1. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést : (12 pont)

$$\left(\frac{2}{x^2-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\frac{2x^2+2x}{x^3-1} = \left(\frac{2}{x\cdot(x-1)}+\frac{2x}{(x-1)\cdot(x+1)}\right)\cdot\frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{2\cdot(x+1)+2x^2}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = \frac{2\cdot(x^2+x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}\cdot\frac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)} = \boxed{\frac{4}{(x-1)^2}} .$$

2. Egy téglalap oldalai $a = 10$ cm, $b = 20$ cm .
Az a oldal hosszát 10 %-kal növeljük, a b oldal hosszát 20 %-kal csökkentjük.
Hány százalékkal változik a téglalap területe ? (12 pont)

Az eredeti téglalap területe $T_1 = a\cdot b$, a módosítotté $T_2 = (1.1\cdot a)\cdot(0.8\cdot b) = 0.88\cdot a\cdot b = 0.88\cdot T_1 \Rightarrow$

T_2 a T_1-nek 88 százaléka, tehát $\boxed{\text{12 % -kal csökken a téglalap területe}}$.

3. Adjuk meg az $f(x) := \ln\left(x-\frac{1}{x}\right)$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit : (13 pont)

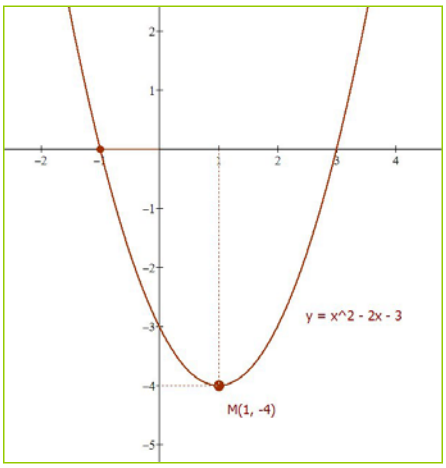
I. Értelmezési tartomány : $x-\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} > 0 \Leftrightarrow$

a.) $x>0$ és $x^2-1>0 \Leftrightarrow \boxed{x>1}$, **b.)** $x<0$ és $x^2-1<0 \Leftrightarrow \boxed{-1<x<0}$,

tehát $D_f = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

II. Zérushelyek : $f(x)=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

4. Az $y = x^2+b\cdot x+c$ parabola csúcspontja $M(1,-4)$. (13 pont)
A parabola és az x tengely egyik metszéspontja : -1 .
Adjuk meg b és c értékét ! Adjuk meg a parabola és az x tengely másik metszéspontját is !



A csúcspont koordinátái kielégítik az egyenletet : $-4 = 1^2+b\cdot 1+c$,
A $(-1, 0)$ pont a parabolára illeszkedik : $0 = (-1)^2+b\cdot(-1)+c$

$\Rightarrow -5 = b+c\ ,\ -1 = -b+c \Rightarrow$ (a két egyenletet összeadjuk) $\Rightarrow$

$\boxed{c=-3\ ,\quad b=-2} \Rightarrow \boxed{y = x^2-2x-3}$ a parabola egyenlete .

Az x tengellyel való másik metszéspont a $0 = x^2-2x-3$ egyenletből,
felhasználva, hogy az egyik gyök $x_1 = -1$, s a gyökök szorzata -3 ,
(vagy a tengelyre vonatkozó szimmetriából): $x_2 = 3$, a metszéspont tehát $(3, 0)$.

1. Oldjuk meg a következő egyenletet : (8 pont)

$$4^x - 10\cdot 2^x = -2^4 \quad \Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 10\cdot 2^x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 16}}{2} = 5 \pm 3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2^x = 2 \quad \text{vagy} \quad 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1 \quad \text{vagy} \quad x = 3}\ .$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$$\sqrt{1-\cos^2 x} - \sin 2x = 0 \qquad (\, x \in [0, 2\pi]\ ) \qquad \Leftrightarrow \qquad |\sin x| = 2\cdot \sin x \cdot \cos x \quad \Rightarrow$$

I. Ha $\sin x = 0$, akkor az egyenlőség teljesül (0=0), tehát $\boxed{x = 0,\ \pi,\ 2\pi}$ az adott intervallumba eső megoldások,

II. Ha $\sin x \neq 0$, akkor $0 < x < \pi$ esetén $1 = 2\cdot\cos x \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3}}$; $\pi < x < 2\pi$ esetén $-1 = 2\cdot\cos x \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{4\pi}{3}}$.

3. Egy (a_n) mértani sorozat első három tagjának összege 63.
Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk.
Adjuk meg a mértani sorozat első három tagját, és a sorozat hányadosát ! (17 pont)

Legyen a számtani sorozat (b_n), a differencia d, a mértani sorozat hányadosa q.

$(b_2 - d) + b_2 + (b_2 + d) = 63 + 3 - 30 = 36 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_2 = a_2 = 12}$. A mértani sorozatra $\frac{a_2}{q} + a_2 + a_2\cdot q = 63 \quad \Rightarrow$

$$12 + 12\cdot q + 12\cdot q^2 = 63\cdot q \quad \Leftrightarrow \quad 4\cdot q^2 - 17\cdot q + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 8^2}}{8} = \frac{17 \pm 3\cdot 5}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_1 = 4\ ,\quad q_2 = \frac{1}{4}}\ .$$

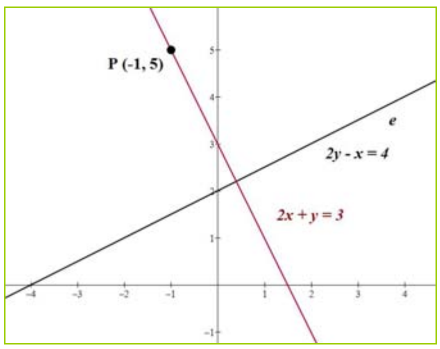
$\Rightarrow$ A mértani sorozat : $\boxed{a_1 = 3,\ a_2 = 12,\ a_3 = 48,\ \ldots \qquad q = 4}$, vagy

$\boxed{a_1 = 48,\ a_2 = 12,\ a_3 = 3,\ \ldots \qquad q = \frac{1}{4}}$,

4. Adott egy egyenes $e:\ 2y - x = 4$, és a $P(-1, 5)$ pont .
Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges e-re, és átmegy P-n ! (13 pont)

e egy normálvektora $\mathbf{n} = (-1, 2)$, erre merőleges pl. az $\mathbf{m} = (2, 1)$ vektor.
Így a P-n átmenő e-re merőleges egyenes egyenlete :

$$2x + y = 2\cdot(-1) + 1\cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + y = 3}\ .$$



A két egyenes metszéspontjának meghatározása :

$$y = 3 - 2x\ , \quad 2\cdot(3-2x) - x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{5}\ , \quad y = 3 - 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Mp = (\,0.4,\ 2.2\,)}\ .$$