Valószínűségszámítás 1. ZH
2015. október 21.
Megoldás(vázlat)ok

A *-gal megjelölt kérdéseknél az eredményt nem kell numerikusan kiszámolni, csak a kiszámításhoz vezető képletet kell felírni

1. feladat

Tíz berendezést egyszerre kapcsolunk be. Mindegyik berendezés hibamentes működési ideje exponenciális ideig tart, $\lambda = \frac{1}{3}$ paraméterrel, egymástól függetlenül. *Mekkora valószínűséggel fog közülük legalább öt működni 10 időegység múlva?

Megoldás

Egy adott berendezés élettartama (X) exponenciális eloszlású, ezért annak a valószínűsége, hogy elromlik t időn belül: $\mathbf{P}(X < t) = F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
Annak a valósínűsége, hogy ez az adott berendezés NEM romlik el el 10 időegységen belül:

$$p = \mathbf{P}(X \geq 10) = 1 - \mathbf{P}(X < 10) = 1 - F_X(10) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3}10}) = e^{-\frac{10}{3}} \approx 0{,}03567.$$

A berendezések függetlenek, ezért a (10 időegység múlva) működők száma (Y) binomiális eloszlást követ: $Y \in B(10, p)$.
A keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}(Y \geq 5) = \sum_{i=5}^{10} \mathbf{P}(X = i) = \sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} p^i (1-p)^{10-i} \approx 1{,}2524 \cdot 10^{-5}.$$

2. feladat

A dobozban kezdetben egy-egy fekete és fehér színű golyó volt. Ekkor ismételten visszatevéssel húzunk a dobozból egy golyót, amíg feketét nem kapunk. Ha egy húzásnál fehéret kapunk, akkor a kihúzott golyót és még plusz két fehér golyót teszünk a dobozba. Jelölje X a fekete golyó húzásáig tartó húzások számát, a fekete golyó húzását is beleszámolva. Adja meg X eloszlását.

Megoldás

X értelmezési tartománya: $R_X = \{1, 2, 3, \dots\}$.
Legyen A_i az az esemény, hogy az i-edik húzásra húztunk feketét, és B_i az az esemény, hogy az első i db húzásunk csupa fehér.
Észrevehetjük, hogy az i. (fehér) húzás után $2i - 1$ darab fehér és 1 darab fekete golyó van a dobozban, ezért $\mathbf{P}(A_i | B_{i-1}) = \frac{1}{2i}$, mivel ennyi a valószínűsége, hogy i. húzásra feketét húzunk, FELTÉVE, ha eddig csupa fehér volt.
$\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, mert ennyi a valószínűsége, hogy elsőre kihúzzuk a fekete golyót a két golyóból.
$\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(B_1) \cdot \mathbf{P}(A_2 | B_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.
$\mathbf{P}(X = 3) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(B_2) \cdot \mathbf{P}(A_3 | B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$.
Általánosan is $\mathbf{P}(B_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2k-1}{2k}$, mivel elsőre $\frac{1}{2}$, utána $\frac{3}{4}$ stb. az esélye a fehér húzásának az adott körben.
Ezek alapján $\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(B_{n-1}) \cdot \mathbf{P}(A_n | B_{n-1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

3. feladat

Az emberek testmagassága normális eloszlással jól közelíthető. *Mekkora valószínűséggel történhet az meg, hogy egy tíz tagú társaság többsége magasabb az átlagosnál, azaz testmagasságuk nagyobb az eloszlás első paraméterénél?

Megoldás

Nézzük meg, mekkora a valószínűsége, hogy egy adott ember testmagassága (Y) nagyobb az átlagnál!
Mivel $Y \in N(m, \sigma)$, ezért $\mathbf{P}(Y \geq m) = 1 - P(Y < m) = 1 - F_Y(m) = 1 - \Phi(\frac{m-m}{\sigma}) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$.
(Arra is lehetett hivatkozni, hogy a normális eloszlás sűrűségfüggvénye $x = m$-re szimmetrikus, ezért $\frac{1}{2}$ az esélye, hogy valaki magasabb az átlagnál.)
Jelölje X az átlagosnál magasabb emberek számát a tíztagú társaságban. Ekkor $X \in B(10, \frac{1}{2})$.
A keresett valószínűség:

$$\mathbf{P}(X > 5) = \sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{10-i} = \frac{\sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i}}{1024} \approx 0{,}37695.$$

4. feladat

Egy szabályos kockával addig dobunk, amíg nem kapunk páros értéket. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobássorozatban kapunk 1-est valamikor?

