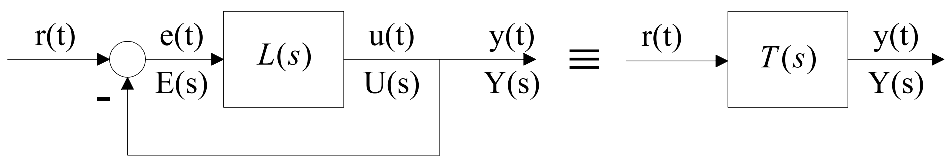
6. Stabilitásvizsgálat

Egy rendszer stabilis, ha kitérítés után a magára hagyott rendszer visszatér nyugalmi állapotába, tranziensei lecsengenek. A stabilitás egy másik megfogalmazása szerint egy rendszer stabilis, ha korlátos bemenet esetén a kimenet is korlátos.

Tekintsük az alábbi hatásvázlattal megadott szabályozási kört. A felnyitott rendszer átviteli függvénye *L(s)* . A rendszerben merev (egységnyi) negatív visszacsatolást alkalmazunk:



A zárt rendszer eredő átviteli függvényét a következőképpen számolhatjuk:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

1. Stabilitásvizsgálat a zárt rendszer pólusai alapján:

A rendszer stabilitása meghatározható a zárt rendszer pólusai alapján. A rendszer stabilis, ha pólusai a komplex bal félsíkra esnek, azaz összes pólusának a valós része negatív.

1. Példa

Egy zárt rendszer eredő átviteli függvénye:

$$T(s) = \frac{s+5}{s^5 - 3s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 5s - 10}\,.$$

Állapítsuk meg, hogy a rendszer stabilis-e.
Megoldás: Vizsgáljuk meg a pólusok elhelyezkedését.

```
» num=[1, 5]
» den=[1, -3, 4, 10, 5, -10]
» T=tf(num,den)
» poles=roots(den)
 poles =
   2.1150 + 2.1652i
   2.1150 - 2.1652i
  -0.9824 + 0.7214i
  -0.9824 - 0.7214i
   0.7348
```

vagy másképpen

```
» [z,p,k]=zpkdata(T,'v')
```

A rendszer labilis, mivel vannak pozitív valós részű pólusai.
A *pzmap* utasítás grafikusan jeleníti meg a pólusok elhelyezkedését:

```
» pzmap(T)
```

Látható, hogy a rendszer labilis, mivel vannak pólusai a komplex számsík jobb oldali részén.

2. A Nyquist stabilitási kritérium alkalmazása:

A zárt rendszer stabilitása meghatározható a felnyitott rendszer frekvenciafüggvénye alapján is.
a. Az egyszerűsített Nyquist kritérium akkor használható, ha a felnyitott rendszernek nincs labilis (pozitív valós részű) pólusa. A zárt rendszer stabilis, ha a felnyitott rendszer Nyquist diagramja nem veszi körül a *(–1+0j)* pontot.
b. Az általánosított Nyquist kritériumot kell használni akkor, ha a felnyitott rendszernek van labilis pólusa. A zárt rendszer stabilis, ha a felnyitott rendszer Nyquist diagramja annyiszor veszi körül a *(–1+0j)* pontot az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányban, ahány labilis pólusa van a felnyitott rendszernek.

2. Példa

A felnyitott kör átviteli függvénye

$$L(s)=\frac{10}{(1+10s)(1+s)}.$$

Negatív merev visszacsatolást alkalmazunk. A Nyquist kritérium alapján határozzuk meg, hogy a zárt rendszer stabilis-e.

```
» s=tf('s')
» L=10/((1+10*s)*(1+s))
» [z,p,k]=zpkdata(L,'v')
```

Van-e labilis (pozitív valós részű) pólusa a nyílt rendszernek? *(Nincs, tehát az egyszerűsített Nyquist kritérium használható.)*

```
» nyquist(L),grid
```

Körülveszi-e a Nyquist diagram a (*–1+0j*) pontot? (*Nem, tehát a rendszer stabilis.)*
Stabilis marad-e a rendszer, ha a 10-es erősítést a számlálóban megnöveljük?
Ellenőrizzük a stabilitást a zárt rendszer pólusainak vizsgálatával. A *feedback* utasításban az *1* a merev (egységnyi), a *-1* pedig a negatív visszacsatolást jelenti. (A *-1* elhagyható, mert az alapértelmezés a negatív visszacsatolás)

```
» T=feedback(L,1,-1)
```

vagy

```
» T=L/(1+L); T=minreal(T)
```

A *minreal* utasítás elvégzi a lehetséges egyszerűsítéseket, kiejti a közös zérusokat és pólusokat.

```
» [z,p,k]=zpkdata(T,'v')
```

Ábrázoljuk a zárt rendszer pólusait:

```
» pzmap(T)
```

Láthatjuk, hogy a rendszer struktúrálisan stabilis. A Nyquist diagram nem veszi körül a *(–1+0j)* pontot még megnövelt erősítés esetén sem.

