Valószínűségszámítás vizsga megoldása
2013. június 5.

1. Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páratlan feltéve, hogy összegük legalább nyolc!
Megoldás: 36 esetből 15 olyan dobás lehet, amikor az összeg legalább 8. Ebből a 15 esetből 3 olyan van, amikor mindkét érték páratlan (t.i. 3 és 5, ill dupla 5). A keresett valószínűség tehát: $\frac{1}{5}$.

2. Egy automata zacskókba cukorkát adagol. A zacskók X súlyát $\mu = 250$ (gramm),$\sigma = 4$ (gramm) paraméterű normális eloszlásúnak tekinthetjük. *Mennyi a valószínűsége annak, hogy három véletlenszerűen kiválasztott zacskó között legalább egy olyan van, aminek a súlya 220 és 260 gramm közé fog esni?
Megoldás: $p = \mathbf{P}(220 < X < 260) = \Phi\left(\frac{10}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-30}{4}\right) = \Phi(2,5) + \Phi(7,5) - 1 \approx 0,9938 + 1 - 1 = 0,9938.$
A keresett valószínűséget p-vel kifejezve: $1 - (1-p)^3$.

3. Tekintsük az $f(x) = x - \frac{3}{2},\ x \in [2,3]$ sűrűségfüggvényt! Az $X \in U(0,1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen $f(x)$!
Megoldás: Az $f(x)$-hez tartozó eloszlásfüggvény: $F(x) = \int_2^x t - \frac{3}{2} dt = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 1, x \in [2,3]$. Ennek inverze: $F^{-1}(x) = \frac{3+\sqrt{1+8x}}{2}, x \in [0,1]$. Ekkor a tanult tétel szerint az $Y = F^{-1}(X) = \frac{3+\sqrt{1+8X}}{2}$ a kívánt tulajdonságú lesz!

4. Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$f(x,y) = e^{-2x-\frac{1}{2}y}$, $0 < x, y < \infty$ (egyébként $f(x,y) = 0$). Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket! Mennyi a két változó korrelációs együtthatója, $\mathrm{R}(X,Y) =$?
Megoldás: Az együttes sűrűségfüggvényből leolvasható, hogy $X \in E(2), Y \in E\left(\frac{1}{2}\right)$ függetlenek. $f_X(x) = 2e^{-2x}, f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, x, y > 0$. A függetlenségből következik, hogy $\mathrm{R}(X,Y) = 0$.

5. Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az $1, 2, 3, 4$ számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két cédulát. X az első, Y a második húzás eredménye. Adja meg $\mathrm{R}(X,Y)$-t! Függetlenek-e X és Y?
Megoldás:

Y \ X	1	2	3	4	Y perem
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
X perem	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = \frac{5}{2}, \mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}Y^2 = \frac{15}{2}. \boldsymbol{\sigma}^2 X = \boldsymbol{\sigma}^2 Y = \frac{5}{4}$
$\mathbf{E}XY = \frac{35}{6} \Longrightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{5}{12} \Longrightarrow \mathrm{R}(X, Y) = -\frac{1}{3} \Longrightarrow$ nem függetlenek!

6. Sorojla fel a feltételes várhatóérték tulajdonságait!
Megoldás:
a.) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y \mid X)) = \mathbf{E}(Y)$
b.) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(Y \mid X) = \mathbf{E}(Y)$
c.) $\mathbf{E}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 \mid X) = \alpha_1 \mathbf{E}(Y_1 \mid X) + \alpha_2 \mathbf{E}(Y_1 \mid X)$
d.) $\mathbf{E}(f(X) \cdot Y \mid X) = f(X) \cdot \mathbf{E}(Y \mid X)$
e.) $\mathbf{E}(Y - \mathbf{E}(Y \mid X))^2 \leq \mathbf{E}(Y - f(X))^2$, minden f-re!