Lineáris programozás

munkák:

fordítók:

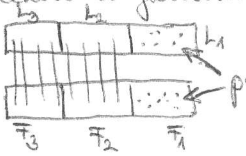
← ezek a párosítások lehetségesek

Cél: a lehető legtöbb munkát végezzük el

Mo.: maximális párosítás keresése

A szaggatott éleket vesszük be a párosításba a másik 2 már behúzott él helyett, így nő a párosítások száma. – javítóutas algoritmus

Ha leállt a javítóutas algoritmus, akkor:



L_2: eljuthatunk ide F_1-ből alternáló úton keresztül

F_1 és F_2 párjai a max. párosításban $= L_2$

$N(F_1 \cup F_2) = L_2$

Tehát tényleg max. párosítást találtunk.

Adott: egy páros gráf: $G(F, L, E)$

$w: E \to \mathbb{R}$ (minden élhez rendel egy számot)

Keressük: M egy párosítás

$\max\limits_{M} \sum\limits_{e \in M} w(e)$ (maximalizáljuk az M-beli élek összsúlyát)

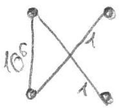
optimum assignment

Adott: $G(F, L, E)$ (feltesszük, hogy G-ben ∃ teljes párosítás)

$w: E \to \mathbb{R}$

Keressük: M egy teljes párosítás

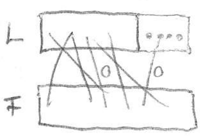
$\max\limits_{M} \sum\limits_{e \in M} w(e)$ (maximalizáljuk az M-beli élek összsúlyát)



max. párosítás: 10^6

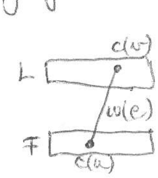
max. teljes párosítás: 2

Visszavezetjük az 1. feladatot a 2. feladatra:



A kisebb ponthalmazt kiegészítjük annyi ponttal, hogy a 2 halmazban ua.-an legyenek.
Behúzunk 0 súlyú éleket, ahol csak lehet, amik még nincsenek összekötve.
A negatív súlyú éleket már az elején töröljük.

Hogyan bizonyítjuk be, hogy amit találtunk, az tényleg max. teljes párosítás?



<u>Def:</u> Címkézés:

$c: F \cup L \to \mathbb{R}$

$\forall uv \in E$-re $\quad c(u)+c(v) \geq w(e)$

$$\sum_{e=uv\in M} w(e) \leq \sum_{e=uv\in M} c(u)+c(v) = \sum_{v\in F\cup L} c(v)$$

↑ teljes párosítás

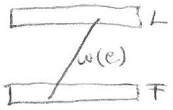
<u>Lemma:</u> M teljes párosítás; c címkézés. Ha $\forall e\in M$-re $c(u)+c(v)=w(e)$, akkor M max. összsúlyú teljes párosítás.

<u>Egerváry-algoritmus:</u>

Nyilvántartjuk: M párosítás
c címkézés

Az $e=uv$ élet piros élnek nevezzük, ha $c(u)+c(v)=w(e)$.
M minden éle piros legyen.
Cél: M teljes párosítás

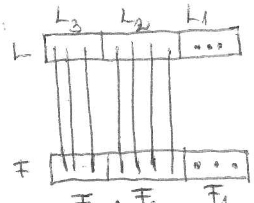
0. lépés: $M=\emptyset$



$$c(v)=\begin{cases} 0, & \text{ha } v\in L \\ \max\limits_{t\in L} w(vt), & \text{ha } v\in F \end{cases}$$

1. lépés: M-ből indulva a piros részgráfban max. párosítás legyen M'.
Ha M' teljes párosítás, akkor kész vagyunk és kiadjuk M'-t.

2. lépés:



párosításbeli piros élek

Mivel M' maximális, ezért (készítsük el az előző felosztást) $F_1\cup F_2$ és $L_1\cup L_3$ között nincs piros él.

$$\delta = \min_{\substack{u\in F_1\cup F_2 \\ v\in L_1\cup L_3}} \{c(u)+c(v)-w(e) \mid uv=e\in E\} > 0$$

Elkészítünk egy új címkézést a régi címkézés segítségével.

$$c'(v)=\begin{cases} c(v)-\delta, & \text{ha } v\in F_1\cup F_2 \\ c(v)+\delta, & \text{ha } v\in L_2 \\ c(v), & \text{egyébként} \end{cases}$$

Visszatérünk az 1. lépésre M'-vel és c'-vel.

Áll: c' is címkézés

biz: $c(u)+c(v) \geq w(e)$

$\underset{uv \in E}{c(u)+c(v)}$ csökken $\Leftrightarrow$ $u \in F_1 \cup F_2$; $v \in L_1 \cup L_3$

De pont csak δ-val csökken és igaz lesz: $c'(u)+c'(v) \geq w(e)$

P = piros részgráf

P-ből kikerül $e = uv$, ha: $u \in F_3$; $v \in L_2$

$\Rightarrow$ M' élei pirosak maradnak

$\Rightarrow$ az L_2-beli lányok továbbra is elérhetőek F_1-ből

P-be bekerül $e = uv$ $\Leftrightarrow$ e olyan $F_1 \cup F_2$ és $L_1 \cup L_3$ között menő él, ahol a δ minimum felvétetik (legalább 1 ilyen él van)

$\Rightarrow$ Legfeljebb $|F|=|L|=n$ ciklus után M nő, mert kiürül L_3 és az új él csak L_1-be mehet.

