{21} < 1 + F_{11}, \quad |F_{12}F_{21}| < 1.$$

M-4. A FI esetben a $\Phi_3(\bar{x}_2) = -\bar{u}$ egyenletnek nincs feltétlenül megoldása. Ez a helyzet, ha például a karakterisztika telítődő jellegű, mint amilyen $\Phi_3(\xi) = A\,\mathrm{arctg}(a\,\xi)$ és $|\bar{u}| > 2|A|/\pi$. A DI eset az előzőhöz hasonlóvá válik ha $\Phi_1(\xi_1) = C_1\xi_1$, ezért ennél általánosabb esetben sem mindig megoldható.

***M-5.** Tekintsük például a $\Phi_3(\bar{x}_2) = -\bar{u}$ egyenletet. Legyen a karakterisztika folytonos és intervallumonként lineáris (*A, B, a, b* pozitív állandók):

$$\Phi_3(\xi) = \begin{cases} A\,\xi, & |\xi| \le a \\ A\,a, & a \le |\xi| \le b, \\ B(\xi - b) + A\,a, & b \le |\xi|. \end{cases}$$

Ekkor $\bar{u} = -A\,a$ gerjesztés esetén minden az (*a, b*) intervallumba eső $\bar{x}_2$ egyensúlyi állapot, tehát például $\bar{x}_2 = (a+b)/2$ nem izolált egyensúlyi állapot. Ennek oka a karakterisztikára választott speciális közelítés.

M-6. Az ábra alapján némi rendezéssel kapjuk, hogy

$$x_1' = -K_2\,x_1 - K_1x_2 + K_1u, \quad x_2' = K_3x_1 - K_4x_2 - K_3\Phi(x_2); \quad y = x_2.$$

M-7. A DI esetben $\bar{x}_1 = K_1\{-\bar{x}_2 + \bar{u}\}/\{1 + K_2\}$ felhasználásával $(K_2 \ne -1)$ a

$$\{(1+K_2)(1+K_4) + K_1K_3\}\bar{x}_2 + \{1+K_2\}K_3\,\Phi(\bar{x}_2) = K_1K_3\,\bar{u}$$

nemlineáris egyenlet megoldása adja az $\bar{x}_2$ egyensúlyi állapotot (állapotokat).

A FI esetben $\bar{x}_1 = \{K_1/K_2\}\{-\bar{x}_2 + \bar{u}\}$ felhasználásával $(K_2 \ne 0)$ a

$$\{K_1\,K_3 + K_2K_4\}\bar{x}_2 + K_2K_3\,\Phi(\bar{x}_2) = K_1K_3\,\bar{u}$$

nemlineáris egyenlet megoldása adja az $\bar{x}_2$ egyensúlyi állapotot (állapotokat).

Az egyensúlyi állapotban linearizált rendszer karakterisztikus egyenlete mind a DI, mind a FI esetben $F \equiv \Phi'(\xi)|_{\bar{x}_2}$ jelöléssel

$$\begin{vmatrix} \lambda + K_2 & K_1 \\ -K_3 & \lambda + K_4 + F\,K_3 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + (K_2 + FK_3 + K_4) + (K_1K_3 + FK_2K_3 + K_2K_4) = 0.$$

Az egyensúlyi állapot stabilitásának feltételi egyenlőtlenségei már könnyen előállíthatók.

M-8. A hálózat memóriamentes hurkot tartalmaz, ezért nem meglepő, hogy az explicit alak általánosan nem állítható elő. Az állapotváltozós leírás két olyan implicit alakja, amely csak egy megoldandó nemlineáris egyenletet jelent:

$$\text{(I)} \quad x' = \xi_1, \qquad \xi_1 = \Phi_2(x + \Phi_1(\xi_1)); \qquad y = x + \Phi_1(\xi_1).$$
$$\text{(II)} \quad x' = \Phi_2(\xi_2) + u, \quad \xi_2 = x + \Phi_1(\Phi_2(\xi_2) + u); \quad y = \xi_2.$$

Rögzített t vagy k mellett x és u ismeretében középső egyenletből ξ_1 vagy ξ_2 numerikusan számítható, majd az állapotegyenlet jobb oldala és a válasz értéke is.

Nem jelent lényeges egyszerűsítést, ha a két erősítő bármelyike lineáris.

M-9. Behelyettesítéssel igazolható a megoldás helyessége. Esetünkben az elsőrendű differenciálegyenlet megoldható a változók szeparációjával:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta(1-\eta)} = \alpha \int_0^t \mathrm{d}\tau .$$

Ebből már egyszerűen következik, hogy a megadottól eltérő megoldás nincs is. A két egyensúlyi állapot $y = 0$ és $y = 1$. Ha $0 < y_0 < 1$ és $\alpha > 0$, akkor $y(t)$ monoton növekszik az y_0 kezdeti értékről az 1 értékre, míg ha $\alpha < 0$, akkor $y(t)$ monoton csökken az y_0 kezdeti értékről a 0 értékre. Ha a kezdeti érték a (0, 1) intervallumon kívüli, akkor a megoldás szakadásos. Ha a szakadási hely t valamilyen pozitív értékénél lép fel, akkor ez valószínűleg nem értelmes megoldás.

M-10. Az állapotegyenlet explicit alakja $y' = \dfrac{1+a}{1+a\,y}\,y$; $y = y[k]$.

Behelyettesítéssel igazolható, hogy a megadott megoldás ezt kielégíti. Ha $0 < y_0 < 1$ és $0 < a < \infty$ (azaz $1 > q > 0$), akkor $y[k]$ monoton növekszik a 0 értékről az 1 értékre, míg ha $-1 < a < 0$ (azaz $\infty > q > 1$), akkor $y[k]$ monoton csökken az y_0 értékről a 0 értékre; ha viszont $a < -1$ akkor q negatív és ezért lehet, hogy $y[k]$ minden ütemben előjelet vált. Ha a kezdeti érték nincs a (0,1) intervallumban, akkor a megoldásnak lehet szinguláris pontja. Többnyire csak az első és a második eset értelmes.

2.5–2. Az állapotegyenlet megoldása

2.5-2.1. Általános megfontolások

Míg a lineáris, invariáns rendszerek állapotegyenlete adott időfüggvényű gerjesztés esetén zárt alakban megoldható, vagyis adható egy $\mathbf{x} = \mathbf{x}[k]$ illetve $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ alakú képlet (2.3-2. szakasz), ez nemlineáris rendszerekre csak kivételesen lehetséges. Ilyen kivételes eset csak ritkán tekinthető valamilyen gyakorlati feladat modelljének.

A *diszkrét idejű* rendszer állapotegyenlete a fokozatos behelyettesítés módszerével („lépésről lépésre módszer"; 2.3-1.2. pont) megoldható. Ennek során ugyanis nem jelent érdemi különbséget, hogy $\mathbf{x}[k+1]$ az $\mathbf{x}[k]$ és az $\mathbf{u}[k]$ lineáris függvénye állandó együtthatókkal, vagy ennél bonyolultabb módon függ $\mathbf{x}[k]$ és $\mathbf{u}[k]$ értékétől. A *folytonos idejű nemlineáris* rendszer állapotegyenletének megoldásához azonban szinte mindig közelítő eljárásra van szükség.

A következőkben három közelítő eljárást fogunk tárgyalni: az egyensúlyi állapot körüli linearizálást, a tartományi linearizálást és a helyettesítési értékek számítását.

Az *egyensúlyi állapot körüli linearizálás* módszere akkor alkalmazható, ha elegendő az egyensúlyi állapot egy olyan kellően kis környezetét vizsgálni, amelyben minden nemlineáris függvény kielégítően közelíthető lineáris függvénnyel. Ebből következően a módszer nem mindig alkalmazható. Ha azonban alkalmazható, akkor rendkívül hatékony és általános következtetések levonására is alkalmas. A „kellően kis"

környezet kijelölése rendszerint nehéz feladat, de pontos ismeretére gyakran nincs is szükség. A lineáris rendszer az objektumnak az egyensúlyi állapot (gyakran $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$) körüli linearizált modellje. Nyilvánvaló, hogy nagy értékű, kellően hosszan tartó gerjesztés esetén semmilyen objektum nem modellezhető lineáris rendszerrel.

A *tartományonkénti linearizálás* módszerét rendszerint első közelítésként használjuk. Az eljárás hibája tetszőlegesen csökkenthető a tartományok számának növelésével. Ekkor azonban a módszer nagyon nehezen kezelhetővé válik. Gyakran az egyensúlyi állapotok számának, stabilitásának és a közelítő értékének meghatározására szorítkozunk az eljárás alkalmazása során.

A *helyettesítési értékek számításának* módszerét numerikus közelítő módszernek is nevezik, noha az előző két eljárás is részben vagy egészben numerikus. Ezek a numerikus módszerek folytonos idejű rendszerek számítására szolgálnak, tehát eredményük a válasz $y(0), y(t_1), y(t_2), \ldots, y(t_M)$ értékei. Hibájuk tetszőlegesen csökkenthető a számítási munka és idő növelése árán. A legtöbb matematikai programcsomag tartalmaz egy vagy több ilyen eljárást. E módszer hátránya, hogy segítségével csak akkor tudunk a rendszer működéséről általános megállapításokat tenni, ha kellően sok konkrét feladatot megoldottunk (például azonos gerjesztés és különböző kezdeti állapotok, azonos kezdeti állapot és különböző gerjesztések). Korántsem egyszerű azonban annak eldöntése, hogy mikor vizsgáltunk már meg „kellően sok" konkrét esetet. Ezért is van jelentőségük a különböző durva közelítéseknek, kvalitatív vizsgálatoknak.

A *válasz ábrázolását* rendszerint a szokásos módon végezzük a k, y illetve a t, y koordinátarendszerben. Ugyanígy ábrázolhatjuk az állapotváltozókat is. Utóbbiakat célszerűbb lehet $N = 2$ (esetleg $N = 3$) esetén az *állapotsíkon* (az *állapottérben*) a trajektória görbéjével ábrázolni. Ilyenkor az időskálától vagy eltekintünk, vagy csak nagyon durva skálázásra szorítkozunk. A rögzített (rendszerint állandó) gerjesztéshez és különböző kezdeti állapotokhoz tartozó trajektóriák seregének ábrája a *fázisportré*. E név magyarázata az, hogy az ábrázolási módot eredetileg másodrendű FI rendszerekre és az y, y' változókra, a „fázisváltozókra" alkalmazták. Ezek gyakran állapotváltozók, de nem feltétlenül azok.

2.5-2.2. Linearizálás az egyensúlyi állapotban

A rendszer gerjesztését mindig előállíthatjuk $u[k] = \bar{u} + \tilde{u}[k]$ illetve $u(t) = \bar{u} + \tilde{u}(t)$ alakban, ahol $\bar{u}$ állandó. Az $\bar{u}$ jelentheti például a gerjesztés állandósult értékét (mint az előző pontban), kezdeti értékét, de egy célszerűen választott más értékét is.

