1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

Felsőbb matematika 1. ZH. 2022-03-28 Neptun: ________ **Név:** ________________________________ **Gyv:** HP WF

A dolgozat feladatainak ***eredményeit*** *(az egész számítást nem) a keretbe kell írni, de a mellékszámításokat tartalmazó több lap is beadandó, megoldás nélküli eredményre nem jár pont! Minden további papírlap jobb felső sarkában is legyen ott a saját név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!*

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre!

a) (1 pont) Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Jelöljük meg X-szel a helyes válasz(oka)t!

$\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ — I

$\mathbb{R}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ — H

$\mathbb{R}^m = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ — I

$\mathbb{R}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ — I

b) (2 pont) Karikázzuk be az alábbi struktúrák közül a testeket, és húzzuk alá azokat, amelyek kommutatív gyűrűk, de nem testek:

$\mathbb{Z}_7$ $\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ t: $\mathbb{Z}_7, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, gy: $\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}$

c) (1 pont) Az $\mathbf{A}$ mátrix PLU-felbontása legyen $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$. Felhasználva e felbontást írjuk fel azt a két egyenletrendszert, amelynek megoldása megadja az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldását!

$\mathbf{Ly} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$

d) (1 pont) Egy komplex euklideszi térben az alábbiak közül mely állítás(ok) igaz(ak), illetve hamis(ak) minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektorra (I/H)?

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$ — H

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ valós — I

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ nemnegatív — I

2. Az alábbi kérdések mindegyikében *adjunk meg egy példát*, ha a kérdésre az a válasz, hogy „van”! Ha nincs, adjunk rövid indoklást!

a) (1 pont) Van-e olyan *inhomogén* lineáris egyenletrendszer, melynek megoldásai az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ vektorok?

$x + y + z = 1$

b) (1 pont) Van-e olyan *homogén* lineáris egyenletrendszer, melynek megoldásai az $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ vektorok?

$0 = 0$ vagy más alakban $0x + 0y + 0z = 0$

c) (1 pont) Van-e olyan valós $\mathbf{A}$ mátrix, melynek sortere $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}((1,2,3),(2,1,3))$, nulltere $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}((1,1,-1))$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

d) (2 pont) Van-e olyan valós $\mathbf{A}$ mátrix, melynek oszloptere $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}((1,2,3),(2,1,3))$, nulltere $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}((1,1,-1))$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3. *(4 pont)* A következő kérdésekre csak a megfelelő mátrixműveletek jelölésével kell válaszolni, a műveleteket nem kell elvégezni! *(a)* Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az $x+y+z=0$ egyenletű síkra vetít az x-tengely mentén! *(b)* Írjuk fel ugyanennek a leképezésnek a mátrixát az $\{(1,2,3),(1,1,0),(1,0,0)\}$ bázisban! *(c)* Írjuk fel annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az $x+y+z=0$ egyenletű sík mentén vetít az x-tengelyre!

Egy megfelelő bázist keresünk, melyen egyszerű a vetítés hatása:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ha a $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}$ áttérés mátrixa $\mathbf{X}$, akkor azzal a vetítés $\mathcal{B}$ bázisban felírt mátrixa $\mathbf{P}_\mathcal{B} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{PX}$, ahol

$$\mathbf{X}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E vetítés $\hat{\mathbf{P}}$ mátrixa $\mathbf{I} - \mathbf{P}$, vagy

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

4. *(4 pont)* Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix bázisfelbontását, és adjuk meg az oszloptér bázisvektorai alkotta bázisban a negyedik oszlop koordinátás alakját, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}!$$

A bázisfelbontás:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

a negyedik vektor koordinátás alakja a $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ bázisban

$$[\mathbf{a}_4]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

5. *(4 pont)* Adjuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldását a sortérbe eső egyetlen megoldás felhasználásával:

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ -3x + y + z = 5 \\ -2x + 2y = 8 \end{cases}$$

A bővített mátrix redukált lépcsős alakja $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$, az összes megoldás $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$, a sortérbe eső megoldáshoz vezető egyenletrendszer bővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

az összes megoldás $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t$

6. *(4 pont)* Adjuk meg a következő egyenletrendszer megoldását az együtthatómátrix LU-felbontásának segítségével! (A keretbe írjuk be az LU-felbontást, a köztes egyenletrendszer megoldását, és végül az eredeti egyenletrendszer megoldását!)

$$\begin{cases} 4x - 4y - z = -3 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ majd az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ megoldása

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{11}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

7. *(4 pont)* Számítsuk ki a pszeudoinverzét az alábbi $\mathbf{A}$ mátrixnak, majd keressük meg a minimális abszolút értékű optimális megoldását az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

8. *(5 pont)* Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását a Gram–Schmidt-ortogonalizáció segítségével!

$\mathbf{b}_1 = (1, 2, -2)$, $\mathbf{b}_2 = \frac{2}{3}(2, 1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$
$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$, $\mathbf{q}_3 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$
$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Másik megoldás található az online tananyag 7.3 fejezetének gyakorlatai közt „QR-felbontás (3×3)” címmel.

9. *(5 pont)* Határozzuk meg az x^3 polinomnak az $\mathbb{R}[x]$ polinomtér x és x^2 polinomok által kifeszített alterére való merőleges vetületét, ha $p, q \in \mathbb{R}[x]$ esetén $\langle p, q\rangle = \int_0^1 pq$ a skaláris szorzás!

A Gram-mátrix segítségével:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, x^2\rangle \\ \langle x^2, x\rangle & \langle x^2, x^2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle x, x^3\rangle \\ \langle x^2, x^3\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Gc} = \mathbf{b}$ megoldása $(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3})$, így a merőleges vetület

$$-\frac{2}{5}x + \frac{4}{3}x^2$$