$\Rightarrow$ Legfeljebb n^2 ciklus után megvan a teljes párosítás.

$\Rightarrow$ $O(n^2 e)$ lépésszámban véget ér az algoritmus.

2006. 09. 14.

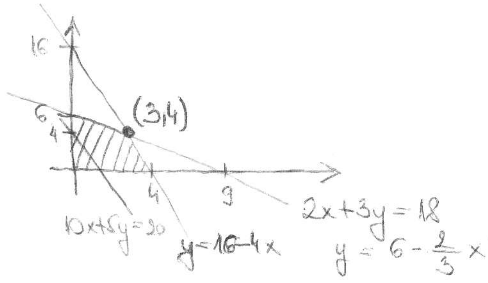
Drakula-művek:

1. szörny	2. szörny	raktár
4 fej	1 fej	16 fej
2 láb	3 láb	18 láb
↓	↓	
x db	y db	

profit: 1. szörny: 10 dollár
2. szörny: 5 dollár

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y \leq 16 \\ 2x+3y \leq 18 \\ x,y \geq 0 \end{array}\right\}$$

$\max 10x+5y = S$



pl. 20 dollárnyi profit megvalósítható

$y = \frac{S}{5} - 2x$ Mi lesz a legnagyobb lehetséges S?

$S = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = \underline{\underline{50}}$ a max. profit

Ált. lin. programozási feladat:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn} \leq b_m \\ \max c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \end{array}\right\} \text{LP alapfeladata}$$

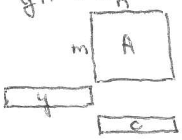
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow Ax \leq b$$

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

LP alapfeladata: $\max\{cx : Ax \leq b\}$

Megj.: $2x+3y=7$ helyett: $2x+3y \le 7$
$-2x-3y \le -7$

$yA \le c$



Nincs szigorú egyenlőtlenség a feltételek között! (Mert akkor nem lenne maximum.)

Esetleges problémák:

- van-e megoldás? ($Ax \le b$ megoldható-e)
- cx korlátos-e a megoldáshalmazon? pl. $\max\{x : x \ge 1\}$
- mennyi a maximum?

$\min\{cx : Ax \le b\} = -\max\{(-c)x : Ax \le b\}$ A min. és max. feladatok egymásba átalakíthatóak.

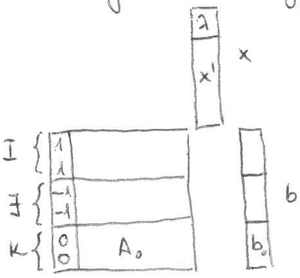
Fourier–Motzkin elimináció:

Az n változós $Ax \le b$ egyenlőtlenségrendszert visszavezetjük egy $n-1$ változós $A^* x^* \le b^*$ egyenlőtlenségrendszerre úgy, hogy: $Ax \le b$ megoldható $\Longleftrightarrow$ $A^* x^* \le b^*$ megoldható

$Ax \le b \rightsquigarrow A^* x^* \le b^*$

$(A|b) \rightsquigarrow (A^*|b^*)$

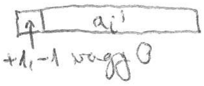
Szabad $\lambda > 0$-val sorokat szorozni.
Elérhetjük azt, hogy A első oszlopában csak $-1, 0, 1$ szerepel.



pl.

$Ax \le b$ megoldható $\Rightarrow$ $A_0 x' \le b_0$ megoldható

x' kiegészíthető-e egy megfelelő λ-val, ami mo.-a lesz az eredeti feladatnak

A i. sora: 

1. eset: ha J üres

$\forall i \in I$-re $\lambda + a_i' x' \le b_i$

$\lambda \le b_i - a_i' x'$ Így kapunk $|I|$ db felső becslést λ-ra.

Legyen $\lambda = \min_{i \in I} \{b_i - a_i' x'\}$. Ezzel a λ-val kiegészíthető x'.

Ekkor $(A^*|b^*) = (A_0|b_0)$

Ha I üres, akkor hasonló a gondolatmenet.

2. eset: I és J is nemüres

$\forall i \in I$-re $\quad \lambda + a_i' x' \leq b_i \quad\quad \lambda \leq b_i - a_i' x'$

$\forall j \in J$-re $\quad -\lambda + a_j' x' \leq b_j \quad\quad a_j' x' - b_j \leq \lambda$

$\exists \lambda \iff \forall i \in I, j \in J$-re $\quad a_j' x' - b_j \leq b_i - a_i' x$

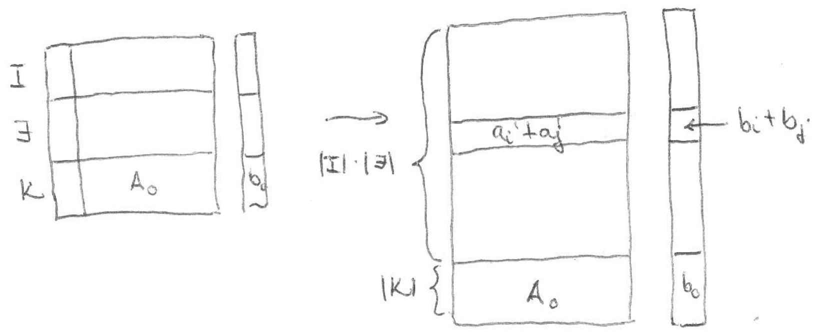
$(a_i' + a_j') x' \leq b_i + b_j \quad \forall i \in I, j \in J$-re $\leftarrow$ Ha ez teljesül, akkor x' kiegészíthető egy alkalmas λ-val x-szé.