Jelölje az állandó $\bar{u}$ gerjesztéshez tartozó állapotvektort $\bar{\mathbf{x}}$ és a választ $\bar{y}$. Nevezzük ezeket *egyensúlyi állapotnak* és egyensúlyi válasznak, noha ezek az elnevezések csak akkor jogosak, ha $\bar{u}$ a gerjesztés állandósult értékét jelöli. Tekintsük az egyensúlyi értékeket ismertnek (2.5-1.5. pont).

A változókat ezek szerint a következő alakban állítjuk elő:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \tilde{\mathbf{y}}. \tag{2.5-13}$$

A feladat megoldása során ennek a felbontásnak akkor van haszna, ha az $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ változók „kellően kicsik". Nem könnyű eldönteni, hogy az ismert $\tilde{\mathbf{u}}$ mikor tekinthető „kellően kicsinek", az ismeretlen $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}$ összetevőkről pedig csak a számítás végén állíthatunk valamit, előzetes becslést adni nagyon nehéz. Mindezek ellenére a felbontás sok gyakorlati esetben előnyösen alkalmazható.

Az $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ állapotváltozós leírással jellemzett nemlineáris, invariáns rendszernek az egyensúlyi állapotbeli linearizálásán alapuló közelítő analízise a fenti felbontás alapján a következő lépésekből áll.

(1) *Az egyensúlyi állapot meghatározása*

Határozzuk meg a 2.5-1.4. pontban leírt módon az $\bar{\mathbf{u}}$ állandó gerjesztés-összetevőhöz tartozó $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapotot. Ha több egyensúlyi állapot van, akkor a továbbiakban egy kiválasztott stabilis egyensúlyi állapotról van szó.

Határozzuk meg a stabilis egyensúlyi állapotban az **F** és a **G** függvénynek az **x** és az **u** változók szerinti derivált mátrixát. Szimbolikusan

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \boldsymbol{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \boldsymbol{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}. \tag{2.5-14}$$

Az $\boldsymbol{A}$ számításmódját részletesebben a (9) adja, a többi mátrixra ez értelem szerint alkalmazható. A $\boldsymbol{C}$ és $\boldsymbol{D}$ számításra nincs feltétlenül szükség.

(2) *A linearizált rendszer vizsgálata*

A stabilis egyensúlyi állapot környezetében a nemlineáris rendszert az

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \boldsymbol{A}\,\tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{B}\,\tilde{\mathbf{u}}, \qquad \tilde{\mathbf{y}} = \boldsymbol{C}\,\tilde{\mathbf{x}} + \boldsymbol{D}\,\tilde{\mathbf{u}} \tag{2.5-15}$$

állapotváltozós leírású, lineáris, invariáns rendszerrel helyettesítjük. Ezt a lineáris állapotegyenletet valamilyen (például a 2.3. fejezetben tárgyalt) módszerrel megoldjuk. Az $\tilde{\mathbf{u}}[k]$ illetve az $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ gerjesztés jelalakjára nem vonatkozik megkötés.

Az állapotvektor ismeretében a válasz számítható vagy a linearizált összefüggésbe vagy a **G** függvénybe helyettesítéssel. Mindkét eljárásnak vannak előnyei és hátrányai.

(3) *A közelítés jogossága*

A megoldás ismeretében ellenőriznünk kell, hogy linearizálási eljárásunk jogos volt-e. Erre több lehetőségünk van, néhányat megemlítünk.

Megadhatjuk előre az $\tilde{x}_i$ és $\tilde{u}_i$ változók azon legkisebb és legnagyobb értékét, amelyek között az **F** (és a **G**) függvények lineáris közelítése az egyensúlyi pont környezetében elfogadható. A lineáris feladat megoldása előtt ellenőrizzük az $\tilde{u}_i$, a megoldás ismeretében az $\tilde{x}_i$ változókra vonatkozó feltételek teljesülését.

Úgy is eljárhatunk, hogy a lineáris közelítéssel kapott megoldás ismeretében vizsgáljuk az **F** (és a **G**) függvények eltérését lineáris közelítésüktől, majd eldöntjük, hogy azok elfogadhatók-e.

A hálózati reprezentáció ismeretében célszerű lehet az ellenőrzést a nemlineáris erősítők karakterisztikájára elvégezni. Ekkor a $\tilde{\xi}_i$ változók időfüggését is számítanunk kell. Ez rendszerint nem jelent számítási többletet.

Az $\eta = \Phi(\xi)$ karakterisztikájú nemlineáris erősítő linearizált közelítése egy $\bar{\xi}$ egyensúlyi pont környezetében $\tilde{\eta} = \Phi'(\bar{\xi})\tilde{\eta}$, vagyis a nemlineáris erősítőt egy $K = \Phi'(\bar{\xi})$ erősítésű lineáris erősítővel helyettesítjük. Egy két-bemenetű erősítő linearizált közelítése

$$\eta = \Phi(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow \tilde{\eta} = K_1\tilde{\xi}_1 + K_2\tilde{\xi}_2, \quad K_i = \left.\frac{\partial \Phi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_i}\right|_{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2}. \tag{2.5-16}$$

Ez két lineáris erősítővel és egy összegező csomóponttal realizálható.

A linearizált modellt különösen akkor kell kritikusan kezelnünk, amikor a nemlineáris rendszernek több stabilis egyensúlyi állapota (egyensúlyi pontja vagy állandósult trajektóriája) van. Ekkor ugyanis a vizsgált stabilis egyensúlyi ponttól „túlságosan távol" a közelítés teljesen hamis eredményt adhat, mert az onnan induló trajektória esetleg nem a vizsgált stabilis egyensúlyi ponthoz tart, hanem egy másikhoz vagy egy stabilis határciklushoz. A linearizált állapotegyenlet alapján ennek eldöntésére kevés a támpontunk. Ezt a problémát más módszerrel sem egyszerű megoldani.

Mint már említettük, ezt a közelítést elterjedten alkalmazzuk - esetleg úgy, hogy nem is vagyunk tudatában. Amikor ugyanis egy rendszert *lineárisnak* tekintünk, akkor többnyire az $\bar{u} = 0$ gerjesztéshez tartozó $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ stabilis egyensúlyi pont körüli linearizált modellt vizsgáljuk, és ekkor $\tilde{u} = u$, vagyis maga a gerjesztés. Egy másik gyakori eset, amikor $\bar{u}$ az állandó, névleges (üzemi) gerjesztést jelenti, míg $\tilde{u}$ az ettől való szándékos vagy zavar jellegű eltérést.

Példa Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozós leírása (2.5-1.5. pont)

$$x' = -\Phi(x) + u\,,\quad y = \Phi(x);\quad \Phi(x) = 300\,x - 45\,x^2 + 2\,x^3.$$

Ennek linearizált megfelelője valamely $\bar{u}, \bar{x}$ környezetében

$$\tilde{x}' = -\Phi'(\bar{x})\tilde{x} + \tilde{u}\,,\quad \tilde{y} = \Phi'(\bar{x})\tilde{x}\,;\quad \Phi'(\bar{x}) = 300 - 90\,\bar{x} + 6\,\bar{x}^2.$$

Ha $\bar{u} = 550$, akkor két stabilis egyensúlyi állapot is van (2.5-1.6. pont):

$$\bar{x}_1 = 3{,}012\,;\quad \tilde{x}' = -83{,}36\,\tilde{x} + \tilde{u}\,,\quad \tilde{y} = 83{,}36\,\tilde{x}\,;$$
$$\bar{x}_3 = 11{,}653\,;\quad \tilde{x}' = -65{,}97\,\tilde{x} + \tilde{u}\,,\quad \tilde{y} = 65{,}97\,\tilde{x}\,.$$

Könnyen belátható, hogy a $\Phi(x)$ függvénynek maximuma van az $x_a = 5$ helyen; ennél nagyobb x értékekre az első közelítés biztosan nem használható $(\tilde{x} < 2)$. Mivel a $\Phi(x)$ függvénynek minimuma van az $x_b = 10$ helyen, ezért ennél kisebb x értékekre a második közelítés biztosan nem használható $(\tilde{x} > -1{,}6)$.

Ha például az $\bar{x}_1$ környezetében a lineáris közelítést a $2 < x < 4$ intervallumban tekintjük érvényesnek, akkor az intervallum két szélén pontosan és a

$$\Phi(x) \approx \Phi(\bar{x}) + \Phi'(x)(x - \bar{x}_1)$$

közelítéssel

$$\Phi(2) = 436\,;\quad \Phi(2) \approx 550 + 83{,}36\,(2 - \bar{x}_1) = 465{,}7\,;$$
$$\Phi(4) = 608\,;\quad \Phi(4) \approx 550 + 83{,}36\,(4 - \bar{x}_1) = 632{,}4\,,$$

ami +7%, illetve +4% relatív hibát jelent. A nemlineáris karakterisztika közelítésének relatív hibája ezek szerint legfeljebb 7%. Ez többnyire elfogadható, ezért az intervallum megfelelőnek tekinthető. A nemlineáris karakterisztika relatív hibája csak egy becslése a válasz relatív hibájának. Még ebben az egyszerű esetben sem könnyű általánosan válaszolni arra a kérdésre, hogy az $u(t)$ vagy az $\tilde{u}(t)$ gerjesztésnek milyen feltételeket kell kielégítenie ahhoz, hogy $x(t)$ vagy $\tilde{x}(t)$ a megengedett intervallumon belül maradjon. A közelítés elfogadhatóságát ezért minden esetben meg kell vizsgálni. #

2.5-2.3. Tartományonkénti linearizálás

Az egyváltozós függvényt – például egy nemlineáris erősítő karakterisztikáját - többnyire tetszőleges pontossággal közelíthetjük intervallumonként lineáris függvénnyel:

$$\eta = \Phi(\xi) \Rightarrow \eta = K_p\xi + L_p\,,\ \xi \in \Omega_p \text{ vagy } \hat{\xi}_p \le \xi < \hat{\xi}_{p+1}\,. \qquad (2.5\text{-}17)$$

A K_p és az L_p paramétert célszerű úgy megválasztani, hogy az intervallum két végpontjában a közelítő érték a pontossal egyező legyen. Ha a módszert első közelítésként használjuk, akkor a vizsgált tartományt csak néhány intervallumra bontjuk.

Tételezzük fel egyelőre, hogy az állapotváltozós leírásban csak egyetlen ilyen függvény szerepel. A fenti közelítéssel előállítottuk az állapotegyenlet tartományonként lineáris közelítését. Az állapotegyenlet közelítő megoldásának menete ezek után a következő. A kezdeti állapot (rendszerint $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) kijelöli azt az Ω_p tartományt, amelyben a megoldás indul. A lineáris, invariáns állapotegyenlet megoldása a korábbiakban tárgyaltak alapján nem okoz elvi nehézséget.

Szerencsés esetben ebben a tartományban van olyan stabilis egyensúlyi állapot, ahová a trajektória tart a nélkül, hogy a tartományból kilépne. Ekkor a feladatot ebben a közelítésben megoldottuk.

Többnyire azonban van egy olyan t_1 időpont, amikor a ξ változó elér induló tartományának határára, tehát átkerül valamelyik szomszédos tartományba. Elfajuló esetektől eltekintve ez a szomszédos tartomány egyértelműen kiválasztható. A t_1 időpont többnyire numerikusan számítandó. Az új tartományban $\mathbf{x}(t_1)$ a kezdeti állapot. Most ismét egy lineáris, invariáns rendszert kell vizsgálnunk, csak más paraméterekkel.

