Szilárdságtan képletek

SÍKIDOMOK MÁSODRENDŰ NYOMATÉKA

$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA$$

I_x : A síkidom **x** tengelyre vett másodrendű nyomatéka

$$I_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

I_y : A síkidom **y** tengelyre vett másodrendű nyomatéka

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy dA$$

I_{xy} : A síkidom **x-y** tengelykeresztre vett másodrendű nyomatéka

$$I_{sx} = I_x - y^2 A$$

I_{sx} : Az **x** tengellyel párhuzamos **súlyponti** tengelyre vett másodrendű nyomatéka

$$I_{sy} = I_y - x^2 A$$

I_{sxy} : Az **y** tengellyel párhuzamos **súlyponti** tengelyre vett nyomatéka

$$I_{sxy} = I_{xy} - xyA$$

I_{sxy} : Az **x-y** tengellykeresztel párhuzamos **súlyponti** tengelykeresztre vett nyomatéka

SÍKIDOMOK FŐTENGELYEINEK MEGHATÁROZÁSA

$$\underset{(x,y)}{\underline{\underline{I}}_0} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{I}}_0$: Az **x-y** súlyponti tengelyrendszerben felírható másodrendű nyomatéki mátrix

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\ 2}}$$

$I_{1,2}$: Az **1-2** súlyponti főtengelyekre vett másodrendű nyomatékok

$$\alpha_F = arctg\left(\frac{I_x - I_1}{I_{xy}}\right)$$

α_F : Az **1** főtengely és az **x** tengely által bezárt szög

$$I_{xy} = (I_2 - I_1)\cos\alpha \sin\alpha$$

Az **1** főtengellyel α szöget bezáró tengelykeresztre vett nyomaték kiszámítása

FESZÜLTSÉGI ÁLLAPOT JELLEMZŐ MÁTRIXAINAK FELÉPÍTÉSE

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$: A feszültségi tenzor mátrixa az **x-y-z** tengelyrendszerben

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\epsilon}}$: Az alakváltozási tenzor mátrixa az **x-y-z** tengelyrendszerben

EGYSZERŰ HOOKE TÖRVÉNY

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

E : Rugalmassági modulusz anyagjellemző

$$\lambda = \int_0^l \varepsilon_x dx = \int_{(l)} \frac{\sigma_x}{E} dx = l_0 \cdot \varepsilon_x$$

λ : Hosszváltozás egytengelyű feszültségi állapotnál

FESZÜLTSÉGEK JELLEMZŐI ÉS FELÜLETI ELOSZLÁSUK MÓDJA

$$\sigma(x,z) = \frac{M_h(x)}{I_y(x)} \cdot z$$

$\sigma(x,z)$: A feszültség eloszlási függvénye a szerkezet hossztengelye (**x**) és a keresztmetszet síkjában a **z** tengely mentén

$M_h(x)$: A hajtítónyomaték eloszlási függvénye a szerkezet hosszában

$I_y(x)$: A keresztmetszet másodrendű nyomatékának eloszlása a szerkezet hosszában

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_{h\max}}{I_y} \cdot e + \frac{N}{A_0}$$

σ_{XMAX} : A maximális feszültség nagysága

FESZÜLTSÉGI VEKTOROK

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r}) \cdot \underline{n}$$

ρ_n : Adott $\underline{r}$ helyvektorú, $\underline{n}$ normálisú síkhoz tartozó feszültségi vektor

$$\sigma_n = \underline{\rho}_n \cdot \underline{n}$$

σ_n : Adott sík normális irányú feszültsége

$$\tau_n = \sqrt{\underline{\rho}_n \cdot \underline{\rho}_n - \sigma_n^{\,2}}$$

τ_n : Adott síkban ébredő csúsztatófeszültség nagysága

FESZÜLTSÉGI FŐSÍKOK ÉS FŐTENGELYEK MEGHATÁROZÁSA

ÁLTALÁNOS ESET:

$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}}) = 0$ egyenlet megoldása adja a főfeszültségi értékeket: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

SPECIÁLIS ESETBEN:

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

A σ_z főfeszültség

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}}$$

$$tg\alpha_F = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xt}}$$

Az **1**-es főtengely és az **x** tengely által bezárt szög

MOHR KÖRÖK MEGHATÁROZÁSA

$$Op = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Op : Az egyik Mohr kör középpontja

$$R = \sqrt{(\sigma_x - Op)^2 + \tau^2}$$

R : Az Op középpontú Mohr kör sugara

$$\sigma_1 = Op + R$$

σ_1 : Az egyik főfeszültség

$$\sigma_2 = Op - R$$

σ_2 : A másik főfeszültség

$$\sigma_3 = \sigma_z$$

ÁLTALÁNOS HOOKE TÖRVÉNY

$$\varepsilon_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

ϵ_I : Első skalár invariáns az alakváltozási mátrixban

$$\sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

σ_I : Első skalár invariáns a feszültségi mátrixban

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 2G\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right)$$

Feszültségi mátrix kifelyezése alakváltozási mátrix segítségével, ν a Poisson tényező

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2G}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\right)$$

Alakváltozási mátrix kifelyezése feszültségi mátrix segítségével

ALAKVÁLTOZÁS FELBONTÁSA:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I\right) = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad \gamma_{yx} = \frac{\tau_{yx}}{G} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

IGÉNYBEVÉTELEK FŐBB KÉPLETEI

Terhelés neve	Jel	Feszültség	Alakváltozás	Merevség	Megjegyzés
Normál húzás/nyomás	N	$\sigma_x = \frac{F}{A_0}$	$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$	$A_0 E$	
Hajlítás	M_h	$\sigma_x = \frac{M_h}{I_y} \cdot z$	$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$	$I_1 E$, $I_2 E$	
Csavarás	M_t	$\tau_{xt} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r$	$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xt}}{G}$	$I_p G$	
Nyírás	V	$\tau_{xV} = \frac{V \cdot S(z)}{I_y \cdot a(z)}$	$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xV}}{G}$		S(y) : Az **y** feletti terület statikai nyomatéka az **y** tengelyre a(z) : adott magasságnan a keresztmetszet vastagsága

ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIA ÖSSZETETT IGÉNYBEVÉTELEKNÉL

$$U = \int_{(l)} \frac{N(x)^2}{2A_0 E} dx + \int_{(l)} \frac{M_h(x)^2}{2I_y E} dx + \int_{(l)} \frac{M_t(x)}{2I_p G} dx$$

MÉRETEZÉS MOHR SZERINT TÖBBTENGELYŰ FESZÜLTSÉG ESETÉN

$$\sigma_{egyen}^{M} = \sigma_1 - \sigma_3$$

Egyszerű terhelésű rudaknál: $\sigma_{egyen}^{M} = \sqrt{\sigma_x^{\,2} + 4\tau_{xt}^{\,2}} = \frac{\sqrt{M_h^{\,2} + M_t^{\,2}}}{K}$

ALAKVÁLTOZÁSI ÁLLAPOT

$$\underline{\underline{\sigma}}_D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\sigma_I \underline{\underline{E}}$$

Deviátoros feszültség

$$U = \frac{1}{4G}\left(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{\nu - 1}\sigma_I^{\,2}\right) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{4G}\left[\underline{\underline{\sigma}}_D : \underline{\underline{\sigma}}_D - \sigma_I\left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{1-\nu}\right)\right]$$

Alakváltozási állapot energiája feszültségi mátrixból

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Térfogatváltozási modulusz

$$E = 2G(1 + \nu)$$

Rugalmassági modulusz kifelyezése torzióval

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Torziós modulusz kifelyezése rugalmassági moduluszból

$$\sigma_I = 3K\varepsilon_I$$

Első skalár feszültségi invariáns kifelyezése

HMH SZERINTI EGYENÉRTÉKŰ FESZÜLTSÉG

$$\sigma_{egyen}^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}_D : \underline{\underline{\sigma}}_D}$$

BETTI TÉTEL

$$u_P = \int_{(l)} \frac{M_h(x) \cdot m_h(x)}{I_y E}$$

Adott pont lehajlása. $M_h(x)$ a terhelési függvény
$m_h(x)$ a csak a pontban egységnyi erővel terhelt nyomatéki függvény

$$\varphi_P = \int \frac{M_h(x) \cdot m_h(x)}{I_y E}$$

Adott pont szögelfordulása. $M_h(x)$ a terhelési függvény
$m_h(x)$ a csak a pontban egységnyi nyomatékkal terhelt nyomatéki függvény

CASTIGLIANO TÉTEL

$$u_F = \frac{\partial U}{\partial F} = \int_{(l)} \frac{M_h(x)}{I_y E} \cdot \frac{\partial M_h}{\partial F} dx$$ Az erő helyének lehajlása

$$\varphi_F = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_{(l)} \frac{M_h(x)}{I_y E} \cdot \frac{\partial M_h}{\partial M} dx$$ A nyomaték helyének szögelfordulása