$Ax \leq b$ vissza van vezetve erre: $A_0 x' \leq b_0$

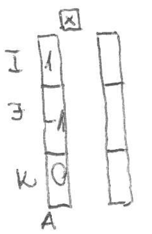
n változós

$(a_i' + a_j') x' \leq b_i + b_j \quad \forall i \in I, j \in J$

n−1 változós



n=1:



Ha $\exists k \in K$, hogy $b_k < 0$, akkor nem megoldható.
I-ből: $x \leq b_i$
J-ből: $x \geq -b_j$
Ha $\exists i \in I, j \in J$, hogy $b_i < -b_j$, akkor nem megoldható.

Egyébként megoldható.

pl.
$$\left.\begin{aligned} x+y+z &\leq 1 \\ 2x-y+z &\geq 1 \\ x+4y-z &\geq 2 \\ x,y,z &\geq 0 \end{aligned}\right\}
\quad
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ \cancel{0} & -3 & 2 & -1 \\ \cancel{0} & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim
\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2/3 & -1/3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{cc|c} \cancel{0} & 1 & 0 \\ \cancel{0} & 1/3 & 1/3 \\ \cancel{0} & 5/3 & 2/3 \\ \cancel{0} & 1 & 1 \\ \cancel{0} & -1 & 0 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2/5 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)
\Rightarrow
\begin{array}{l} z \leq 0 \\ z \leq 1 \\ z \leq 2/5 \\ z \leq 1 \\ -z \leq 0 \end{array}
\Rightarrow z = 0$$

$\Downarrow$

$0; \frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}; 1$

$\Downarrow$

$y = \frac{1}{3}$

Az első mátrixból: $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$Ax \leq b$ Hogyan láthatjuk be, ha nincs megoldás?

Tfh. $\exists y$, hogy $yA = 0, y \geq 0, yb < 0$. $\Rightarrow$ Ekkor $Ax \leq b$ nem megoldható.

biz: ha $\exists x$ megoldás

$$\underset{\substack{\uparrow \\ yA=0}}{0 =} (yA)x = y(Ax) \underset{\substack{\uparrow \\ Ax \leq b;\ y \geq 0}}{\leq} yb < 0 \ \lightning$$

(ez fontos feltétel)

2006.09.18.

<u>Tétel:</u> Ha A, b adott, akkor az alábbi (1) és (2) közül pontosan az egyik megoldható.

(1) $Ax \leq b$

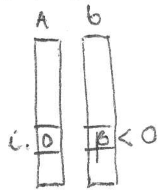
(2) $yA = 0;\ y \geq 0;\ yb < 0$ (Ez a Farkas-lemma.)

biz: (1) és (2) egyszerre nem megoldható ✓

Belátjuk, hogy ha (1) nem, akkor (2) megoldható.

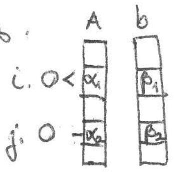
Teljes indukcióval:

$n = 1$: 1. eset:



(1) nem megoldható. Ekkor legyen $y = \begin{array}{c} \\ \boxed{0 \cdots 0 \,|\, 1 \,|\, 0} \end{array}$ (az 1 az $i.$ helyen), ezzel (2) megoldható.

2. eset:



(1) nem megoldható, mert egy felső becslés kisebb egy alsó becslésnél.

$x \leq \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ $\quad x \geq -\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ $\quad$ Azaz: $\frac{\beta_1}{\alpha_1} < -\frac{\beta_2}{\alpha_2}$

Ekkor legyen $y = \begin{array}{ccccc} & i. & & j. & \\ \boxed{0} & \boxed{\alpha_2} & \boxed{0 \ldots 0} & \boxed{\alpha_1} & \boxed{0} \end{array}$ $\Rightarrow$ $yA = \alpha_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 = 0$

$yb = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 < 0$

$y \geq 0$

Indukciós lépés:

(2) megoldásában y helyett λy-ra is áttérhetünk $(\lambda > 0)$

(2) megoldható $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} yA = 0 \\ y \geq 0 \\ yb = -1 \end{array}\right\}$ megoldható $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{l} y \cdot (A|b) = (0, \ldots, 0, -1) \\ y \geq 0 \end{array}$ megoldható $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $(A|b)$ soraiból kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemnegatív együtthatós lin. komb.-val

Tfh. $(A|b)$ nem megoldható, n változós rendszer. Ebből kapjuk az $(A^*|b^*)$ $n-1$ változós, szintén nem megoldható rendszert. Az indukciós feltevés miatt erre igaz a tétel.