Az állapotvektor esetleg a második tartományban egy egyensúlyi állapothoz tart, de többnyire egy t_2 időpontban a ξ változó eléri e tartomány határát, a trajektória átkerül egy harmadik (speciálisan az első) tartományba. Az eljárás így folytatandó, amíg nincs okunk a megállásra (beáll valamilyen állandósult állapot, elérkezünk a vizsgálat valamilyen határához).

A számítás eredménye többféle lehet.

(1) Az állapotvektor egy *stabilis egyensúlyi állapothoz tart* (a trajektória egy stabilis egyensúlyi pontban végződik).

(2) Az állapotvektor egy *periodikus állapothoz tart* (a trajektória egy zárt görbéhez simul). Ez lehet a periodikus gerjesztés által meghatározott, ekkor a periodikus állapot periódusideje a gerjesztés periódusideje által meghatározott, gyakran azzal megegyező. Előállhat periodikus gerjesztés más (például állandó) gerjesztés esetén, ekkor a periódusidő a rendszer által meghatározott. Utóbbi esetben a trajektória egy stabilis *határciklus*, a környezetéből (esetleg az állapottér minden pontjából) induló minden trajektória ehhez a zárt trajektóriához tart.

(3) Az állapotvektor *korlátlanul* növekszik. Ez arra utal, hogy modellünk csak bizonyos határig érvényes, hiszen a valóságban a változók nem növekedhetnek korlátlanul.

(4) Az állapotvektor korlátos marad, de nem mutat periodikus ismétlődést. Ekkor *kaotikus* viselkedésről beszélünk. Ez is mutat bizonyos szabályosságot, de részletezése meghaladja kereteinket.

A tartományi linearizálás módszerét gyakran csak első közelítésként, például az *egyensúlyi állapotok* meghatározására és stabilitásának eldöntésére használjuk. Az így kapott megoldást esetleg valamilyen módszerrel finomítjuk.

Ha célunk csak az egyensúlyi állapotok számának és körülbelüli helyének felderítése, akkor a (7) szerinti $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\mathbf{0}$ nemlineáris egyenletrendszer megoldása helyett minden Ω_p tartományra egy *lineáris egyenletrendszert* kell megoldanunk. Ha a lineáris egyenletrendszer megoldása a választott tartományba esik, akkor az egy lehetséges egyensúlyi állapot, ellenkező esetben egy „hamis megoldás", vagyis csak azt állapítottuk meg, hogy a választott tartományban nincs stabilis egyensúlyi állapot.

Nem jelent elvi bonyodalmat, ha az állapotváltozós leírásban több egyváltozós függvény szerepel. Ez a helyzet, ha a hálózati reprezentáció több egybemenetű, $\eta_i=\Phi(\xi_i)$ karakterisztikájú nemlineáris erősítőt tartalmaz. Ekkor több egyváltozós függvény intervallumonkénti lineáris közelítését kell előállítani és alkalmazni. Két független változó esetén egy Ω_i tartomány a $\hat{\xi}_{1,p}<\xi_1<\hat{\xi}_{1,p+1}, \hat{\xi}_{2,q}<\xi_2<\hat{\xi}_{2,q+1}$ egyenlőtlenségek által meghatározott téglalap a ξ_1,ξ_2 síkon. Értelem szerint az Ω_i tartomány jelentése több független változó esetén. Új tartomány adódik, ha bármelyik független változó eléri intervallumának határát.

Ha a feladatban kétváltozós nemlineáris függvény szerepel, akkor annak tartományonként lineáris közelítése

$$\eta=\Phi(\xi_1,\xi_2) \;\Rightarrow\; \eta=K_{i,1}\xi_1+K_{i,2}\xi_2+L_i, \quad \xi_1,\xi_2\in\Omega_i. \tag{2.5-18}$$

Kézenfekvő azt gondolni, hogy az Ω_i tartomány most is a $\hat{\xi}_{1,p}<\xi_1<\hat{\xi}_{1,p+1}$, $\hat{\xi}_{2,q}<\xi_2<\hat{\xi}_{2,q+1}$ értékek által kijelölt téglalap. Nem lehet azonban a három szabad paramétert úgy megválasztani, hogy a közelítő érték a pontos értékkel a téglalap mind a négy sarkában megegyezzék. Ezért nem lehet a folytonos két- vagy többváltozós függvényt ilyen tartományonként lineáris és folytonos függvénnyel közelíteni. Ez viszont a megoldás során különféle bonyodalmakat okoz. Az Ω_i tartományt ezért kétváltozós esetben háromszögeknek, háromváltozós esetben tetraédereknek kell választani, és így tovább. Ezek kezelése természetesen körülményesebb, de elvileg nem jelent újdonságot.

A tartományonkénti lineáris közelítés nagy előnye, hogy elegendő a szereplő nem lineáris függvények *néhány pontját* ismernünk a közelítő függvény előállításához. Nincs szükség tehát arra, hogy előállítsuk a nemlineáris függvények elemi függvényekkel (például polinomokkal) történő közelítését. Ez többnyire nehéz feladat, egyszerű közelítésekkel ritkán lehet elfogadhatóan kis hibát biztosítani.

1. példa A 2.5-1.3. pont példájában már vizsgált $\Phi(\xi)=300\,\xi-45\,\xi^2+2\,\xi^3$ függvénynek könnyen beláthatóan $\Phi(5)=625$ a lokális maximuma és $\Phi(10)=500$ egy lokális minimuma. A $\Phi(0)=0$ és $\Phi(15)=1125$ további pontokra támaszkodó tartományonkénti (esetünkben intervallumonkénti) lineáris közelítés

$$\Phi(\xi)\approx\Phi_1(\xi)=\begin{cases}125\,\xi, & -5\le\xi<5, \quad (\Omega_1)\\ 750-25\,\xi, & 5\le\xi<10, \quad (\Omega_2)\\ 125\,\xi-750, & 10\le\xi<20, \quad (\Omega_3).\end{cases}$$

A további példákban ezt a $\Phi_1(\xi)$ közelítést fogjuk használni és a $\Phi(\xi)$ függvényt pontosnak tekintjük (holott az valószínűleg maga is közelítés). #

2. példa Egy folytonos idejű, invariáns rendszer állapotegyenlete (2.5-1.5. pont)

$$x' = -\Phi(x) + u\,,$$

ahol Φ az előző példában megadott függvény.

Határozzuk meg az előző példában megadott közelítés felhasználásával az állapotváltozó $x(t)$ időfüggvényét, ha a belépő gerjesztést $u(t) = 550\,\varepsilon(t)$ írja le!

Az egyensúlyi állapotok a $\Phi(x) - 550 = 0$ egyenlet megoldásai. A $\Phi_1(x) - 550 = 0$ közelítő lineáris egyenlet megoldásai (zárójelben a 2.5-1.3. pont példájának pontosnak tekintett eredményei)

$$-5 \le x < 5: \quad \bar{x}_1 = 4{,}40\,; \quad (\bar{x}_1 = 3{,}012)\,;$$
$$5 \le x < 10: \quad \bar{x}_2 = 8{,}00\,; \quad (\bar{x}_2 = 7{,}835)\,;$$
$$10 \le x < 20: \quad \bar{x}_3 = 10{,}40\,; \quad (\bar{x}_3 = 11{,}653)\,.$$

Mindhárom megoldás a megfelelő tartományba esik, tehát három egyensúlyi pont van. A linearizált állapotegyenlet a három tartományban

$$x' = -125\,x + u\,, \qquad \Omega_1\colon \ -5 < x < 5\,;$$
$$x' = 25x - 750 + u\,, \qquad \Omega_2\colon \ 5 < x < 10\,;$$
$$x' = -125\,x + 750 + u\,, \qquad \Omega_3\colon \ 10 < x < 20\,.$$

Esetünkben $u = 550$ a t pozitív értékeire.

Mivel $x(0) = 0$, ezért a trajektória Ω_1-ben indul. Könnyen belátható

$$x(t) = 4{,}4\left\{1 - \mathrm{e}^{-125\,t}\right\}, \quad 0 \le t < t_1\,.$$

Mivel $x(t) < 5$, ezért $t_1 = \infty$, vagyis ekkor az $\bar{x}_1$ egyensúlyi állapot áll be monoton növekedéssel.

Valójában $x(t)$ nem exponenciális változású, egyensúlyi értéke nem 4,4 (hanem 3,01). Az azonban hihető, hogy a valódi folyamat monoton, a stabilis egyensúly beállásához szükséges idő 3/125 = 0,024 körüli érték. #

3. példa Oldjuk meg az előző példát, ha $u(t) = 750\,\varepsilon(t)$.

Az 1. példa szerinti közelítéssel az egyetlen egyensúlyi állapot $\bar{x} = 12{,}0$ (az Ω_3 tartományban) és ez stabilis. A pontos $\Phi(x)$ alapján $\bar{x}_3 = 13{,}39$ az egyensúlyi állapot.

Az Ω_1 tartományban az állandósult állapot 750/125 = 6, ami nincs Ω_1-ben. Ennek megfelelően a trajektória első szegmense

$$x(t) = 6\left\{1 - \mathrm{e}^{-125\,t}\right\}, \quad 0 \le t < t_1\,; \quad 6\left\{1 - \mathrm{e}^{-125\,t_1}\right\} = 5 \;\Rightarrow\; t_1 = 0{,}0143\,.$$

Ezután a trajektória az Ω_2 tartományba kerül, amelyben az állandósult állapot éppen 0 (ami nincs Ω_2-ben). Az $x(t_1) = 5$ felhasználásával (az állapotváltozó folytonos)

$$x(t) = 5\,\mathrm{e}^{25\,(t - t_1)}, \quad t_1 \le t < t_2\,; \; 5\,\mathrm{e}^{25\,(t_2 - t_1)} = 10 \Rightarrow t_2 = 0{,}0421\,.$$

Ezután a trajektória az Ω_3 tartományba kerül. Az előzőhöz hasonló eljárással

$$x(t) = 12 - 2\,\mathrm{e}^{-125\,(t - t_2)}, \; t_2 \le t < t_3\,,$$

ahol esetünkben $t_3 = \infty$. Ezzel a folyamat számítását be is fejeztük. #

4. példa Egy folytonos idejű, invariáns rendszer állapotváltozós leírása

$$x_1' = -10\,x_1 - \Phi(x_1) + 6\,x_2\,,$$
$$x_2' = -10\,x_1 - x_2 + 10\,u\,; \qquad y = x_1\,,$$

ahol Φ az 1. példában megadott függvény.

Határozzuk meg az $u(t) = 18{,}5\,\varepsilon(t)$ belépő gerjesztéshez tartozó választ!