$\frac{\partial U(F_i, M_i, B_x)}{\partial B_x} = 0$ (**X** irányú lehajlás az adott erőnél) $\frac{\partial U(F_i, M_i, B_y)}{\partial B_y} = 0$ (**Y** irányú lehajlás az adott erőnél)

$\frac{\partial U(F_i, M_i, M_x)}{\partial M_x} = 0$ (szögelfordulás az adott nyomatéknál)

SÍKGÖRBE RUDAK HAJLÍTÁSA

$$\sigma_x(z) = \sigma_0 + \frac{M_{hy}}{I_0} \cdot \frac{zR}{R+z} \qquad I_0 = \begin{cases} \int_A \frac{R}{R+z} \cdot z^2 dA, \frac{R}{2e} < 2 \\ I_y, 8 \geq \frac{R}{2e} \geq 2 \end{cases}$$

$$\sigma_0 = \frac{M_{hy}}{RA_0} + \frac{N}{A_0} \qquad \sigma_x(z) = \frac{M_{hy}}{I_0} \cdot z + \frac{N}{A_0}, \frac{R}{2e} > 8$$

SIKGÖRBE RUDAK ALAKVÁLTOZÁSA

$$\sigma_0 = E\left(\frac{\rho d\vartheta}{R d\varphi} - 1\right)$$

$d\vartheta$: Deformáció utáni szög

$d\varphi$: Deformáció előtti szög

$$\varepsilon(z=0) = \frac{\rho d\vartheta}{R d\varphi} - 1$$ Középső szál alakváltozása

$$\sigma_\infty = E\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} - 1\right)$$ Végtelen sugarú szál feszültsége

$$z = -\frac{IR}{R^2 A_0 + I}$$ A semleges szál távolsága az **y** tengelytől, ha nincs húzás

$$z = -\left(\frac{\frac{I}{M_y} \cdot \frac{M_y + RN}{A_0}}{R + \frac{I}{M_h} \cdot \frac{M_y + RN}{RA_0}}\right)$$ A semleges szál távolsága az **y** tengelytől, ha van húzás

KIHAJLÁS

$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A_0}$ (Kritikus kihajlási feszültség) $i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A_0}}$ (inerciasugár)

$$\lambda = \frac{l_0}{i_2} = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{meg}}} \qquad F_{kr} = \left(\frac{\pi}{l_0}\right)^2 I_2 E \qquad \sigma_{kr} = \begin{cases} \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E, \text{ ha } \lambda > \lambda_F \\ a_0 - \lambda a_1, \text{ ha } \lambda > \lambda_0 \\ R_{EH}, \text{ ha } \lambda < \lambda \end{cases}$$

l_0 értékek

Egyik végén csuklóval támasztott, másik végén görgősen megvezetett rúd	l_0=l	Egyik végén befogott rúd	l_0=2*l
Egyik végén befogott, másik végén tömbösen megvezetett rúd	l_0=0,5*l	Egyik végén befogott, másik végén görgősen megvezetett rúd	l_0=0,7*l

VÉKONYFALÚ CSÖVEK (R/V > 5)

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{v}$$

ρ_m : a **z** tengelyt tartalmazó síkba eső görbületi sugár

ρ_t : a pontbeli sík normálisának az irányába mutató pont és **z** tenely távolsági sugara

$$\frac{\sigma_m}{\rho_t} = \frac{p}{2v}$$

(Csak ha a cső nem zárt és nem folyadéknyomás van benne)

$$\sigma_n = \begin{cases} -p, \text{ ha befső felület} \\ 0, \text{ ha külső felület} \end{cases}$$

Normális irányú feszültség

Különböző alakú edények jellemző képletei

Alakzat	ρ_m	ρ_t	σ_m	σ_t
HENGERES TARTÁLY	∞	R	$\frac{R \cdot p}{2v}$	$\frac{R \cdot p}{v}$
GÖMBTARTÁLY	R	R	$\frac{R \cdot p}{2v}$	$\frac{R \cdot p}{2v}$
KÚP	∞	Változó		
TÓRUSZ	R	változó		

Ha R/v>20 akkor a **p** elhanyagolható

CSŐ ALAKVÁLTOZÁSA

$\Delta r = r \cdot \varepsilon_t$ (sugárváltozás) $\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu(\sigma_m + \sigma_n)\right]$