$\Rightarrow (A^*|b^*)$ soraiból kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemneg. eh.-s lin. komb.-val

nem egyforma hosszúak

$\Downarrow$

$(A|b)$ soraiból is kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemneg. eh.-s lin. komb.-val

$\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} A^* | b^*\right)$ soraiból is kifejezhető a $(0, \ldots, 0, -1)$ vektor nemneg. eh.-s lin. komb.-val

Tétel: (Farkas-lemma): Az (1) és (2) közül pontosan az egyik megoldható.

$(1)\ Ax=b\ ;\ x\geq 0$

$(2)\ yA\geq 0\ ;\ yb<0$

biz: (1) és (2) egyszerre nem megoldható, mert:

$$0\leq (yA)x = y(Ax) = yb < 0 \quad \lightning$$

Ha (1) nem, akkor (2) megoldható:

$Ax=b$ helyett: $Ax\leq b$

$(-A)x\leq -b$

$x\geq 0$ helyett: $(-E)x\leq 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline -A \\ \hline -E \\ \hline\end{array} \begin{array}{c}\leq\\ \leq\\ \leq\end{array} \begin{array}{|c|}\hline b \\ -b \\ 0 \\ \hline\end{array} \quad \circledast$$

$\circledast$ nem megoldható $\Rightarrow \exists y$, hogy $y\cdot\begin{pmatrix}A\\-A\\-E\end{pmatrix}=0,\ y\geq 0,\ y\cdot\begin{pmatrix}b\\-b\\0\end{pmatrix}<0$ (előző tételből)

$$y = \begin{array}{|c|c|c|}\hline y_1 & y_2 & y_3\\ \hline\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1A-y_2A-y_3=0\\ y_1b-y_2b<0\\ y_1,y_2,y_3\geq 0\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}(y_1-y_2)A=y_3\\ (y_1-y_2)b<0\\ y_1,y_2,y_3\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

y_1-y_2 lesz a mi y vektorunk!

Tétel: Az (1) és (2) közül pontosan az egyik megoldható.

$(1)\ Ax=b$

$(2)\ yA=0\ ;\ yb\neq 0$

biz: egyszerre nem megoldhatóak ✓

Ha (1) nem, akkor (2) igen:

$Ax=b \rightarrow Ax\leq b$, $(-A)x\leq -b$ nem megoldható $\Rightarrow \exists y:\ y\begin{pmatrix}A\\-A\end{pmatrix}=0;\ y\geq 0;\ y\begin{pmatrix}b\\-b\end{pmatrix}<0$

$$y = \begin{array}{|c|c|}\hline y_1 & y_2\\ \hline\end{array}$$

$$\Downarrow$$

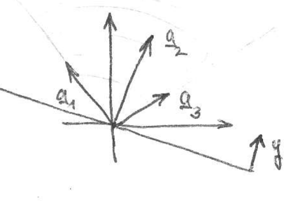
$$\left.\begin{array}{l} y_1A-y_2A=0\\ y_1b-y_2b<0\\ y_1,y_2\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}(y_1-y_2)A=0\\ (y_1-y_2)b<0\end{array}$$

Megj: $(1)\ Ax=b;\ x\geq 0$

$(2)\ yA\geq 0;\ yb<0$

$A=(a_1|\dots|a_m)$

$b=\left(\vdots\right)$



(1) jelentése: b benne van az a_i-k által kifeszített kúpban

(2) jelentése: van olyan y normálvektorú sík, amely b-t szeparálja az a_i-ktől

Mostantól feltesszük, hogy $Ax \le b$ megoldható.
cx korlátos-e a megoldáshalmazon?

<u>Áll</u>: Ha $\exists z$, hogy $Az \le 0$; $cz > 0$, akkor cx nem felülről korlátos $Ax \le b$ mo. halmazán.

biz: Legyen x_0 megoldás.

$x_\lambda = x_0 + \lambda \cdot z \quad (\lambda \ge 0)$

Ekkor x_λ is megoldás: $Ax_\lambda = \underbrace{Ax_0}_{\le b} + \underbrace{\lambda}_{0 \le} \cdot \underbrace{Az}_{\le 0} \le b$

$cx_\lambda = cx_0 + \underbrace{\lambda}_{\ge 0} \cdot \underbrace{cz}_{> 0}$ ← ez felülről nem korlátos ✓

Ha cx felülről korlátos, akkor $\underbrace{\nexists z, \text{ amire } Az \le 0; cz > 0.}$

$\Updownarrow$ Farkas-lemma

$\exists y$, amire $yA = c$; $y \ge 0$

<u>Tétel</u>: $Ax \le b$ megoldható

cx felülről korlátos $\Rightarrow$ $\nexists z: Az \le 0;\ cz > 0$ $\Leftrightarrow$ $\exists y: yA = c;\ y \ge 0$

⊛

biz: ⊛: $cx = (yA)x = y(Ax) \le yb$

$Ax \le b$
$y \ge 0$

felső korlát cx értékére

Az az érdekünk, hogy yb értéke a lehető legkisebb legyen: $\min\{yb : yA = c;\ y \ge 0\}$

$\max\{cx : Ax \le b\}$ duálisa: $\min\{yb : yA = c;\ y \ge 0\}$
primál program — duál program

2006.09.21.