Az egyensúlyi állapotok az $x_1' = 0$, $x_2' = 0$ alapján adódó lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$\Omega_1(-5 \le x_1 < 5):\ \bar{x}_1 = 5{,}692\,(\text{hamis}),\ \bar{x}_2 = 128{,}1;$$
$$\Omega_2(5 \le x_1 < 10):\ \bar{x}_1 = 8\,(\text{valódi}),\ \bar{x}_2 = 105;$$
$$\Omega_3(10 \le x_1 < 20):\ \bar{x}_1 = 9{,}538\,(\text{hamis}),\ \bar{x}_2 = 89{,}62\,.$$

Az állapotegyenlet lineáris közelítésben

$$x_1' = A\,x_1 + 6\,x_2 + B\,, \qquad A_1 = -135,\ A_2 = +15,\ A_3 = -135,$$
$$x_2' = -10\,x_1 - x_2 + 185\,; \qquad B_1 = 0,\ B_2 = -750,\ B_3 = +750.$$

A karakterisztikus egyenlet

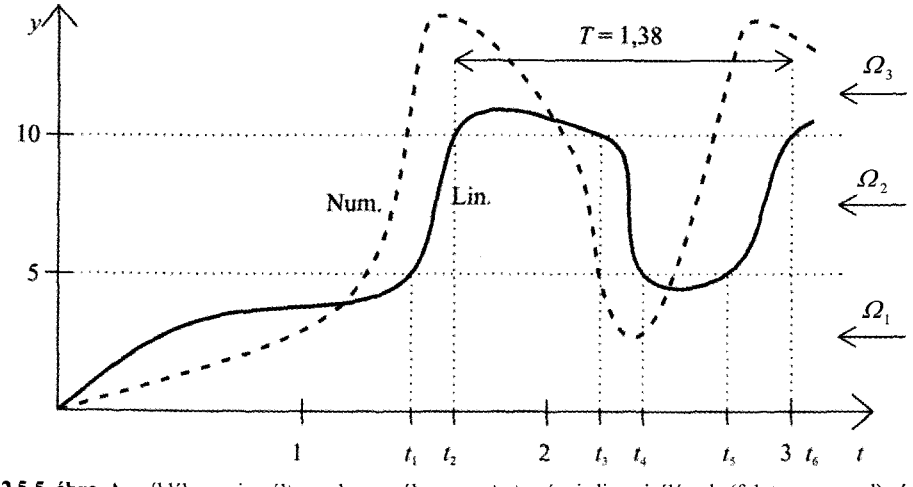
$$\begin{vmatrix} \lambda - A & -6 \\ 10 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 + (1 - A)\lambda + (60 - A) = 0\,.$$

Ennek megoldásai a sajátértékek:

$$\Omega_1, \Omega_3:\ \lambda_a = -134{,}55,\ \lambda_b = -1{,}4493\,, \qquad \Omega_2:\ \lambda_a = +9,\ \lambda_b = +5\,.$$

Mivel az Ω_1 és az Ω_3 tartománybeli (hamis) egyensúlyi állapot stabilis, ezért a trajektória ahhoz tart, de mivel nincsen benne a tartományban, azt nem éri el. Az Ω_2 tartománybeli valódi egyensúlyi állapot viszont nem stabilis! Ennek alapján azt várjuk, hogy állandósult rezgés (stabilis határciklus) fog kialakulni.

Az állapotegyenlet megoldásának általános alakja a $t_i < t < t_{i+1}$ intervallumban



2.5-5. ábra A példában vizsgált rendszer válasza a tartományi linearizálással (folytonos vonal) és pontonkénti számítással (szaggatott vonal)

$$x_1(t) = \bar{x}_1 + M_{1a}e^{\lambda_a(t-t_i)} + M_{1b}e^{\lambda_b(t-t_i)}, \quad M_{1a} = -\frac{\lambda_a + 1}{10}M_{2a},$$

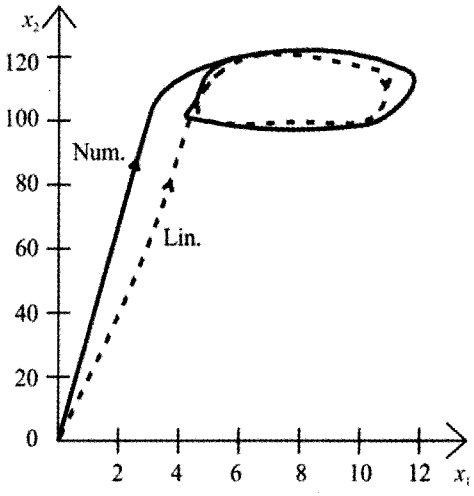
$$x_2(t) = \bar{x}_2 + M_{2a}e^{\lambda_a(t-t_i)} + M_{2b}e^{\lambda_b(t-t_i)}; \quad M_{1b} = -\frac{\lambda_b + 1}{10}M_{2b}.$$

Az M_{2a}, M_{2b} állandók $x_1(t_i)$ és $x_2(t_i)$ ismeretében számíthatók az állapotváltozók folytonossága alapján.

Az 5. ábrán vázoltuk az $x_1 = y$ állapotváltozó (és egyben a válasz) időfüggését. Ennek értelmében a folyamat a kezdeti felfutás után viszonylag hamar (kb. a $t_2 = 1{,}63$ időpont után) periodikussá válik, a periódusidő $T = 1{,}38$ időegység.

Az időfüggvény pontosságát illetően lehetnek kételyeink, de kvalitatíven az eredmény helyesnek tekinthető, vagyis valószínűleg van periodikus állandósult válasz, amely kb. $y_{\min} = 4{,}5$ és $y_{\max} = 10{,}5$ között változik.

Az 5. ábrán szaggatott vonallal megadtuk egy numerikus közelítő számítás eredményét is. Látható, hogy a két eredmény jellegre megegyezik. A tartományi linearizálással kisebb amplitúdójú és kisebb periódusidejű rezgés adódik (a pontosabb számítás szerint $T = 1{,}57$). A pontonkénti számítás eredménye szerint az állandósult állapot jóval később áll be (ez az 5. ábrából nem olvasható le).



2.5-6. ábra A trajektória az állapotsíkon. Szaggatott vonal: tartományi linearizálás eredménye; folytonos vonal: pontonkénti számítás eredménye

A 6. ábrán az állapotsíkon ábrázoltuk a trajektóriákat a tartományonkénti linearizálás módszerével számítva (szaggatott vonal), illetve a pontonkénti numerikus eljárással számolva (folytonos vonal). Ezen is megfigyelhetők az előbb említett és az 5. ábrán szemléltetett jellegzetességek. Így például a tartományonkénti linearizálás alapján a trajektória az első „körülfordulás" után már olyan közel kerül a határciklushoz, hogy az eltérés már nem is ábrázolható. A pontosabb számítás szerint ehhez legalább két körülfordulásra van szükség. #

2.5-2.4. A diszkrét idejű állapotegyenlet megoldása

A diszkrét idejű, $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)$ alakú, vagy részletesebben felírva az

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}(\mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k], k) \tag{2.5-19}$$

alakú állapotegyenlet megoldása az $\mathbf{u}[k], k \in \mathbf{N}$ gerjesztés és az $\mathbf{x}[0]$ kezdeti állapot ismeretében igen egyszerű a fokozatos behelyettesítés módszerével („lépésről lépésre módszer"):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[1] &= \mathbf{F}(\mathbf{x}[0], \mathbf{u}[0], 0), \\ \mathbf{x}[2] &= \mathbf{F}(\mathbf{x}[1], \mathbf{u}[1], 1), \\ \mathbf{x}[3] &= \mathbf{F}(\mathbf{x}[2], \mathbf{u}[2], 2), \ldots . \end{aligned} \tag{2.5-20}$$

Mint már említettük (2.5-2.1. pont) e megoldási módszer hátránya, hogy ismeretében nehéz általános következtetéseket levonni. Előnye viszont, hogy nem igényli a nemlineáris kapcsolatok elemi függvényekkel történő (gyakran nagy hibát okozó) közelítését. Míg lineáris, invariáns rendszer esetén adható a megoldásra általános képlet, nemlineáris rendszerre ez csak nagyon kivételesen fordul elő.

Az állapotvektor ismeretében a válaszvektor értékei az $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, k)$ egyenletbe helyettesítéssel ugyancsak ütemenként számíthatók.

1. példa A diszkrét idejű, elsőrendű rendszer állapotegyenlete $x' = wx(1-x)$, ahol w egy valós paraméter.

E rendszer a $k = 0$ ütemtől gerjesztetlen, az ismertnek tekintett $x[0]$ kezdeti állapotot a gerjesztés korábbi értékei hozzák létre.

Vizsgáljuk meg e rendszer lehetséges egyensúlyi állapotait!

Az $\bar{x} = w\bar{x}(1-\bar{x})$ egyenlet megoldásával a két egyensúlyi állapot $\bar{x}_1 = 0$ és $\bar{x}_2 = 1 - w^{-1}$. Az egyensúlyi állapot körüli linearizált állapotegyenlet $(x = \bar{x} + \tilde{x})$

$$\bar{x}_1 = 0: \quad \tilde{x}' = w\tilde{x}; \qquad \bar{x}_2 = 1 - w^{-1}: \quad \tilde{x}' = (2-w)\tilde{x}.$$

Ebből látható, hogy $\bar{x}_1$ akkor stabilis egyensúlyi állapot, ha $-1 < w < +1$, míg $\bar{x}_2$ akkor stabilis egyensúlyi állapot, ha $1 < w < 3$. Ha $w < -1$, vagy ha $w > 3$, akkor a kezdeti állapottól függően az állapotváltozó vagy korlátlanul növekszik, de elképzelhető, hogy egy véges intervallumban marad, esetleg periodikusan változik. #

2. példa Egy diszkrét idejű, másodrendű rendszer állapotegyenlete

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{A}\,\mathbf{x}; \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & -1{,}0 \\ 0{,}9 & 0{,}8 \end{bmatrix}, x_1 + x_2 < 1; \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0{,}8 & -0{,}4 \\ 0{,}7 & 0{,}5 \end{bmatrix}, \ x_1 + x_2 > 1.$$

E gerjesztetlen rendszer tartományonként lineáris. Az $\mathbf{x}[0]$ kezdeti állapotot a korábbi gerjesztés hozza létre.

Az állapotegyenlet megoldása a fokozatos behelyettesítés módszerével nem jelent nehézséget. Mindkét tartományban az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyensúlyi állapot. Az első tartományban az egyensúlyi pont nem stabilis, a második tartományban nincs egyensúlyi pont. Ebből sejthető, hogy bizonyos kezdeti állapotok esetén oszcilláló (esetleg periodikus) folyamat állhat elő. Az Olvasóra bízzuk annak numerikus ellenőrzését, hogy $x_1[0]=1{,}2$; $x_2[0]=0$ kezdeti állapot esetén olyan $\mathbf{x}[k]$ állapotvektor adódik, amelyre a

$0 < k < 100$ intervallumban $-2{,}1 < x_1[k], x_2[k] < 4$, és nem ismétlődik. Ebből természetesen még nem következik biztosan, hogy nem kezd-e az állapotváltozó később másként viselkedni. #

2.5-2.5. A folytonos idejű állapotegyenlet megoldása

Mint korábban már említettük, a folytonos idejű, nemlineáris rendszer állapotegyenletének csak kivételesen tudjuk megtalálni a zárt alakú megoldását. Közelítő megoldás előállítására sokféle módszer ismeretes. Kereshetjük például a megoldást egy kiválasztott intervallumban előre megválasztott függvények (például hatványfüggvények) szerinti sor alakjában. Ilyenkor a feladat a függvények együtthatóinak (valamilyen értelemben) optimális értékének meghatározása.