VASTAGFALÚ CSÖVEK

$\sigma_r = A - B\left(\frac{r_b}{r}\right)^2$ Radiális irányú feszültség $B = \frac{\Delta p}{1 - \left(\frac{r_b}{r_k}\right)^2}$

$$\sigma_r = A + B\left(\frac{r_b}{r}\right)^2$$ Tangenciális irányú feszültség $$A = B\left(\frac{r_b}{r_k}\right)^2 - p_k$$

$$\sigma_z = \begin{cases} \frac{\sigma_t + \sigma_r}{2}, \text{ha zárt cső} \\ 0, \text{ha nyitott} \end{cases}$$ Hosszirányú feszültség

Segédkonstans a feszültségi diagramhoz

$$\sigma_{\max} = 2B = \frac{2\Delta p}{1 - \left(\frac{r_b}{r_k}\right)^2}$$ Maximális feszültség

$$\sigma_r\Big|_{r=r_b} = -p_b \qquad \sigma_r\Big|_{r=r_k} = -p_k$$ A radiális feszültség peremértékei

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0$$ Feszültségi egyensúlyi egyenlet

VASTAGFALÚ CSÖVEK MÉRETEZÉSE

$$r_b = r_k \cdot \sqrt{1 - \frac{2\Delta p \cdot n}{\sigma_{meg}}}$$ Ha r_b-t keressük

$$r_k = \frac{r_b}{\sqrt{1 - \frac{2\Delta p \cdot n}{\sigma_{meg}}}}$$ Ha r_k-t keressük

$$\Delta p_{\max} = \frac{\sigma_{meg}}{2n}\left[1 - \left(\frac{r_b}{r_k}\right)^2\right]$$ n : bizonsági tényező

FERDE TENGELYŰ HAJLÍTÁS

$$M_{hy} = M_h \cos\alpha$$ A hajlítófeszültség **y** tengely irányú komponense

$$M_{hz} = M_h \sin\alpha$$ A hajlítófeszültség **z** tengely irányú komponense

$$\sigma_x' = \frac{M_{hy}}{I_y} z \qquad \sigma_x'' = \frac{M_{hz}}{I_z} y$$

$$\sigma(y,z) = \sigma_x'(z) + \sigma_x''(y)$$ Feszültségi eloszlások a keresztmetszet mentén

$$\beta = arctg\left(tg\alpha \cdot \frac{I_y}{I_z}\right)$$ A semleges tengely szöge az **y** tengelyhez képest

ALAKVÁLTOZÁSI FÜGGVÉNY

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_h(x)}{I_y E} = \frac{W''(x)}{\sqrt{1+W'}^3} \approx W''(x)$$ Alakváltozási függvény görbületi viszonya

$W(x) = -\frac{1}{I_y E} \int_0^x M_h(s) ds + C_1 x + C_2$ Alakváltozási függvény. A C_1 és C_2 meghatározható peremfeltételekből

$u(x) = W(x)$ Lehajlás

$\varphi(x) = W'(x)$ Szögelfordulás

NÉHÁNY SÍKIDOM MÁSODRENDŰ NYOMATÉKA ÉS INERCIASUGARA

Alakzat	I_x	I_y	I_{xy}	I_p	A_0	i_2	Megjegyzés
Téglalap	$\frac{a_x b_y^3}{12}$	$\frac{a_x^3 b_y}{12}$	0		ab		
Körlap	$\frac{d^4\pi}{64}$	$\frac{d^4\pi}{64}$	0	$\frac{d^4\pi}{32}$	$\frac{d^2\pi}{4}$	$\frac{d}{4}$	
Körgyűrű	$\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$	$\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$	0	$\frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{32}$	$\frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4}$	$\frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$	
Félkör	$\frac{d^4\pi}{128}$	$\frac{d^4\pi}{128}$	0		$\frac{d^2\pi}{8}$	$\frac{d}{4}$	$y_s = \frac{4R}{3\pi}$ $I_{sy} = d^4\left(\frac{\pi}{128} - \frac{1}{18\pi}\right)$
Negyedkör	$\frac{d^4\pi}{256}$	$\frac{d^4\pi}{256}$	$\frac{r^4}{8}$		$\frac{d^2\pi}{16}$		$x_s = y_s = \frac{4R}{3\pi}$ $I_{sy} = d^4\left(\frac{\pi}{256} - \frac{1}{36\pi}\right)$
Háromszög	$\frac{a_x m_y^3}{12}$	$\frac{a_x^3 m_y^3}{12}$	$\frac{a^2 m^2}{24}$		$\frac{am}{2}$		