**1.** Rakjuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat :

$$A=\ln\frac{1}{e^2}=-2\,,\qquad B=\sqrt[3]{64^{\frac{1}{2}}}=2\,,\qquad C=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{(1+\sqrt{2}\,)^2}=\left|1+\sqrt{2}\right|=1+\sqrt{2}\;,\qquad 2<\;1+\sqrt{2}\;<3\;,$$

$$D=\sqrt{(1-\sqrt{20}\,)^2}=\left|1-\sqrt{20}\right|=\sqrt{20}-1=2\cdot\sqrt{5}-1>3\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{A<B<C<D}\;.$$

( 8 pont )

**2.** $$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4 9\,-2}+(\log_3 21-\log_3 7)\;=\;2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\log_4 3}+\log_3\frac{21}{7}\;=\;4\cdot\frac{1}{3}+1\qquad\boxed{=\frac{7}{3}}\;.$$

( 8 pont )

Másként : $$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4 9\,-2}+(\log_3 21-\log_3 7)\;=\;2^2\cdot\,9^{\log_4\frac{1}{2}}+(\log_3 3+\log_3 7-\log_3 7)\;=4\cdot\,9^{-\frac{1}{2}}+\log_3 3\;=\;\frac{4}{3}+1$$

**3.** $$\cos\frac{31\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{9\pi}{4}\;=\;\cos\left(\frac{\pi}{6}+5\pi\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)\;=\;\cos\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)+\;\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\;=-\cos\frac{\pi}{6}+1\qquad\boxed{=1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\;.$$

( 8 pont )

**4.** Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra :

$$\frac{(\sqrt{2}\,)^{2n}\cdot 2^n+2\cdot 2^{2n}+16^{n/2}}{(\sqrt{3}\,)^{2n}\cdot 2^n\cdot 9^{-n}\cdot 27^{n/3}}\;=\;\frac{2^n\cdot 2^n+2\cdot 2^{2n}+2^{2n}}{3^n\cdot 2^n\cdot 9^{-n}\cdot 3^n}\;=\;\frac{2^n\cdot(2^n+2\cdot 2^n+2^n)}{9^n\cdot 2^n\cdot 9^{-n}}\;=\;4\cdot 2^n\qquad\boxed{=\;2^{n+2}}\;.$$

( 8 pont )

**5.** Legyen $f(x)=\;3^{x-2}+1$ és $g(x)=\sqrt{x^2+x}$ . Mivel egyenlő $f(g(x))$ és $g(f(x))$ ? ( 10 pont )

$$f(\,g(x)\,)=\;3^{\sqrt{x^2+x}\;-2}+\;1\;,$$

$$g(\;f(x)\,)=\sqrt{(\,3^{x-2}+1)^2+(\,3^{x-2}+1\,)}\;=\;\sqrt{9^{x-2}+3^{x-1}+2}\;,$$

Megj. : $D_{f\circ g}=(-\infty,-1\,]\,\cup\,[\,0,+\infty\,)$ ( $=D_g$ ) ,

$D_{g\circ f}=\mathbf{R}$ ( $=D_f$ ) .

**6.** Adjuk meg az $f(x)=\dfrac{3\,(x+2)^2\cdot(x-3)^2-2\,(x-3)\cdot(x+2)^3}{(x-3)^4}$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! ( 8 pont )

$D_f=\mathbf{R}\setminus\{\,3\,\}$ ( u.i. a nevezőben nem lehet zérus )

$$f(x)=\frac{3\,(x+2)^2\cdot(x-3)^2-2\,(x-3)\cdot(x+2)^3}{(x-3)^4}\;=\;\frac{3\,(x+2)^2\cdot(x-3)-2\,(x+2)^3}{(x-3)^3}\;=\;\frac{(x+2)^2\cdot(\,3\,(x-3)-2\,(x+2)\,)}{(x-3)^3}\;=$$

$$=\frac{(x+2)^2\cdot(\,x-13\,)}{(x-3)^3}\;.$$

$\Rightarrow$ $f(x)\;=\;0$ pontosan akkor, ha $x=-2$ vagy $x=13$ , tehát $\boxed{f\ \text{zérushelyei}\ \ -2\ \text{és}\ 13}$ .

