ANALÍZIS (1) | PÓTZÁRTHELYI megoldás | 2001. dec. 4.
VIK, Informatika | B kurzus | Munkaidő: 60 perc

1.) Feladat (15 pont)

$$f(x) = (x+5)\sin|x+5|$$

$f'(-5) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)

$f'(x) = ?$

---

$$f'(-5) = \lim_{x\to -5} \frac{f(x) - f(-5)}{x-(-5)} = \lim_{x\to -5} \frac{\cancel{(x+5)}\sin|x+5| - 0}{\cancel{x+5}} = 0$$

Vagy
$$f'(-5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\sin|h| - 0}{\cancel{h}} = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} ((x+5)\sin(x+5))' = \sin(x+5) + (x+5)\cos(x+5) = h(x), & \text{ha } x > -5 \\ ((x+5)\sin(-(x+5)))' = -h(x), & \text{ha } x < -5 \end{cases}$$

---

2.) Feladat (30 pont)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$$

a.) $D_f = ?$; $R_f = ?$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = ?$

Hol és milyen típusú szakadása van?

b.) $f'(x) = ?$

c.) Adjon meg egy intervallumot, ahol $\exists\, f^{-1}$! (Indokoljon!)

$f^{-1}(x) = ?$, $D_{f^{-1}} = ?$, $R_{f^{-1}} = ?$

---

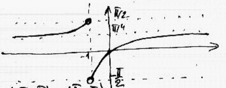
a.) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x\to -1+0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{\overset{\to -1}{x}}{\underset{\to +0}{x+1}}}_{\to -\infty} = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to -1-0} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{\overset{\to -1}{x}}{\underset{\to -0}{x+1}}}_{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Véges ugrás (elsőfajú szakadás).

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{= \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \to 1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \underbrace{\frac{1\cdot(x+1) - x\cdot 1}{(x+1)^2}}_{= \frac{1}{(x+1)^2}} \left(= \frac{1}{(x+1)^2 + x^2}\right) > 0, \text{ ha } x \neq -1$$




$f'$ jeltartása miatt:
$f$ $(-\infty,-1)$-en szigorúan mon. nő $\Rightarrow$ itt $\exists$ az inverz
$(-1,\infty)$-en is szig. mon. nő $\Rightarrow$ itt is invertálható.

$R_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

(Egyébként a teljes ÉT-on is 1-1 értelmű a leképezés, tehát ott is invertálható.)

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x+1-1}{x+1} = \operatorname{arctg}\left(1-\frac{1}{x+1}\right) = f(x); \quad D_f = (-\infty,-1); \; R_f = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg} y = 1 - \frac{1}{x+1} \rightarrow \frac{1}{x+1} = 1 - \operatorname{tg} y \rightarrow x+1 = \frac{1}{1-\operatorname{tg} y}$$

$$\rightarrow x = -1 + \frac{1}{1-\operatorname{tg} y} \qquad x \leftrightarrow y:$$

$$f^{-1}(x) = -1 + \frac{1}{1-\operatorname{tg} x} \qquad D_{f^{-1}} = R_f = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right); \; R_{f^{-1}} = D_f = (-\infty,-1)$$

---

3.) Feladat (30 pont)

$$f(x) = \frac{x^2-x+9}{x}$$

Mit nevezünk $\infty$-beli lineáris aszimptotának és hogyan számoljuk ki?
Van-e az adott függvénynek $\pm\infty$-ben lineáris aszimptotája?
Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a függvény

$g_a(x) = Ax + B$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (Ax+B)\right) = 0$$

$$A = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad B = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - Ax\right)$$

Mivel $f(x) = \dfrac{x^2-x+9}{x} = \underbrace{x-1}_{g_a(x)} + \dfrac{9}{x} \to 0$, ha $x \to \pm\infty$ $\Rightarrow g_a(x) = x-1$

Vagy $A = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+9}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{9}{x^2}\right) = 1$

$$B = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-x+9}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-1+\frac{9}{x}\right) = -1$$

$D_f: \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x\to\pm 0} \frac{x^2-x+9 \to 9}{x \to \pm 0} = \pm\infty; \quad \lim_{x\to\pm\infty} \underbrace{\frac{x^2-x+9}{x}}_{=x-1+\frac{9}{x}} = \pm\infty$$

$f$ nem páros, nem páratlan

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(9-\frac{1}{4}\right)}{x}\neq 0 \quad \text{(Nincs nullahelye; számláló} > 0 \text{ mindig)}$$

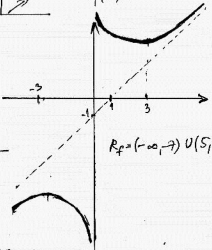
$$f'(x)=\left(x-1+\frac{9}{x}\right)'=1-\frac{9}{x^2}=\frac{x^2-9}{x^2}$$

| | $(-\infty,-3)$ | $-3$ | $(-3,0)$ | $0$ | $(0,3)$ | $3$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | + | 0 | − | ∄ | − | 0 | + |
| $f$ | ↗ | lok. max. | ↘ | szak. pont | ↘ | lok. min. | ↗ |

$f(-3)=-7$
$f(3)=5$

$$f''(x)=\frac{18}{x^3}$$

| | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''$ | − | ∄ | + |
| $f$ | ∩ | szak. pont | ∪ |




$R_f=(-\infty,-7)\cup(5,\infty)$

---

## 4.) Feladat (10 pont)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\operatorname{sh}3x}{\ln(1+5x)}=2$$

$\frac{0}{0}$ alakú, L'H alkalmazható

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\operatorname{sh}3x}{\ln(1+5x)}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2+\operatorname{ch}3x\cdot 3}{\frac{1}{1+5x}\cdot 5}=\frac{5}{1.5}=1$$

---

## 5.) Feladat (15 pont)

$$f(x)=(2+\operatorname{ch}5x)^{\frac{x}{3}+2}$$

$$f'(x)=? \quad ; \quad f'(0)=?$$

$$f(x)=e^{\left(\frac{x}{3}+2\right)\ln(2+\operatorname{ch}5x)} \qquad D_f=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=(2+\operatorname{ch}5x)^{\frac{x}{3}+2}\left(\frac{1}{3}\ln(2+\operatorname{ch}5x)+\left(\frac{x}{3}+2\right)\frac{\operatorname{sh}5x\cdot 5}{2+\operatorname{ch}5x}\right)$$

$$f'(0)=3^2\left(\frac{1}{3}\ln 3+0\right)=3\ln 3$$