3. Példa

A felnyitott rendszer átviteli függvénye

$$L(s)=\frac{-5}{(1-10s)(1+0.1s)}.$$

Negatív merev visszacsatolást alkalmazunk. A Nyquist kritérium alapján határozzuk meg, hogy a zárt rendszer stabilis-e?

```
» L=-5/((1-10*s)*(1+0.1*s))
» [z,p,k]=zpkdata(L,'v')
```

Van-e labilis pólusa a felnyitott rendszernek? *(Igen,* $p_2=0.1$*)*

```
» nyquist(L)
```

Milyen irányban kerüli meg a görbe a (*–1+0j*) pontot? (*Az óramutató járásával ellentétes irányban*)
Stabilis-e a zárt rendszer? *(Igen)*
Ellenőrizzük az eredményt a zárt rendszer pólusainak kiszámításával.

```
» T=feedback(L,1)
» step(T)
» [z,p,k]=zpkdata(T,'v')
» pzmap(T)
```

Vizsgáljuk meg a rendszer stabilitását, ha a pólusok előjelét megváltoztatjuk.

$$L(s)=\frac{-5}{(1+10s)(1-0.1s)}$$

Milyen irányban kerüli meg a Nyquist diagram a *-1* pontot? Stabilis-e a zárt rendszer?

4. Példa

Egy felnyitott rendszer átviteli függvénye

$$L(s)=k\frac{1-s}{(1+s)(1+0.5s)}.$$

Negatív merev visszacsatolást alkalmazunk. Határozzuk meg a *k* paraméter azon értékeit, amelyekre a zárt rendszer stabilis lesz.

a. *k=1* értéket feltételezünk:

```
» L=(1-s)/((1+s)*(1+0.5*s))
» [z,p,k]=zpkdata(L,'v')
```

Van-e labilis pólusa a felnyitott rendszernek? (*Nincs, tehát az egyszerűsített Nyquist kritérium használható*)

```
» nyquist(L),grid
```

Határozzuk meg azt a pontot, ahol a görbe metszi a valós tengelyt (-0.666). A *zoom* utasítás vagy a zoom menűpont és az egér segítségével a Nyquist diagramról leolvashatjuk ezt az értéket.

Ha egy rendszer erősítését *k*-val megszorozzuk, akkor a Nyquist diagramját *k*-szorosára nagyítjuk. A rendszer akkor van a stabilitás határhelyzetében, ha a metszéspont a *-1* értékre esik. Tehát a rendszer erősítését még megnövelhetjük k=1/0.666=1.5 értékkel. A rendszer stabilis, ha teljesül, hogy 0< k<1.5 (pozitív k-ra)

b. *k=-1* értéket feltételezünk:

```
» nyquist(-L), grid
```

Határozzuk meg ismét azt a pontot, ahol a görbe metszi a valós tengelyt (-1). Tehát a rendszer stabilis, ha k>-1>0.

Tegyük össze a két feltételt. A zárt rendszer stabilis, ha –1<k<1.5

A stabilitás meghatározható az *rlocus* utasítással is, amely megadja a rendszer gyökhely-görbéjét, vagyis a zárt rendszer pólusainak változását a *k* paraméter függvényében.

```
» help rlocus
» rlocus(L)
» rlocfind(L)
```

Az *rlocfind* utasítással és az egér segítségével a gyökhelygörbe egy pontjához meghatározhatjuk az erősítést.