**1.** Rakjuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat :

$A = \sqrt[3]{-27} = -3$, $\quad B = e^{\ln 4} = 4$, $\quad C = \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 5} = \frac{1}{(3^{\log_3 5})^2} = \frac{1}{25}$ , $\quad D = \ln 1 = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{A < D < C < B}$ . ( 8 pont )

**2.** $(2 \cdot \log_2 \sqrt{56} - \log_2 7) + \cos\frac{7\pi}{3} = \log_2 \frac{56}{7} + \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \quad \boxed{= 3 + \frac{1}{2}}$ . ( 8 pont )

**3.** $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}027}} + \frac{4^5 + 4^6 - 4^4}{4^5 + 4^4} = \left(\frac{1000}{27}\right)^{1/3} + \frac{4^4 \cdot (4 + 4^2 - 1)}{4^4 \cdot (4+1)} = \frac{10}{3} + \frac{19}{5} \quad \boxed{= \frac{107}{15}}$ . ( 8 pont )

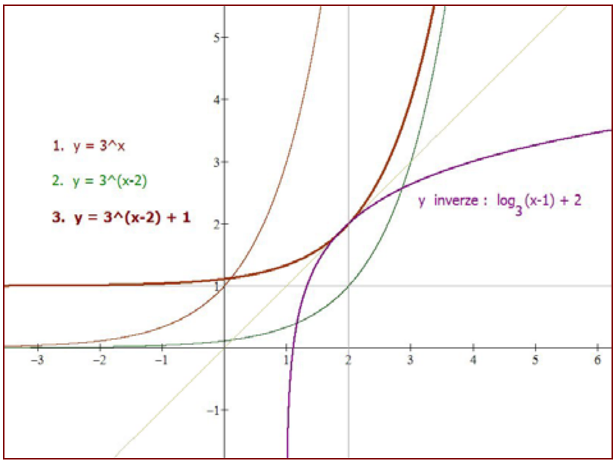
**4.** Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : $\frac{1 - \frac{x^2}{x^2-1}}{2 + \frac{3x-1}{1-x}} \cdot \frac{x^3+1}{1 + x\cdot(x-1)} =$

$= \frac{\frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2-1}}{\frac{2 - 2x + 3x - 1}{1-x}} \cdot \frac{(x+1)\cdot(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = \frac{-1}{(x-1)\cdot(x+1)} \cdot \frac{1-x}{x+1} \cdot (x+1) \quad \boxed{= \frac{1}{x+1}}$ . ( 8 pont )

**5.** Ábrázoljuk az $f(x) = 3^{x-2} + 1$ függvényt és adjuk meg az inverzét ! ( 10 pont )

Függvénytaranszformációval ábrázolva $f$ grafikonját :

az $y = 3^x$ grafikont az $x$ tengely mentén 2-vel jobbra, majd az $y$ tengely mentén 1-gyel felfelé kell eltolnunk.




$D_f = \mathbf{R}$ , $\quad R_f = (1, +\infty)$ ,

$f$ injektív u.i. szig. mon. növő, így az inverze létezik :

$f$ **inverzének meghatározása :**

$D_{f^{-1}} = R_f = (1, +\infty)$ ,

$x = 3^{f^{-1}(x)-2} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 3^{f^{-1}(x)-2}$

$\log_3(x-1) = f^{-1}(x) - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = \log_3(x-1) + 2}$

Megj.: $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbf{R}$ ,

Ha $f$ grafikonját koordinátatranszformációval ábrázoltuk volna, akkor az $\eta = 3^{\xi}$ exponenciális függvénygrafikont kellett volna abban a $\xi, \eta$ koordinátarendszerben ábrázolni, melynek origója az $x, y$ koordinátarendszer $(2, 1)$ pontjában van, s tengelyei párhuzamosak az $x, y$ tengelyekkel, s az egységek változatlanok.

**6.** Legyen $f(x) = 4^{\sqrt{x}}$ és $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ . Mivel egyenlő $f(g(x))$ és $g(f(x))$ ? ( 8 pont )

$f(g(x)) = 4^{\sqrt{0.5 \cdot x^2 + 1}}$ , $\qquad$ Megj. : $D_{f \circ g} = \mathbf{R} \quad (= D_g)$ ,

$g(f(x)) = 0.5 \cdot (4^{\sqrt{x}})^2 + 1 = 0.5 \cdot 16^{\sqrt{x}} + 1$ , $\qquad D_{g \circ f} = [0, +\infty) \quad (= D_f)$ .