A továbbiakban azt az elterjedtebb módszert ismertetjük, amikor az állapotvektort bizonyos időpontokban számítjuk. Ezek a t_r időpontok lehetnek előre megválasztottak (rendszerint $t_r = rT, r \in \mathbf{N}$) vagy lehetnek a számítás során adaptívan választottak ($t_{r+1} = t_r + h_r$; a h_r lépésközt alkalmasan választjuk meg). A második eljárás körülményesebb, de sokkal hatékonyabb.

Meg kell adni annak kritériumát is, hogy meddig kívánjuk a számítást elvégezni. Ez lehet előre rögzített (megadjuk $t_{\max}$ értékét), de függhet a megoldástól is (például amikor az állapotvektor már alig változik vagy periodikussá válik).

Általános áttekintés

Tekintsük adottnak a folytonos idejű rendszer állapotegyenletét és kezdeti állapotát

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.5-21}$$

alakban adottnak. Az időtől való függést okozhatja a gerjesztés ismert időbeli változása, vagy a rendszer variáns jellege. Célunk az $\mathbf{x}(t_r)$ értékek meghatározása. A közelítő értéket jelölje $\mathbf{x}_r$, vagyis

$$\mathbf{x}_r \approx \mathbf{x}(t_r). \tag{2.5-22}$$

Feladatunk a $t_{r+1} = t_r + h_r$ időpontbeli $\mathbf{x}_{r+1}$ közelítő érték (minél pontosabb) meghatározása, ha a korábbi $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r-1}, \ldots$ értékek már ismertek. Az eljárás közelítő jellege miatt $\mathbf{x}_{r+1}$ még akkor sem lenne pontos, ha az előző értékek pontosak lennének, de természetesen azok is csak közelítések (az $\mathbf{x}_0$ kivételével).

Mint már említettük, gyakran célszerű az állapotváltozókon kívül a nemlineáris kapcsolatok független változóit is bevezetni (például a nemlineáris erősítők bemeneti változói). Ezeket nem célszerű vagy nem is lehet függvényként kiküszöbölni. Az alább tárgyalandó numerikus eljárások során e változók értékeit minden t_r időpontban numerikusan határozzuk meg $\mathbf{x}_r$ ismeretében.

A közelítő megoldást szolgáltató algoritmusokat a következő szempontok szerint csoportosítjuk (a magyarázatot l. alább):

- egylépéses és többlépéses (k-lépéses) algoritmusok;
- elsőrendű és magasabbrendű (p-edrendű) algoritmusok;
- explicit és implicit algoritmusok.

A megoldó algoritmus *egylépéses*, ha $\mathbf{x}_{r+1}$ számításához csak $\mathbf{x}_r$ értékét használjuk, kétlépéses, ha $\mathbf{x}_r$ és $\mathbf{x}_{r-1}$ értékét használjuk, stb. Az $\mathbf{x}_1$ csak egylépéses

algoritmussal számítható, az $\mathbf{x}_2$ csak egylépéses vagy kétlépéses algoritmussal és így tovább, vagyis a magasabbrendű algoritmusokat alacsonyabb rendűekkel kell indítani. Minél több lépéses az algoritmus, annál pontosabb eredményt szolgáltat.

A *p-edrendű* algoritmusok pontosan megadják $\mathbf{x}_{r+1}$ értékét, ha $\mathbf{x}(t)$ egy p-edfokú polinom lenne és ha a felhasznált $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r-1}, \ldots$ értékek pontosak lennének. Természetesen egyik feltétel sem teljesül, de az nyilvánvaló, hogy minél nagyobb p, annál kisebb az algoritmus hibája.

Az algoritmus *explicit*, ha $\mathbf{x}_{r+1}$ az $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r-1}, \ldots$ értékekkel explicit módon kifejezett, míg *implicit*, ha $\mathbf{x}_{r+1}$ meghatározásához nemlineáris egyenlet vagy egyenletrendszer megoldására van szükség. Utóbbi esetben rendszerint úgy járunk el, hogy egy explicit algoritmussal számítunk egy első becslést (prediktor), majd ezt iterációkkal pontosítjuk (korrektor). Többnyire néhány korrektor lépés után az eredmény nem változik, ekkor a korrekciót abbahagyjuk. Az implicit algoritmusok nem csak pontosabbak, de jobban védettek numerikus instabilitás ellen is.

A bonyolultabb eljárások ugyanannyi számítási munkával többnyire pontosabb eredményt szolgáltatnak, mint az egyszerűbbek. (Az „ugyanannyi számítási munka" azonban nem egyértelmű mérőszám.) A számítási pontosság növelésének kézenfekvő módja a lépésközök minél kisebbre választása, de legalább ennyire fontos a lépésközök célszerű megválasztása és a megoldó algoritmus kiválasztása is. A szakirodalom korántsem egységes a „legcélszerűbb algoritmus" kijelölésében.

Alább néhány eljárásnak csak az alapgondolatát ismertetjük, nem térünk ki számítástechnikai részletekre.

Néhány algoritmus

A következőkben - a teljességre való törekvés igénye nélkül - ismertetünk néhány egyszerű algoritmust az $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ állapotegyenlet közelítő megoldására.

Az *előrelépő Euler-algoritmus* egylépéses, elsőrendű, explicit:

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_r + h_r\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, t_r);\ r = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5-23}$$

Ez az algoritmus elsőrendű esetben szemléletesen az jelenti, hogy $x(t)$ görbéjét a t_r helyen az érintőjével helyettesítjük, amelynek iránytangense $x'(t_r) \approx f(x_r, t_r)$ és így számítjuk $x(t_{r+1})$ értékét.

A *hátralépő Euler-algoritmus* egylépéses, elsőrendű, implicit:

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_r + h_r\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1}, t_{r+1});\quad r = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.5-24}$$

E nemlineáris egyenlet megoldására szolgáló prediktor-korrektor algoritmus:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{r+1}^{(0)} &= \mathbf{x}_r + h_r\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, t_r); \\ \mathbf{x}_{r+1}^{(j+1)} &= \mathbf{x}_r + h_r\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1}^{(j)}, t_{r+1});\ j = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{2.5-25}$$

A korrektor iterációját addig folytatjuk, amíg a korrekció már elhanyagolhatóvá válik.

Ez az algoritmus elsőrendű esetben szemléletesen az jelenti, hogy $x(t)$ görbéjét a t_r helyen a t_{r+1} pontbeli érintőjével helyettesítjük, amely azonban csak közelítően számítható.

Példa Lineáris, autonóm, elsőrendű rendszer állapotegyenlete:

$$x' = -x\,;\; x(0) = 1.$$

Ennek megoldása könnyen beláthatóan

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t},\; t \in \mathbf{R}_+ \;\Rightarrow\; x(rh) = q^r,\; q \equiv \mathrm{e}^{-h} = 1 - h + \frac{1}{2}h^2 + \ldots,\; r \in \mathbf{N}.$$

Vizsgáljuk meg a fenti két Euler-módszerrel adódó megoldásokat állandó h lépésköz esetén. Ezek most zárt alakban előállíthatók.

Az előrelépő Euler-módszerrel a (23) alapján az

$$x_{r+1} = x_r - h\, x_r \equiv (1-h)\, x_r\,;\; x_0 = 1$$

differenciaegyenlet adódik. Ennek megoldása behelyettesítéssel beláthatóan

$$x_r = q_1^r\,,\quad q_1 \equiv 1 - h\,,\quad r \in \mathbf{N}.$$

A hátralépő Euler-módszerrel a (24) alapján adódó differenciaegyenlet

$$x_{r+1} = x_r - h\, x_{r+1} \Rightarrow x_{r+1} = \frac{1}{1+h}\, x_r,\; x_0 = 1\,.$$

Ennek megoldása behelyettesítéssel beláthatóan

$$x_r = q_2^r\,,\quad q_2 \equiv \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - \cdots,\quad r \in \mathbf{N}.$$

Látható, hogy q_1 és q_2 elsőfokú Taylor-polinomja megegyezik pontos q elsőfokú Taylor-polinomjával. Míg q_1 felhasználásával csak $h < 1$ esetén, addig q_2 felhasználásával tetszőleges lépésköz esetén is nullához tartó sorozat adódik. Ez illusztrálja, hogy az implicit módszerek kevésbé kényesek a lépésköz megválasztására. #

A *Runge–Kutta-algoritmusok* egylépésesek és explicitek. Általános sémájuk

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_r + h_r\, \mathbf{m}_r,\quad r = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{2.5-26}$$

ahol $\mathbf{m}_r$ a p számú $\mathbf{m}_{ri}$ meredekség súlyozott átlaga. Az igen elterjedt $p = 4$ rendszámú algoritmus egy szokásos alakja:

$$\begin{gathered}
\mathbf{m}_{r1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r, t_r), \qquad \mathbf{m}_{r2} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_r + \frac{h_r}{2}\mathbf{m}_{r1}, t_r + \frac{h_r}{2}\right),\\
\mathbf{m}_{r3} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_r + \frac{h_r}{2}\mathbf{m}_{r2}, t_r + \frac{h_r}{2}\right),\; \mathbf{m}_{r4} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_r + h_r\mathbf{m}_{r3}, t_r + h_r);\\
\mathbf{m}_r = \frac{1}{6}\{\mathbf{m}_{r1} + 2\,\mathbf{m}_{r2} + 2\,\mathbf{m}_{r3} + \mathbf{m}_{r4}\}.
\end{gathered} \tag{2.5-27}$$

A Runge–Kutta-algoritmusok használhatók többlépéses algoritmusok indítására.

Megemlítjük, hogy a $p = 1$ eset az előrelépő Euler-módszer, a $p = 2$ eset pedig a módosított Euler- (trapéz-) vagy az Euler–Cauchy-algoritmust jelenti.

A *Gear-algoritmus* kétlépéses, másodrendű, implicit. Egyik szokásos alakja

$$\mathbf{x}_{r+1} = \frac{4}{3}\mathbf{x}_r - \frac{1}{3}\mathbf{x}_{r-1} + \frac{2}{3}h\,\mathbf{f}(\mathbf{x}_{r+1}, t_{r+1}),\quad r = 1, 2, \ldots\,. \tag{2.5-28}$$

Az $\mathbf{x}_1$ valamilyen egylépéses algoritmussal számítandó. A nemlineáris egyenlet megoldását a (25) szerinti prediktor-korrektor algoritmussal végezzük. Prediktorként bármelyik explicit algoritmus használható.

A felsorolt algoritmusok csak ízelítőt adnak a sokféle kidolgozott eljárásból.

*2.5-2.6. Stabilitásvizsgálat

A nemlineáris rendszer stabilitásának vizsgálata fogalmilag is, számítástechnikailag is jóval körülményesebb a lineáris, invariáns rendszer stabilitásának vizsgálatánál. Az egyensúlyi állapot stabilitása linearizálással eldönthető (2.5-2.2. pont). Ennek egy fogalmi és számítástechnikai általánosítását tárgyaljuk az alábbiakban. A továbbiakban folytonos idejű, *autonóm* (állandó gerjesztésű és invariáns) rendszerekre szorítkozunk.