Ha $Ax \le b$ megoldható és cx felülről korlátos (a mo. halmazon), akkor:
(i) $\exists y : yA = c,\ y \ge 0$ (y a duális megoldása) és az yb célfv. alulról korlátos (a mo. halmazon)
(ii) $\max\{cx : Ax \le b\} \le \min\{yb : yA = c,\ y \ge 0\}$

pl. primál:

$\max\ 10x_1 + 5x_2$
$4x_1 + x_2 \le 16$
$2x_1 + 3x_2 \le 18$
$x_1, x_2 \ge 0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = (10\ \ 5)$$

duál: $y = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4)$

$\min\ 16y_1 + 18y_2$
$4y_1 + 2y_2 - y_3 = 10$
$y_1 + 3y_2 - y_4 = 5$
$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0$

→

$\min\ 16y_1 + 18y_2$
$4y_1 + 2y_2 \ge 10$
$y_1 + 3y_2 \ge 5$
$y_1, y_2 \ge 0$

duális ekvivalens alakja

Primál:

$\max\{cx : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$

$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

$(y_1 \mid y_2)$

az y vektor

Duális ekvivalens alakja:

$\min\{yb : yA \geq c,\ y \geq 0\}$

(Azért tudtuk ezt felírni, mert a primál változókra volt nemnegativitási feltétel!)

Dualitás-tétel: Ha $Ax \leq b$ megoldható és cx felülről korlátos a mo. halmazon, akkor

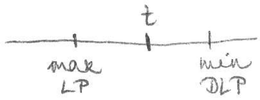
(i) $\exists y : yA = c,\ y \geq 0$ és az yb célfv. alulról korlátos a mo. halmazon

(ii) $\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : yA = c,\ y \geq 0\}$

biz: (i) ✓

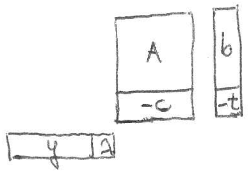
(ii) tudjuk, hogy $\max \leq \min$

indirekten: tfh. $\max_{LP} < \min_{DLP}$



Ekkor $\exists t$ szám a max és min között.

Azaz nincs olyan x, amire: $\left.\begin{matrix} Ax \leq b \\ cx \geq t \end{matrix}\right\}$ $\xLeftrightarrow{\text{Farkas-lemma}}$ $\exists y, \lambda \geq 0$, hogy: $\begin{matrix} yA - \lambda \cdot c = 0 \\ yb - \lambda t < 0 \end{matrix}$



Ha $\lambda = 0$, akkor $\exists y \geq 0 : yA = 0,\ yb < 0$, ezért a Farkas-lemma miatt $Ax \leq b$ nem megoldható. ↯

Tehát $\lambda > 0$.

Osszunk le λ-val: $\frac{1}{\lambda} yA = c$ $\quad$ $y' = \frac{1}{\lambda} y$ jelöléssel: $y'A = c$

$\frac{1}{\lambda} yb < t$ $\quad$ $y'b < t$

$\frac{1}{\lambda} y \geq 0$ $\quad$ $y' \geq 0$

De ekkor $y'b < t < \min_{DLP}$ és y' a duális megoldása. ↯

Miért létezik a $\max\{cx : Ax \leq b\}$?

biz: indirekten: tfh. $\nexists \max\{cx : Ax \leq b\}$

Legyen $t = \sup\{cx : Ax \leq b\}$.

Nincs olyan x, amire $\left.\begin{matrix} Ax \leq b \\ cx \geq t \end{matrix}\right\}$. $\Rightarrow \exists y' : \begin{matrix} y'A = c \\ y' \geq 0 \\ y'b < t \end{matrix}$

duál megoldás

De ekkor $y'b$ is felső korlát és t-nél kisebb. ↯

$\max\{cx : Ax \leq b\}$

1947, Dantzig: szimplex módszer (exponenciális nagyságú)

Adott: A, b, c, t
Kérdés: Létezik-e olyan x, amire $Ax \leq b; cx \geq t$? } Ez egy eldöntési feladat.

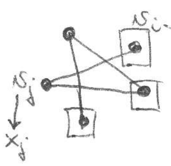
Ez a probléma NP-beli (tanú egy olyan x, ami teljesíti a feltételeket)
Ha mutatok a duális feladaton egy olyan megoldást, ahol a célfv. kisebb, mint t, akkor beláttam, hogy $\max cx < t$. $\Rightarrow$ Ez a probléma co-NP-beli.

1979, Hacsijan: polinomiális időben tudja megoldani az előző problémát (ellipszoid módszer)
1984, Karmarkar: jobb polinomiális algoritmus (belső pontos)

Egészértékű programozás

IP: $\max\{cx : Ax \leq b,\ x \text{ egész}\}$
↳ azaz x $\forall$ koordinátája egész

Adott: G gráf
Kérdés: $\alpha(G) = ?$ (max. ftlen ponthalmaz mérete)



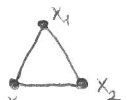
$0 \leq x_i \leq 1 \quad x_i$ egész

$\forall (v_i, v_j) \in E$-re $\quad x_i + x_j \leq 1$

$\max\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

IP-feladat:

Adott: A, b, c, t
Kérdés: $\exists$-e olyan egész x, hogy $Ax \leq b; cx \geq t$ } $\in NP$; NP-teljes



$\max\ x_1 + x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 + x_3 \leq 1$

$x_2 + x_3 \leq 1$

opt. mo.: $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{2}$ (LP feladatként)