Fázistartalék (fázistöbblet), erősítési tartalék:

Egy rendszer stabilitásvizsgálatánál nemcsak az a fontos, hogy a rendszer stabilis-e, hanem az is, hogy milyen messze van a stabilitás határhelyzetétől. A fázistartalék és az erősítési tartalék fejezik ki ezeket a jellemzőket. A fázistartalék azt adja meg, hogy a vágási körfrekvenciánál a rendszer fázisszögét még mennyivel lehet megnövelni, hogy a rendszer a stabilitás határhelyzetébe (-180°) kerüljön. A fázistartalékot meghatározhatjuk az ω_c vágási körfrekvencián felvett fázisszög értékéből.

$$\varphi_m=\varphi(\omega_c)+180°$$

ω_c az a frekvencia, ahol a felnyitott rendszer frekvenciafüggvényének abszolút értéke 1.

$$\omega_c: \quad \left|L(j\omega)\right|_{\omega=\omega_c} = 1$$

Ha a fázistartalék pozitív, a rendszer stabilis. Például, ha a rendszer fázisszöge a vágási körfrekvencián $\varphi = -120°$, akkor a fázistartalék $\varphi_m = \varphi + 180° = -120° + 180° = 60°$, azaz a rendszer stabilis.

Az erősítési tartalékkal a rendszer erősítését megszorozva a rendszer a stabilitás határhelyzetébe kerül.

$$gm = \frac{1}{\left|L(\omega_\pi)\right|},$$

ahol

$$\omega_\pi: \quad \varphi(\omega)_{\omega=\omega_\pi} = -180$$

ω_π az a frekvencia, ahol a fázisszög -180˚. Ha az erősítési tartalék nagyobb mint egy, akkor a rendszer stabilis. A fázistartalék szemléltethető a Nyquist és a Bode diagramon is. A *margin* utasítás segítségével egyszerűen kiértékelhetők és ábrázolhatók.

5. Példa

Egy felnyitott rendszer átviteli függvénye

$$L(s) = \frac{1}{(0.5+s)(s^2+2s+1)}.$$

Negatív merev visszacsatolást alkalmazunk. Határozzuk meg a fázistartalékot, az erősítési tartalékot és a felnyitott rendszer vágási körfrekvenciáját.

```
» L=1/((0.5+s)*(s^2+2*s+1))
» [gm,pm,wg,wc]=margin(L)
```

A *gm* (gain margin) az erősítési tartalék, *pm* (phase margin) a fázistartalék , *wc* (cut-off frequency) a vágási körfrekvencia és *wg* az a körfrekvencia, ahol a fázisszög értéke -180º.

Grafikusan is meg lehet jeleníteni ezen értékek elhelyezkedését:

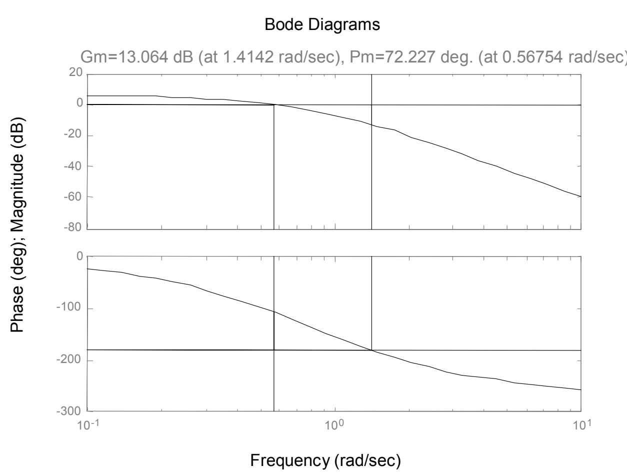
```
» margin(L);
```

A grafikus megjelenítés esetén a *Gm* érték decibelben adott, Gm=20*log10(gm)

Az erősítés, fázis és frekvencia értékek táblázatban is megjeleníthetők.

```
» w=logspace(-1,1,100);
» [num,den]=tfdata(L,'v')
» [mag,phase]=bode(num,den,w);
» Tabl=[mag, phase, w']
```

mag	*phase*	*w*
1.1123	-99.5242	0.5094
1.0643	-103.0406	0.5337
1.0158	***-106.6104***	***0.5591≈wc***
0.9669	-110.2286	0.5857
	…….	
0.2449	-176.7848	1.3530
0.2211	***-180.1658***	***1.4175≈wg***
0.1991	-183.4774	1.4850
0.1789	-186.7160	1.5557
	…….	



A fázistartalék kiolvasható a táblázatból. Az 1.0 erősítés értékhez tartozó fázisszög értékéből lehet kiszámolni. *pm=180-106.6=73.4*. A vágási körfrekvencia *w=wc=0.5591*. Az erősítési tartalék a -180°-hoz tartozó erősítés reciproka lesz, *gm=1/0.221=4.52*. Az így számolt értékek pontosságát a táblázat felbontása korlátozza.