Az egyensúlyi állapot stabilitása

Először megadjuk az egyensúlyi állapot stabilitására vonatkozó különféle fogalmi definiciókat. A pont végén megadunk egy eljárást a stabilitás eldöntésére.

A folytonos idejű, autonóm rendszer egy $\bar{\mathbf{x}}_i$ *egyensúlyi állapotát* akkor nevezzük (Ljapunov értelemben) *stabilisnak,* ha az $\bar{\mathbf{x}}_i$ kellően kis környezetében lévő bármely $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapot esetén az $\mathbf{x}(t)$ állapotvektor az $\bar{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapot környezetében marad. Az egyensúlyi állapot *aszimptotikusan stabilis*, ha az állapotvektor a kezdeti állapotból az $\bar{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapothoz tart.

Az egyensúlyi pont stabilitásának alább részletezett pontosabb megfogalmazásánál az $\mathbf{x}$ vektor súlyozott euklideszi normáját használjuk:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} C_i^2 x_i^2}, \quad C_i \neq 0.$$

A C_i súlyok megválaszthatók (minden $C_i = 1$ lehetséges, de nem mindig célszerű választás).

(1) Egy $\bar{\mathbf{x}}_i$ *egyensúlyi állapot* akkor stabilis (Ljapunov értelemben stabilis), ha bármely, kellően kis $\varepsilon > 0$ értékhez található egy olyan (az ε értékétől függő) $\delta > 0$ érték, hogy az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti értékű állapotvektorra teljesül, hogy

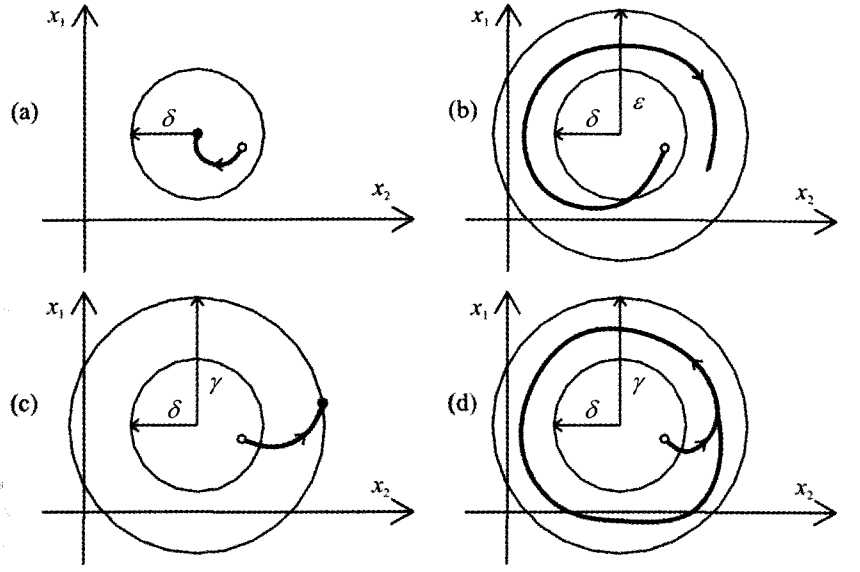
$$\|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \varepsilon, \; t > 0 \;\Rightarrow\; \|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \delta. \tag{2.5-29}$$

(2) Egy $\bar{\mathbf{x}}_i$ *egyensúlyi állapot* akkor *aszimptotikusan stabilis*, ha (Ljapunov értelemben) *stabilis* és még

$$\|\mathbf{x}(0) - \bar{\mathbf{x}}_i\| < \delta \;\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}_i\| = 0. \tag{2.5-30}$$

(3) Az $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapot akkor *globálisan aszimptotikusan stabilis*, ha $\mathbf{x}(t)$ bármely $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotból az egyetlen $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapothoz tart.

A definícióban az ε „kellően kis" értékét azért kell kikötni, mert ha a rendszernek több stabilis egyensúlyi állapota, vagy stabilis periodikus állapota van, akkor a stabilis $\bar{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapottól „távoli" $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapot esetén az állapotvektor esetleg ezek valamelyikéhez tart. Ez indokolja a következő stabilitási definíciót.



2.5-7. ábra Másodrendű rendszer trajektóriájának viselkedése az $\overline{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapot környezetében, ha az egyensúlyi állapot (a) aszimptotikusan stabilis; (b) Ljapunov értelemben stabilis; (c) és (d) korlátos

(4) Egy $\overline{\mathbf{x}}_i$ egyensúlyi állapot *korlátos*, ha megadható egy olyan $\delta > 0$ és egy olyan (a δ értékétől függő) $\gamma > 0$, hogy az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti értékű állapotvektorra teljesül

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_i\| < \delta \;\Rightarrow\; \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_i\| < \gamma, \quad t > 0. \tag{2.5-31}$$

A Ljapunov értelmű stabilitás értelmezésénél egy választott ε értékhez kell egy alkalmas δ értéket találni, a korlátossághoz egy δ értékhez kell egy γ értéket találni.

A fentiek szerint az egyensúlyi állapotokat a következő típusokba is sorolhatjuk:

- aszimptotikusan stabilis (globálisan vagy csak lokálisan);
- Ljapunov értelemben stabilis (globálisan vagy csak lokálisan);
- korlátos (ekkor Ljapunov értelemben vagy stabilis vagy nem stabilis);
- Ljapunov értelemben nem stabilis, nem korlátos.

Ezeket szemlélteti a 7. ábra $N = 2$ állapotváltozó esetére.

Külön megfontolást érdemel, hogy mennyiben tekinthető stabilisnak egy Ljapunov értelemben stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis egyensúlyi állapot. Ez az eset egyébként ritkán fordul elő.

A rendszer stabilitása

A gerjesztett *rendszer* stabilitásáról nagyon keveset lehet általánosságban mondani.

A *gerjesztetlen rendszer* stabilitásával kapcsolatban a következő két definíció megadására szorítkozunk.

A gerjesztetlen rendszer *globálisan stabilis* (Lagrange értelemben stabilis), ha bármely kezdeti állapot esetén az *állapotvektor korlátos marad.*

A gerjesztetlen rendszer *abszolút stabilis,* ha globálisan stabilis és bármely kezdeti állapot esetén az állapotvektor *ugyanahhoz az egyensúlyi állapothoz tart.*

A *stabilis határciklussal* bíró rendszer (a trajektóriák egy zárt görbéhez tartanak) ezek szerint lehet globálisan stabilis, de nem abszolút stabilis.

A gerjesztetlen lineáris, invariáns rendszer egyetlen egyensúlyi állapota $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Ha a rendszer aszimptotikusan stabilis (minden trajektória az $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ponthoz tart), akkor e rendszer abszolút stabilis, így globálisan stabilis is. Ha a rendszer a stabilitás határhelyzetében van (minden trajektória korlátos), akkor a rendszer globálisan stabilis, de nem abszolút stabilis.

Stabilitásvizsgálat Ljapunov-függvénnel

Az autonóm nemlineáris rendszer egyensúlyi állapotának hatékony, habár némi intuíciót igénylő stabilitásvizsgálati módszere a következő.

Az $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ állapotegyenletű rendszernek egy, az $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ által meghatározott $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapota és annak környezetének stabilitása vizsgálható Ljapunov következő tétele („Ljapunov direkt módszere") alapján.

A folytonos idejű autonóm rendszer egy $\bar{\mathbf{x}}$ egyensúlyi állapota *aszimptotikusan stabilis,* ha található az $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ változó olyan, az $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ (azaz $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$) környezetében pozitív definit $V(\tilde{\mathbf{x}})$ függvénye, amelynek $V'(\tilde{\mathbf{x}})$ idő szerinti deriváltja az állapotegyenlet $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ megoldása mentén negatív definit; az egyensúlyi állapot (Ljapunov értelemben) *stabilis*, ha $V'(\tilde{\mathbf{x}})$ negatív szemidefinit. A V függvényt ekkor *Ljapunov–függvénynek* nevezik, az ilyen $V(\tilde{\mathbf{x}})$ függvény előállítását Ljapunov direkt módszerének.

Egy $V(\tilde{\mathbf{x}})$ skalár függvény akkor pozitív definit (illetve pozitív szemidefinit) az $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ pont körüli tartományban, ha ott $V(\tilde{\mathbf{x}})$ folytonosan differenciálható, vagyis minden $\partial V / \partial \tilde{x}_i$ létezik és folytonos; $V(\mathbf{0}) = 0$; $V(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$ (illetve $V(\tilde{\mathbf{x}}) \geq 0$) ha $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$. Egyszerű pozitív definit függvény például

$$V(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{N} C_i^2 \tilde{x}_i^2, \quad C_i \neq 0. \tag{2.5-32}$$

A $V(\tilde{\mathbf{x}})$ gyakran a rendszer által tárolt energiát jelenti. Ilyenkor Ljapunov tételének az a szemléletes tartalom adható, hogy $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ (azaz $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$) akkor aszimptotikusan stabilis (illetve stabilis) egyensúlyi állapot, ha környezetében az energia a folyamat során állandóan csökken (illetve nem növekszik).

A módszer alkalmazásának lényege az, hogy alkalmazásához, vagyis a $V'(\tilde{\mathbf{x}})$ idő szerinti derivált képzéséhez nem kell az $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ megoldást ismernünk. A differenciálás láncszabályának értelmében ugyanis

$$V'(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv \frac{\mathrm{d}V(\tilde{\mathbf{x}})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \tilde{x}_i} f_i(\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}). \tag{2.5-33}$$

Ez a megválasztott V és az adott $\mathbf{f}$ függvény ismeretében számítható.

Az állapottér azon része, amelyben a választott $V(\tilde{\mathbf{x}})$ valóban Ljapunov-függvény (vagyis pozitív definit, deriváltja negatív definit vagy legalább negatív szemidefinit), a vizsgált egyensúlyi állapot *stabilitási tartománya.*

Éppen a stabilitási tartomány értelmezhetősége az a többlet, amit Ljapunov direkt módszere az egyensúlyi állapotbeli linearizáláshoz képest nyújt. Utóbbi eljárással ugyancsak eldönthető az egyensúlyi pont stabilitása, de semmi információnk nincs arról a tartományról, amelyből induló trajektóriák éppen a vizsgált, aszimptotikusan stabilis egyensúlyi állapothoz tartanak.

Az egyes Ljapunov-függvények rendszerint különböző stabilitási tartományokat jelölhetnek ki. Ezek uniója is stabilitási tartomány. Szerencsés esetben kiderülhet, hogy csak egyetlen egyensúlyi állapot van és a stabilitási tartomány az egész állapottér. Ekkor a rendszer abszolút stabilis (de legalább globálisan stabilis).