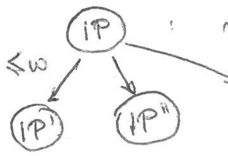
$\max = \frac{3}{2}$

LP : $\max\{cx : Ax \leq b ;\ x \text{ egész}\}$ IP

DLP : $\min\{yb : yA = c ;\ y \geq 0 ;\ y \text{ egész}\}$ DIP

$$\max_{IP} \leq \max_{LP} = \min_{DLP} \leq \min_{DIP}$$

Branch Bound algoritmus



: $\max\{cx : Ax \leq b ,\ f \leq x \leq g ,\ x \text{ egész}\}$

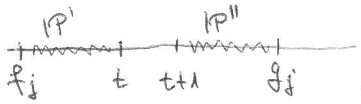
LP relaxáció : → mázli : x egész
→ x nem egész felbontás

IP' : $\max\{cx : Ax \leq b ,\ f' \leq x \leq g'\}$

x_j : elágazási változó

$f_j \leq x_j \leq g_j$

$$f' = f \qquad g' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \end{array} - j$$



Algoritmus:

Nyilvántartjuk: $\alpha = \{IP^{(i)} = (f_i, g_i, w_i)\}$

x^* = eddigi legjobb optimum

z^* = x^*-hoz tartozó célfv. érték ($z^* = cx^*$)

0. lépés: $\alpha = \{(IP)\}$

x^* = nem definiált

$z^* = -\infty$

1. lépés: Ha α üres, akkor STOP.

Ha α nem üres, akkor válasszunk α-ból $(IP)^{(i)} = (f_i, g_i, w_i)$

2. lépés: Ha $w_i \leq z^*$, akkor 1. lépés.

3. lépés: $(LP)^{(i)}$ megoldása

Ha nincs megoldás, akkor 1. lépés.

Ha van megoldás, akkor az $x^{(i)}$ opt. helyen $z^{(i)}$ a célfv. érték.

4. lépés: 4a) Ha $z^{(i)} \leq z^*$, akkor 1. lépés.

4b) Ha $z^{(i)} > z^*$ és $x^{(i)}$ egész, akkor $x^{(i)} \to x^*$, $z^{(i)} \to z^*$ és 1. lépés.

4c) Ha $z^{(i)} > z^*$ és $x^{(i)}$ nem egész, akkor x_j elágazási változó választása.

$\underbrace{(IP^i)' ,\ (IP^i)''}_{w_i = z_i}$ – α-hoz vesszük

$(IP)^{(i)}$ választása: LIFO szabály (Last In First Out): ami utoljára került a listába, azzal foglalkozunk

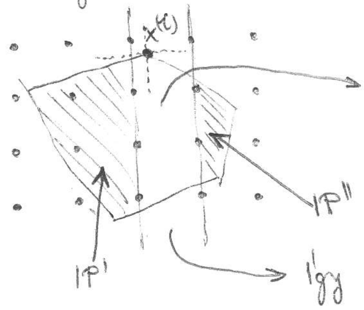
Haszna: - általában a m.o. mélyen van a fában, ezzel a módszerrel lefelé lépünk
- duál szimplexben nem kell újra számolni, lehet folytatni (megszorítása az előző feladatnak)

Ha nem így választunk, akkor w_i max.

x_j, t választása $\quad$ $x^{(i)}$ – x_j az a változó, ami legkevésbé egész értékű

↓

valamelyik koordináta



$t = \lfloor (x^i)_j \rfloor$

Inkább x_2 van középen

Így a lehető legnagyobb részt vágtuk ki!

Def: A totálisan unimoduláris, ha $\forall$ négyzetes M részmátrixára $\det M = 0$ v. $= 1$ v. $= -1$.

Tétel: $\max\{cx : Ax \leq b,\ x \text{ egész}\}$

Ha A tot. unimod. és b egész, akkor $\max\limits_{LP} = \max\limits_{IP}$

$Ax \leq b$ megoldható és cx felülről korlátos.

biz: később

Ha c is egész, akkor $\max\limits_{IP} = \min\limits_{IP}$!

$$\max_{IP} \leq \max_{LP} = \min_{DLP} \leq \min_{DIP}$$

egyenlő, ha A tot. unimod. és c egész

egyenlő, ha A tot. unimod. és b egész

$\min\{yb : yA = c,\ y \geq 0\}$

$$\left.\begin{aligned} A^T y^T &\leq c^T \\ (-A^T) y^T &\leq (-c)^T \\ (-E) y^T &\leq 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ -E \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c^T \\ -c^T \\ 0 \end{bmatrix}$$

↓

A TU (tot. unimod.)

$-\max\{(-b)^T y^T : \quad\}$

Tétel: A TU marad

(i) egy sort/oszlopot (−1)-gyel szorzunk
(ii) egy sort/oszlopot ismételten hozzáveszünk
(iii) új sor/oszlop: egy egységvektort veszünk hozzá: $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$
(iv) transzponáljuk

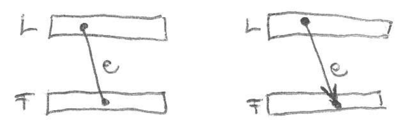
biz.: (i) sor/oszlop szorzása mátrixban a determinánst (−1)-szeresére változtatja
(ii) ismétlődő sor/oszlop miatt a determináns 0
Nincs benn $\Rightarrow$ előzőben is lehetett.
(iii) kifejtési tétel
(iv) triviális

Tétel: (i) Irányított gráf illeszkedési mátrixa TU.
(ii) Páros gráf illeszkedési mátrixa TU.

