Javítási útmutató

2013. nov. 15.

1) Jelölje Y a dobott értéket

$$Y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P(Y=i) = \frac{1}{6} \qquad 2p$$

Teljes valószínűség tétele:

$$P(X=k) = \sum_{i=1}^{6} P(X=k \mid Y=i)\,P(Y=i) \qquad 6p$$

A csop

$$P(X=4 \mid Y=i) = 0, \text{ ha } i<4 \qquad 3p$$

$$P(X=4 \mid Y=i) = \frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{24}{i-4}}{\binom{32}{i}} \text{ ha } i=4,5,6 \qquad 6p$$

Tehát

$$P(X=4) = \sum_{i=4}^{6} \frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{24}{i-1}}{\binom{32}{i}}\cdot\frac{1}{6} \qquad 3p$$

B csop

$$P(X=2 \mid Y=i) = 0 \text{ ha } i=1 \qquad 3p$$

$$P(X=2 \mid Y=i) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{i-2}}{\binom{52}{i}} \text{ ha } i=2,3,4,5,6 \qquad 6p$$

Tehát

$$P(X=2) = \sum_{i=2}^{6} \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{48}{i-2}}{\binom{52}{i}}\cdot\frac{1}{6} \qquad 3p$$

Ha $P(X=k \mid Y=i)$-re nincs meg általában, de néhány konkrét i-re megvan, arra arányosan jár pont.

2) A csop

$X \sim \text{Binom}\left(4, \frac{1}{8}\right)$ 4p

$\uparrow$

$P(\text{ászt húzunk}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ 2p

$EX = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ 4p

$P(X > EX) = P\left(X > \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) =$ 4p

3p $= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \left(\frac{7}{8}\right)^4$

$= 1 - \frac{7^4}{8^4}$ 3p

$= 1 - \frac{2401}{4096} = \frac{1695}{4096}$

B csop

$X \sim G\left(\frac{1}{4}\right)$ 4p

$\uparrow$

$P(\text{treffet húzunk}) = \frac{1}{4}$ 2p

$EX = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$ 4p

$P(X > EX) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) =$ 4p

$= 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$ 3p

$= 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}$

$= 1 - \frac{4^3 + 3 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 + 27}{4^4} = 1 - \frac{64 + 48 + 36 + 27}{256}$

$= 1 - \frac{175}{256} = \frac{81}{256}$ 3p

3) A: $X \sim Po(2)$, $Y \sim Po(3)$ fgtlenek $\Rightarrow X+Y \sim Po(2+3)$ 6p

$Z = 2(X+Y)$

$P(Z=2k) = P(X+Y=k) = \frac{5^k}{k!}e^{-5}$ 4p $k = 0,1,2,\ldots$ 2p

$P(Z=2k+1) = 0$ 2p

$\sigma^2 Z = \sigma^2(2(X+Y)) = 4\cdot\sigma^2(X+Y) = 4\cdot 5 = 20$

3p 3p

Ha nem tudja a Poissonok összegét és elkezdi kiszámolni, akkor arányos annyi a 6 pontból ameddig jut.

Bcsop:

$X, Y \sim E(1)$ fgtlenek $\Rightarrow X+Y$ másodrendű 1 paraméterű gamma 5p

5p $f_{X+Y}(t) = t\cdot e^{-t}$ ha $t>0$ 1p

$Z = 2(X+Y)$

lineáris transzformált

4p ha $V = a\cdot U+b$, akkor $f_V(t) = \frac{1}{|a|} f_U\left(\frac{t-b}{a}\right)$

most $a=2$, $b=0$

$f_Z(t) = \frac{1}{2}\cdot f_{X+Y}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{2}\cdot e^{-t/2}$ ha $t>0$

3p 2p

Itt ugyanígy, ha nem tudja az exponenciálisok összegét, akkor ha elkezdi kiszámolni a sűrűségfv-t konvolúcióval, akkor arányosan annyi a 10 pontból ameddig eljut.

4) A csop

$Y \backslash X$	0	1	
0	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{28}{32} = \frac{7}{8}$
1	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Függetlenek, mert

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$$

$\forall\, i,j \in \{0,1\}$ párra.

B csop

$Y \backslash X$	0	1	
0	$\frac{36}{52}$	$\frac{12}{52}$	$\frac{12}{13}$
1	$\frac{3}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{13}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Függetlenek, mert

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$$

$\forall\, i,j \in \{0,1\}$ párra

Pontozás: Minden vg 2 pont

függetlenek, mert ... 4 pont

5) a) Poincaré-formula (3p)

Ha az egyiket az ellentett eseményre cseréljük, akkor is teljesen függetlenek maradnak. (3p)

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ / $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ (2p)

teljesen függetleneknél a szorzat vge = vg-ek szorzata (3p)

számolás (2p)

b) A (ill. $\bar{A}$) független a feltételtől (1p)

indoklása (3p)

Független esetben a feltételes vg = a feltétel nélküli vg-gel (2p)

A csop $P(A \mid \bar{B}+C) = P(A) = \frac{1}{8}$

B csop $P(\bar{A} \mid B+C) = P(\bar{A}) = \frac{17}{18}$ (1p)