Ha egy V függvény az egyensúlyi állapot környezetében pozitív definit, de deriváltja nem negatív definit (illetve negatív szemidefinit), abból még nem következik, hogy a vizsgált egyensúlyi pont nem aszimptotikusan stabilis (illetve nem Ljapunov értelemben stabilis), hiszen lehet, hogy csak ügyetlenül választottuk a V függvényt. Ha linearizálással eldönthető, hogy a vizsgált egyensúlyi állapot aszimptotikusan stabilis, akkor biztosan létezik Ljapunov-függvény. Nem ismert azonban olyan általános módszer, amellyel egy Ljapunov-függvény ténylegesen előállítható. Mint már említettük, a (32) alakkal érdemes próbálkozni, de az alkalmas együtthatók megválasztása ekkor sem egyszerű feladat. Léteznek más eljárások is, amelyek segítenek Ljapunov-függvényt választani, de ezeket nem tárgyaljuk.

Ljapunov módszerének alkalmazásához ismernünk kell az **f** függvény matematikai alakját. Mint már többször említettük, nem egyszerű jól kezelhető és mégis kellően pontos függvényt előállítani.

Ljapunov direkt módszere akkor is alkalmazható, ha az **f** függvény az egyensúlyi pontban nem differenciálható, tehát az egyensúlyi pont körüli linearizálás módszere nem értelmezett. A módszer ennyiben is általánosabb a egyensúlyi állapotbeli linearizálás módszerénél, de ennek inkább csak elvi jelentősége van.

1. példa Tekintsük azt a folytonos idejű, lineáris, invariáns autonóm rendszert, amelynek állapotegyenlete

$$x_1' = a\,x_1 + b\,x_2\,,$$
$$x_2' = c\,x_1 + d\,x_2\,.$$

Ennek egyetlen egyensúlyi állapota ismeretesen $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$. Mint tudjuk, ezen állapot aszimptotikus stabilitásának feltételei $a + d < 0$, $a\,d - b\,c > 0$.

Keressük a Ljapunov-függvényt a következő alakban (esetünkben $\tilde{x}_i = x_i$):

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + K^2 x_2^2\right),$$

ahol K^2 egyelőre tetszőleges. E pozitív definit függvény idő szerinti deriváltja

$$V'(x_1, x_2) = x_1 x_1' + K^2 x_2 x_2' = x_1(a\,x_1 + b x_2) + K^2 x_2\,(c x_1 + d x_2) =$$
$$= a\,x_1^2 + \left(b + K^2 c\right) x_1 x_2 + K^2 d\,x_2^2\,.$$

Ez akkor negatív definit, ha

$$a < 0\,,\quad d < 0\,,\quad \left(b + K^2 c\right)^2 - 4\,K^2 a\,d < 0\,.$$

Az utolsó feltétel más alakja $a\,d > \left(b+K^2 c\right)^2 / 4\,K^2$. A jobb oldal akkor minimális, ha $K^2 = |b/c|$. Ebből következik, hogy az egyensúlyi állapot (és a lineáris rendszer) biztosan aszimptotikusan stabilis, ha

$$a<0,\ d<0,\ ad > \frac{1}{4}\left(\sqrt{\left|\frac{c}{b}\right|}\,b + \sqrt{\left|\frac{b}{c}\right|}\,c\right) = \begin{cases} b\,c, & b\,c>0; \\ 0, & b\,c<0. \end{cases}$$

Az $a<0, d<0$ feltétel-pár szigorúbb a valóságos $a+d<0$ **feltételnél,** a harmadik feltétel pedig egyenértékű az $ad > bc$ feltétellel. #

2. példa Legyen az előző példában $a = -2$, $b = -4$, $c = 1$, $d = 1$. Ekkor az egyensúlyi állapot aszimptotikusan stabilis, de az előző példában választott Ljapunov- függvényből ez nem következik!

Keressünk egy másik Ljapunov-függvényt a következő alakban:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2\,x_2^2 + H\,x_1\,x_2\,.$$

A függvény pozitív definit, ha $|H|<2$. A függvény idő szerinti deriváltja

$$V'(x_1, x_2) = x_1(-2x_1 - 4x_2) + 4\,x_2(x_1 + x_2) + H\,(-2\,x_1 - 4x_2)\,x_2 + H\,x_1(x_1 + x_2) =$$
$$= -(2-H)\,x_1^2 + 4\,(1-H)\,x_2^2 - H\,x_1\,x_2\,.$$

Ez negatív definit, ha $H<2$, $H>1$ és $H^2 < 16\,(2-H)(H-1)$ egyszerre teljesül. Bármely $1<H<2$ érték választható. Ennek alapján az derül ki, hogy ekkor a választott V a teljes x_1, x_2 állapotsíkon Ljapunov-függvény, vagyis a vizsgált rendszer abszolút stabilis (ezért globálisan stabilis is).

Mivel a rendszer lineáris, ezért aszimptotikusan stabilisnak is nevezhetjük, amint azt persze eleve tudtuk is. #

3. példa Tekintsük azt a folytonos idejű, invariáns, elsőrendű rendszert, amelynek állapotegyenlete

$$x' = -\Phi(x) + u\,; \quad \Phi(x) = 300\,x - 45\,x^2 + 2\,x^3\,; \quad u = 550\,,\ t>0\,.$$

Mint a 2.5-1.6. pont példájából tudjuk, a rendszernek ekkor három egyensúlyi pontja van: $\bar{x}_1 = 3{,}012$ (stabilis), $\bar{x}_2 = 7{,}835$ (nem stabilis), $\bar{x}_3 = 11{,}653$ (stabilis).

Az egyensúlyi állapot környezetének vizsgálatához válasszuk a $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^2/2$ pozitív definit függvényt. A deriváltat képezve

$$V'(\tilde{x}) = \tilde{x}\,\tilde{x}' = \tilde{x}\,\{550 - 300\,(\bar{x} + \tilde{x}) + 45\,(\bar{x} + \tilde{x})^2 - 2\,(\bar{x} + \tilde{x})^3\}.$$

A $\Phi(\bar{x}) = 550$ figyelembe vételével ebből

$$V'(\tilde{x}) = -2\tilde{x}^2\,\{(3\,\bar{x}^2 - 45\,\bar{x} + 150) + (3\,\bar{x} - 22{,}5)\,\tilde{x} + \tilde{x}^2\}.$$

Ez $\bar{x}_1$ és $\bar{x}_3$ környezetében negatív, $\bar{x}_2$ környezetében pozitív. Könnyen belátható, hogy V' az $\bar{x}_1$ környezetében $x < 7{,}835$ esetén negatív, az $\bar{x}_3$ környezetében $x > 7{,}835$ esetén negatív, vagyis ilyen kezdeti állapot esetén lesz $\bar{x}_1$, illetve az állandó gerjesztés hatására előálló $\bar{x}_3$ az egyensúlyi pont. Ez elemi úton is belátható.

Ebben az egyszerű példában az egyetlen pozitív definit V függvény egyúttal Ljapunov-függvény, sőt pontosan megadja a stabilitási tartományokat is. #

2.5-2.F. Feladatok

F-1. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete

$$x_1' = 50\,x_1 - \Phi(x_1) + 6\,x_2\,,\ x_2' = -10\,x_1 - 8\,x_2 + 10\,u\,,\quad \Phi(\xi) = 300\,\xi - 45\,\xi^2 + 2\,\xi^3.$$

Határozza meg az $\bar{u} = 50$ időben állandó gerjesztéshez tartozó egyensúlyi állapot(ok) körüli tartományban a linearizált állapotegyenletet! Döntse el az egyensúlyi pont(ok) stabilitását!

F-2. Oldja meg az előző feladatot, ha az állapotegyenletben $50x_1$ helyére $-10x_1$ kerül és az állandósult gerjesztés $\bar{u} = 100$.

$$x_1' = -10\,x_1 - \Phi(x_1) + 6\,x_2\,,\ x_2' = -10\,x_1 - 8\,x_2 + 10\,u\,,\quad \Phi(\xi) = 300\,\xi - 45\,\xi^2 + 2\,\xi^3\,.$$

F-3. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete, illetve gerjesztése

$$x' = -\Phi(x) + u\,;\quad u(t) = 700\,[1 - \varepsilon(t)] + 550\,\varepsilon(t),$$

ahol Φ az előző feladatok szerinti függvény.

Határozza meg az állapotváltozó időfüggvényét t pozitív értékeire! Használja fel a 2.5-2.3. pont 1. példájában megadott tartományonkénti lineáris közelítést!

F-4. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete

$$x_1' = a\,x_1 - \Phi(x_1) + b\,x_2\,,\ x_2' = -x_1 - x_2 + u\,,\quad \Phi(\xi) = 300\,\xi - 45\,\xi^2 + 2\,\xi^3.$$

A továbbiakban használja a Φ függvénynek a 2.5-2.3. pont 1. példájában megadott tartományonkénti lineáris közelítését!

(*a*) Válassza meg az *a*, *b* és $\bar{u}$ értékét úgy, hogy $\bar{x}_1 = 4$ és $\bar{x}_1 = 12$ egyaránt egyensúlyi értékek legyenek!

(*b*) Előírható-e ekkor az $\bar{x}_2$ egyensúlyi érték is?

(*c*) Mi a feltétele annak, hogy mindkét előírt egyensúlyi állapot stabilis legyen?

(*d*) Előírható-e, hogy az egyik egyensúlyi állapot stabilis, a másik labilis legyen?

F-5. Az előző feladatban legyen mindkét egyensúlyi állapot stabilis. A gerjesztés a $t = 0$ időponttól kezdve állandó.

Igaz-e, hogy ha a kezdeti állapot a tartományonként linearizált karakterisztika azon tartományába esik, ahová egy stabilis egyensúlyi állapot, akkor az lesz a tényleges egyensúlyi állapot?

F-6. Tekintse a 4. feladatban tárgyalt rendszert, amelynek minkét előírt egyensúlyi állapota stabilis. A gerjesztés a $t = 0$ időponttól kezdve állandó $\bar{u}$ érték.

Határozza meg a b paraméter azon értéktartományát, amely esetén $x_1(t)$ úgy tart $\bar{x}_1 = 4$ állandósult értékéhez, hogy nem lép ki az első linearizálási tartományból!

F-7. Egy folytonos idejű rendszer állapotegyenlete (az állapotváltozó arányos a válasszal) és gerjesztése $y' = -(y-1)(y-2) + u\,;\ u(t) = 6\,\varepsilon(t)$.

Határozza meg $y(t)$ értékét a t = 0; 0,02; 0,04; 0,1; 0,2 és 1 időpontokban a következő módszerekkel.

(*a*) A differenciálegyenlet megoldásával, ami esetünkben a változók szétválasztásával lehetséges.

(*b*) Az előrelépő Euler-módszerrel h = 0,01 állandó lépésköz választásával.

(*c*) Az Euler–Cauchy-módszerrel, amelynek sémája a (26) jelöléseivel

$$m_{r1} = f(x_r, t_r), \quad m_{r2} = f\left(x_r + \frac{h_r}{2} m_{r1}, t_r + \frac{h_r}{2}\right); \quad m_r = m_{r2};$$

$h = 0{,}02$ állandó lépésköz választásával.

Milyen következtetéseket tud levonni a közelítő és pontos eredmények összehasonlításával?

***F-8.** Egy $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ állapotegyenletű, folytonos idejű rendszernek adott állandó (vagy állandó értékhez tartó) gerjesztés esetén két stabilis egyensúlyi állapota van. Az $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapottól függ, hogy melyik egyensúlyi állapot áll be.