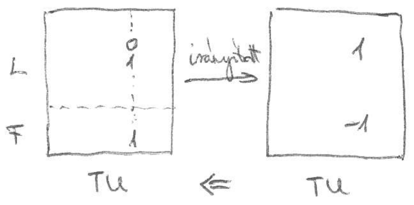
biz: (i) k-ra indukció ($k\times k$-as részmátrix)
1. eset: M-ben $\exists$ oszlop, ami legfeljebb 1db nemnulla elemet tartalmaz.
Ekkor kifejtési tétel miatt $\det M = \pm 1 \cdot \det((k-1)\times(k-1)$-es részmátrix$)$
2. eset: M $\forall$ oszlopában 1db 1-es és 1db (−1)-es szerepel.
A sorok összege 0, $\det = 0$.

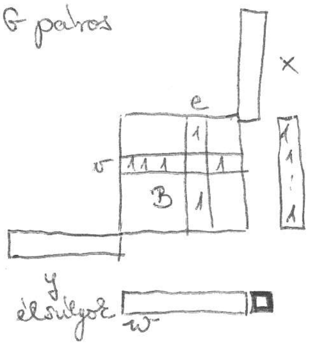
2006.09.28.

(ii)



Illeszkedési mátrix:





$e \to x(e)$

max. összsúlyú párosítást keresünk

$\max\{wx : Bx \le \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}, x \ge 0, x \text{ egész}\}$

$\| \Rightarrow$ x 0-1 értékei
$\Rightarrow$ 1-es értékű élek párosítása

$\max\{cx : Ax \le b, x \ge 0\} = \min\{yb : yA \ge c, y \ge 0\}$

$\min\{y \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} : yB \ge w, y \ge 0\}$

$\downarrow$

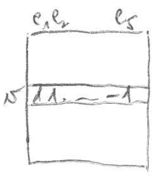
$y(u) + y(v) \ge w(e)$ ← címkézés az Egerváry-algoritmusban
$y(v) \ge 0$
$\min \sum y(v)$

Volt tétel: G páros gráfban a max. párosítás összsúlya = min{címkék összege + nemneg. értékű címkézésben}

$\underset{IP}{\max} = \underset{IP}{\min}$ x, y egész ha B tot. unimod; w, $\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ is egész

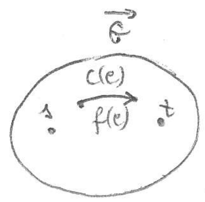
Kőnig-tétel hasonlóan: min. lefogó = max. ftlen

$e \mapsto x(e)$



$$\longrightarrow \overbrace{\sum_{\substack{e\\ v\to}} x(e)}^{\delta_x(v)} - \overbrace{\sum_{\to v} x(e)}^{\varrho_x(v)} \Longrightarrow \text{hálózati folyamok}$$

Ismétlés: hálózati folyamok

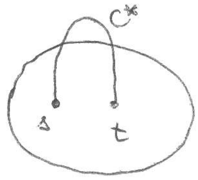


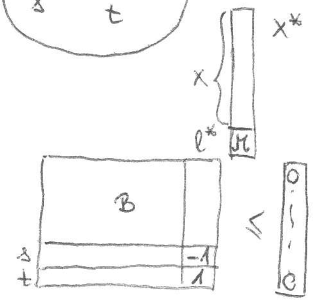
$f = ?$ $\quad 0 \leq f(v) \leq c(e)$

$\forall v \neq s,t$-re $\varrho_f(v) = \delta_f(v)$

$\max\ \delta_f(s) - \varrho_f(s) = \delta_f(t) - \varrho_f(t)$

Áll: $\left.\begin{array}{l} \forall v \neq s,t\text{-re } \delta_f(v) \leq \varrho_f(v) \\ f(e) = c(e) \text{ esetén } \varrho_f(t) \geq \delta_f(s) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f$ folyam





$B^* x^* \leq \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

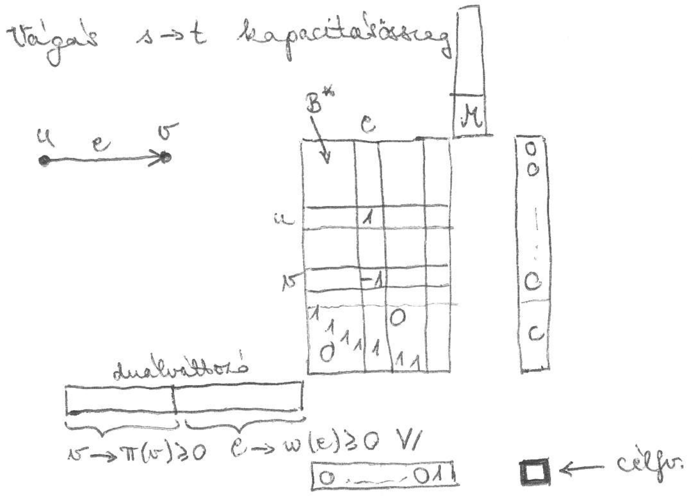
$$\longrightarrow \left.\begin{array}{l} \delta_x(v) - \varrho_x(v) \leq 0 \\ \delta_x(s) - M \leq 0 \\ -\varrho_x(t) + M \leq 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} \delta_x(v) \leq \varrho_x(v) \\ \underbrace{\delta_x(s) \leq M \leq \varrho_x(t)}_{x(e)\ M \text{ értékű folyam}} \end{array}$$