I. Megoldás

Legyen A_i az az esemény, hogy (először) az i-edik dobásban kapunk páros értéket, $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, B pedig, hogy a dobássorozatban van 1-es.
$\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{2^{i-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^i}$, mivel ehhez az kell, hogy az első $i-1$ dobásban páratlant dobjunk, az i-edik dobásra pedig párost. (Lehet arra is hivatkozni, hogy a páros dobás első előfordulásának ideje $G(\frac{1}{2})$ geometriai eloszlást követ.)
Ha tudjuk, hogy $i-1$ páratlan dobás volt (az utolsó, páros előtt), akkor annak a valószínűsége, hogy NEM volt köztük 1-es: $\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$, mivel minden dobásra (függetlenül) $\frac{2}{3}$ a valószínűsége, hogy olyan páratlan számot dobtunk, ami NEM az 1-es.
$\mathbf{P}(B|A_i) = 1 - \mathbf{P}(\bar{B}|A_i) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$, azaz ha i-ediik dobásra jött ki a páros szám, akkor ennyi a valószínűsége, hogy VOLT 1-es.
Mivel $A_1, A_2, A_3, \dots$ teljes eseményrendszert alkot, ezért $\mathbf{P}(B)$-t felírhatjuk a teljes valószínűség tétele alapján:

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(B|A_i) \cdot \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\right) \cdot \frac{1}{2^i}.$$

A végtelen sor összegét kiszámítva adódik a végeredmény:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\right) \cdot \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^{i-1}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

II. Megoldás (vázlat)

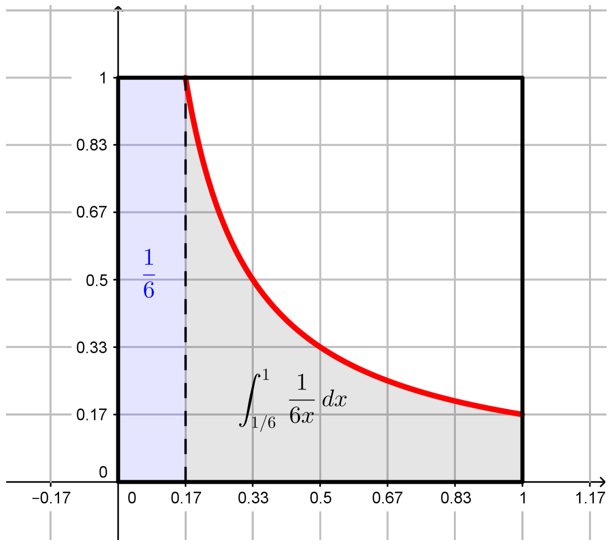
Nézzük meg, hogy a dobássorozat során az $\{1, 2, 4, 6\}$ számok közük melyik kerül elő először!
Ha a 2, 4 vagy a 6, akkor nem kaptunk 1-est valamikor, mivel azelőtt véget ért a sorozat, hogy 1-est kapnánk.
Ha a 1-es, akkor viszont biztosan kaptunk 1-est a dobássorozatban. (Végiggondolható, hogy innentől is 1 valószínűséggel befejeződik a dobássorozat, mivel 0 a valószínűsége, hogy „végtelenszer” csak páratlant dobunk.)
Mivel a kockánk szabályos, ezért ez a 4 eset egyformán valószínű, s mivel a 4 esetből 1 kedvező van, ezért a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.

5. feladat

Az $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzeten véletlenszerűen kiválasztunk egy (x,y) koordinátájú pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az x,y oldalhosszúságú téglalap területe nagyobb lesz $\frac{1}{6}$-nál?

Megoldás

A x,y oldalhosszúságú téglalap területe: $x\cdot y$, ezért a kérdés, hogy egy random (x,y) egységnégyzetbeli pontot választva mennyi $\mathbf{P}(x\cdot y>\frac{1}{6})=\mathbf{P}(y>\frac{1}{6x})$.
Ennek a feltételnek az $y=\frac{1}{6x}$ hiperbola feletti pontok felelnek meg az egységnégyzetben.
Az összes eset pont az egységnégyzet ($T_{osszes}=1$), ezért számoljuk ki inkább a rossz esetekhez tartozó területet és azt 1-ből kivonva megkapjuk a jó esetekhez tartozót!



Rossz esetek: a „bal oldali” $\frac{1}{6}\cdot 1$-es téglalap, és a hiperbola alatti terület $\frac{1}{6}$ és 1 között.

$$T_{rossz}=\frac{1}{6}+\int_{\frac{1}{6}}^{1}\frac{1}{6x}\,dx=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\int_{\frac{1}{6}}^{1}\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\big[\ln x\big]_{\frac{1}{6}}^{1}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}(\ln 1-\ln\frac{1}{6})=\frac{1+\ln 6}{6}.$$

A jó eset valószínűsége az $1-T_{rossz}=\frac{5-\ln 6}{6}\approx 0{,}5347$.