A *szeparatrix* azon N-dimenziós felület az állapottérben, amely szétválasztja egymástól a kétféle egyensúlyi állapotot eredményező $\mathbf{x}(0)$ kezdeti állapotok halmazát.

(*a*) Adjon eljárást a szeparatrix meghatározására!

(*b*) Milyen kapcsolat van a szeparatrix és a rendszer labilis egyensúlyi pontjai között?

(*c*) Igaz-e, hogy egy labilis határciklus egyúttal szeparatrix is?

***F-9.** Egy folytonos idejű, másodrendű rendszer állapotegyenlete

$$x_1' = x_1 H(x_1, x_2) - \Omega x_2, \quad x_2' = x_2 H(x_1, x_2) + \Omega x_1; \quad H(x_1, x_2) = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2 - 1)}.$$

(*a*) Határozza meg az autonóm (és gerjesztetlen) rendszer egyensúlyi állapotait, vizsgáljuk meg a stabilitásukat!

(*b*) Igazolja, hogy $V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/2$

a rendszer egy Ljapunov-függvénye; a trajektóriák az $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ egyensúlyi állapothoz tartanak, ha a kezdeti állapotra $x_1^2(0) + x_2^2(0) < 1$ teljesül! (Lásd a következő feladatot is!)

***F-10.** Tekintse az inverz alakjában megadott következő $r(t)$ függvényt:

$$r^2 - a^2 - \ln r^2 = t; \quad t \in \mathbf{R}_+,$$

ahol $a^2 = r^2(0) - \ln r^2(0)$ a kezdeti értékek által meghatározott.

(*a*) Vázolja fel az $r(t)$ függvény görbéjét!

(*b*) Egy folytonos idejű rendszer állapotváltozói a fenti $r(t)$ függvénnyel

$$x_1(t) = r(t)\cos \Omega t, \quad x_2(t) = r(t)\sin \Omega t$$

alakban fejezhetők ki. Mit mondhatunk ekkor a trajektóriák viselkedéséről?

(*c*) Lássa be, hogy az előző feladatban megadott állapotegyenlet megoldása éppen a (*b*) szerinti!

Mi következik ebből a 9*(b)* feladat megoldására?

2.5-2.M. Megoldások

M-1. Az egyensúlyi állapotokat $(x_1' = 0, x_2' = 0)$ a $2x_1^3 - 45x_1^2 + 257{,}5x_1 - 375 = 0$ egyenlet $\bar{x}_1$ gyökei adják és $\bar{x}_2 = -1{,}25\,\bar{x}_1 + 62{,}5$. A linearizált állapotegyenlet

$$\tilde{x}_1' = a\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2, \quad \tilde{x}_2' = -10\tilde{x}_1 - 8\tilde{x}_2; \quad a = -250 + 90\bar{x}_1 - 6\bar{x}_1^2.$$

Az egyensúlyi állapot akkor stabilis, ha a karakterisztikus egyenlet együtthatói pozitívak, ami $a < 7{,}5$ esetén teljesül. Három egyensúlyi állapot van:

(a) $\bar{x}_1 = 2{,}258$, $\bar{x}_2 = 59{,}678$, $a = -77{,}390$; stabilis;
(b) $\bar{x}_1 = 5{,}718$, $\bar{x}_2 = 55{,}353$, $a = +68{,}444$; labilis;
(c) $\bar{x}_1 = 14{,}524$, $\bar{x}_2 = 44{,}344$, $a = -208{,}554$; stabilis.

A közelítés használhatóságára vonatkozó megfontolásokat illetően l. a 2.5-2.2. pont példáját. A labilis egyensúlyi pont körüli linearizált közelítésnek csekély a gyakorlati haszna.

M-2. A megoldandó egyenlet $2x_1^3 - 45x_1^2 + 317{,}5x_1 - 750 = 0$. Ennek egyetlen valós gyöke van. Az egyetlen egyensúlyi állapot $\bar{x}_1 = 11{,}606$, ; $\bar{x}_2 = 110{,}494$, ekkor $a = -73{,}61$, ezért az egyensúlyi állapot labilis. Ez a közelítés gyakorlatilag alig használható. (L. a 2.5-2.3. pont példáját!)

M-3. Az $\bar{u} = 700$ gerjesztéshez tartozó állandósult állapot $x(0) = 11{,}6$ (vö. 2.5-2.3. pont 3. példa). A trajektória Ω_3-ban indul, állandósult értéke $\bar{u} = 550$ esetén $x(\infty) = 10{,}4$, amely ugyancsak Ω_3-ban van. Ebből következően

$$x(t) = 10{,}4 + 1{,}2\,\mathrm{e}^{-125t}; \quad 0 < t < t_1 .$$

Mivel $x(t)$ nem lép ki Ω_3-ból, ezért $t_1 = \infty$, vagyis a megoldás (a választott lineáris közelítésben) a t idő minden pozitív értékére érvényes.

M-4. Egyensúlyi állapotban $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + \bar{u}$.

(a) A kijelölt egyensúlyi érték akkor áll be, ha

$$(a - 125 - b)4 + b\,\bar{u} = 0, \text{ és } (a - 125 - b)12 + 750 + b\,\bar{u} = 0 .$$

Ebből például $a = 31{,}25 + b$, $\bar{u} = 375/b$, ahol b tetszőleges (nem nulla), vagyis a feladatnak végtelen sok megoldása van.

(b) Igen; az $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1 + 375/b$ egyenletből b kifejezhető.

(c) A karakterisztikus egyenlet az egyensúlyi pontoknak megfelelő mindkét tartományban $\lambda^2 + (94{,}75 - b)\lambda + 93{,}75 = 0$. Mindkét egyensúlyi állapot akkor stabilis, ha $b < 94{,}75$.

(d) Mivel a választott közelítésben $\Phi(x)$ meredeksége a két tartományban megegyezik, ezért a két egyensúlyi állapot stabilitási tulajdonságai megegyeznek. A vizsgált példában ez nem függ a közelítés módjától. Egyik állítás sem általános érvényű.

M-5. Ez általában nem igaz. Ha azonban a kezdeti állapot „elég közel" van az egyensúlyi állapothoz és minden sajátérték valós része „elég nagy" negatív érték, akkor a trajektória benne fog maradni abban a tartományban, amelyben a kezdeti állapot és a stabilis egyensúlyi állapot is van. Általában azonban a trajektória ki fog lépni a kezdeti tartományból, noha lehet, hogy a trajektória végül a szóban forgó egyensúlyi ponthoz tart. A trajektória lehetséges menete nem csak a vizsgált rendszertől, hanem a tartományok megválasztásának módjától is függhet, ami ugyancsak arra utal, hogy a kérdésre általában nem lehet igenlő választ adni.

M-6. A paraméterekre vonatkozó előírásokat és a karakterisztikus egyenletet lásd a 4. feladat megoldásánál. Mindkét sajátérték valós, ha $b < 94{,}75 - \sqrt{375} \approx 75{,}385$. Ekkor az előírás teljesül. Numerikusan ellenőrizhető, hogy ez a feltétel nem csak elegendő, hanem szükséges is.

M-7. (*a*) A kezdeti érték $y(0) = 0$. Az $u = 6$ behelyettesítésével

$$\int_0^y \frac{d\eta}{(\eta-4)(\eta+1)} = -t \Rightarrow y(t) = 4\,\varepsilon(t)\frac{1-e^{-5t}}{1+4\,e^{-5t}}.$$

A (*b*) és (*c*) feladatok számítógéppel könnyen megoldhatók. Az eredményeket a következő összeállítás tartalmazza:

	$t=$	0	0,02	0,04	0.1	0,2	0,4	1,0
(*a*)	$y=$	0	0,0824	0,1696	0,4594	1,0230	2,2439	3,8688
(*b*)	$y=$	0	0,0812	0,1671	0,4528	1,0107	2,2336	3,8747
(*c*)	$y=$	0	0,0824	0,1695	0,4592	1,0229	2,2440	3,8684

Amint látjuk, mindkét közelítés hibája igen kicsi. A bonyolultabb Euler-Cauchy-módszer a kétszer akkora lépésköz ellenére is pontosabb az egyszerű Euler-módszernél. A feladat illusztrálja, hogy bonyolultabb algoritmusok alkalmazása hatékonyabb szokott lenni a lépésköz csökkentésénél.

***M-8.** (*a*) Ha visszafelé követjük a stabilis egyensúlyi pontba befutó trajektóriát, akkor vagy az állapottér (valamelyik) végtelen távoli pontjába vagy a szeparatrixhoz tartó görbét kapunk. Ha tehát valamilyen (rendszerint közelítő) módszerrel megoldjuk a $t \to -\tau$ helyettesítéssel előálló $\mathbf{x}' = -\mathbf{f}(\mathbf{x}, -\tau)$ differenciálegyenletet különböző kezdeti értékek mellett, akkor van rá esélyünk, hogy olyan görbéket kapjunk, amelyek a szeparatrixban vannak ($N = 2$ esetén: a szeparatrix görbe egy szegmensét adják). Az eljárás csak $N = 1$ esetén reményteljes, amikor a szeparatrix egy pont és $N = 2$ esetén, amikor a szeparatrix egy görbe az állapotsíkon.

(*b*) A labilis egyensúlyi pont a szeparatrix egy pontja. Ez az (*a*) szerint értelmezett egyes inverz trajektóriák végpontja.

(*c*) A labilis határciklus a szeparatrix egy görbéje. Ha $N = 2$, akkor a labilis határciklus szeparatrix. Ha $N = 3$, akkor a határciklus egy görbe a szeparatrixot jelentő zárt felületen, és ugyanez a helyzet nagyobb rendszám esetén is, de ez már nem szemléltethető egyszerűen.

***M-9.** (*a*) Könnyen belátható, hogy $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ egy egyensúlyi állapot. Több egyensúlyi állapot nincs is. Linearizálással adódik, hogy ez az egyensúlyi állapot stabilis.

(*b*) A függvény deriváltja $r' = [x_1^2 + x_2^2]H(x_1, x_2)$. Ez negatív, ha H nevezője negatív, ami az $x_1^2 + x_2^2 < 1$ tartományban biztosan teljesül. Más Ljapunov-függvénnyel ennél nagyobb stabilitási tartomány adódhat.

***M-10.** Az $r(t)$ függvény nem fejezhető ki explicit alakban.

(*a*) Ha $r(t_0) > 1$, akkor $r(t)$ monoton növekszik. Ha $0 < r(t_0) < 1$ akkor $r(t)$ monoton csökkenve nullához tart.

(*b*) Ha $x_1(t_0), x_2(t_0)$ az egységsugarú körön kívül van, akkor a trajektóriák kifelé spirálozódnak, ellenkező esetben pedig az origó felé. Az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ egyenletű kör ezek szerint nem stabilis határciklus, nevezik labilis határciklusnak is.

(*c*) A megadott függvény deriváltját képezve $r'/r = H$ adódik. Ebből egyszerű számítással már következik az állítás. A választott Ljapunov-függvény ezek szerint pontosan megadja a stabilitási tartományt, nem kell ennél „jobb" Ljapunov-függvényt keresni.