$$\max\left\{(0,\dots,0,1)\, x^* : B^* x^* \leq \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix},\ x \leq c,\ x^* \geq 0\right\}$$

$$\downarrow$$

$$\min\left\{y \cdot \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ c\end{pmatrix} : y \cdot \begin{bmatrix} B^* \\ \begin{smallmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{smallmatrix}\ \ 0 \end{bmatrix} \geq (0,\dots,0,1),\ y \geq 0\right\}$$

Vágás s→t kapacitásösszeg



$\forall\, \underset{u\to v}{e}$ élre $\pi(u) - \pi(v) + w(e) \geq 0$

$\pi(t) - \pi(s) \geq 1$

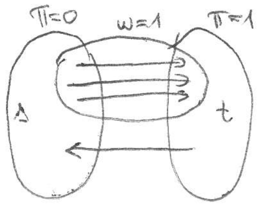
$\min \sum_e w(e) \cdot c(e)$

élkapacitás

0-1 értékű: az él s→t irányú-e a vágásban

$m_C \geq m_{DLP}$

Mivel a ~~vá~~vágások is megadhatóak w-ként.



$\forall$ más élre $w(e) = 0$

$\sum w(e) \cdot c(e) =$ vágás értéke

$\Rightarrow$ Az optimális π és w lehet egészértékű.

$$\pi'(v) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \pi(v) \leq \pi(s) \\ 1, & \text{ha } \pi(v) > \pi(s) \end{cases} \qquad w'(e) = \begin{cases} 0, & \text{ha } w(e) = 0 \\ 1, & \text{ha } w(e) \geq 1 \end{cases}$$

Áll: π', w' DLP megoldása

$$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\pi'(t)} \geq \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi'(s)} + 1$$

$\underset{0}{u} \xrightarrow[0]{e} \underset{1}{v}$

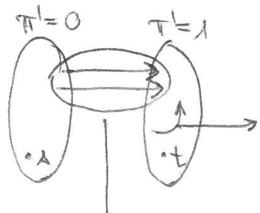
$w', \pi' \Rightarrow$ ↯ $\quad \underset{\leq \pi(s)}{u} \xrightarrow[0]{e} \underset{> \pi(s)}{v}$

w, π olyan, hogy $\leq \pi(s) \quad 0 \quad > \pi(s)$ Ilyen nem lehet.

w és π lehet 0-1 értékű

$\sum w'(e) \cdot c(e) \leq \sum w(e) \cdot c(e)$

Célfv. értéke csak csökken az optimális esetben!



$\to w(e) = 1 \to$ Átváltoztatjuk 0-ra

$\sum w(e) \cdot c(e)$ csökken, de $\neq 0$ ↯

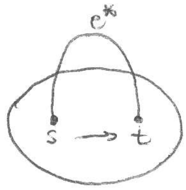
$\sum w(e) \cdot c(e) =$ vágásérték

$m_C \leq m_{DLP}$

↑

minimális vágás

2006.10.02.



$\max\{(0,\dots,0,1)x^* : B^*x^* \leq 0,\ x^* \geq 0,\ x \leq c\}$ LP

x^* egész IP

Min. költségű folyam egészértékű *

Adott: $\vec{G}$; $s,t \in V(G)$; $e \to c(e) \geq 0$; $e \to k(e)$

$\uparrow$ szállítási költség

M – mekkora folyam kell?

Keressük: f folyam $s \to t$, értéke $\geq M$

$\min \sum_e f(e)\cdot k(e)$

$\hookrightarrow \underline{k}$

$\left.\begin{bmatrix} x \\ \mathcal{M} \end{bmatrix}\right\} x^*$

$\min\{\underline{k}\cdot\underline{x} : B^*x^* \leq 0,\ x^* \geq 0,\ x \leq c,\ \mathcal{M} \geq M\}$

x^* egész

EP probléma

* ha $c(e)$ és M egészek

Többtermékes folyam: egy hálózaton keresztül több szállítási feladat adott.

Adott: $\vec{G}$; (s_i, t_i) $i=1,\dots,k$; $e \to c(e) \geq 0$

Keressük: $e \to x_1(e),\dots,x_k(e) \geq 0$

$\forall v \neq s_i, t_i$-re $\varrho_{x_i}(v) = \delta_{x_i}(v)$ Kirchhoff

$\forall e$-re $\sum x_i(e) \leq c(e)$

$\max \sum_{i=1}^{n} \left(\delta_{x_i}(s_i) - \varrho_{x_i}(s_i)\right)$ P-beli!

Def: $Ax \leq b$ megoldható, x egy megoldás

$A_x^=$: A azon a_i soraiból áll, amikre $a_i x = b_i$ (tehát aminél egyenlőséggel teljesül a feltétel)

x bázismo., ha $r(A_x^=) = r(A)$.

x erős bázismo., ha bázismo. és x nemnulla komponenseinek megfelelő A-beli oszlopok lin. ftlenek