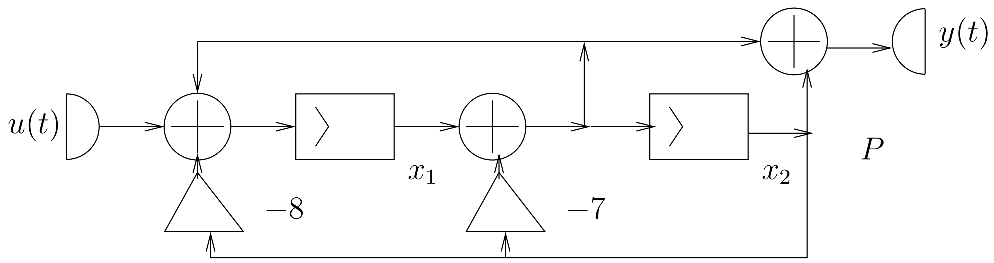
JAVÍTÁSI PÉLDÁNY

Csak egész pontszám adható

Nagypélda.

A folytonos idejű rendszer az alábbi jelfolyam hálózattal adott.



(a) Adja meg a rendszer állapotváltozós leírását normál alakban! *(8 pont)*

(b) Adja meg a rendszer átviteli karakterisztikáját, ha létezik, illetve indokolja "nem létezik" válaszát! *(8 pont)*

(c) Adja meg a rendszer $g(t)$ ugrásválaszának (az $\varepsilon(t)$ gerjesztőjelre adott válaszának) kezdeti értékét és állandó összetevőjét! *(6 pont)*

(d) Adja meg a rendszer impulzusválaszának formuláját! *(8 pont)*

(a)
$$\begin{aligned} x_1{}' &= x_1 - 15x_2 + u \\ x_2{}' &= x_1 - 7x_2 \\ y &= x_1 - 6x_2 \end{aligned}$$
8 pont

(b) Egyik megoldás

$$j\omega P = -7P + \frac{j\omega P + U - 8P}{j\omega} \qquad Y = P + j\omega P \quad \Rightarrow \quad P((j\omega)^2 + 6j\omega + 8) = U \qquad Y = U\frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8}$$

$H(j\omega) = \dfrac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8}$. Létezik, mert a nevező Hurwitz polinom. **8 pont**, ebből 4 az alapegyenletek felírásáért, 1 pont a "létezik" indoklásáért.

Másik megoldás

$$H(j\omega) = \frac{\mathbf{C}^T adj(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{det(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A})} + D, \qquad det(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (j\omega)^2 + 6j\omega + 8 \qquad \text{(4 pont)}$$

$$adj(j\omega\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} j\omega + 7 & -15 \\ 1 & j\omega - 1 \end{bmatrix}, \qquad H(j\omega) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\omega + 7 & -15 \\ 1 & j\omega - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8},$$

$H(j\omega) = \dfrac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 8}$ 3 pont, Létezik, mert a nevező Hurwitz polinom 1 pont, összesen **8 pont**

(c) $g(0) = 0$, mert $x_1(0) = x_2(0) = 0$. 2 pont.

$\lim_{t\to\infty} g(t) = \dfrac{1}{8}$, mert $H(j\omega)|_{\omega=0} = \dfrac{1}{8}$. 4 pont, összesen: **6 pont**

(d) A sajátértékek: $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -15 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0.$ $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -2$. 2 pont

Egyik megoldás.

A saját vektorok: $\underline{m} = \begin{bmatrix} m_a \\ m_b \end{bmatrix}$ jelöléssel: $\begin{array}{c}(1-\lambda)m_a - 15m_b = 0 \\ m_a + (-7-\lambda)m_b = 0\end{array}$ A második egyenletből $m_b = 1$ választással $m_a = 7 + \lambda$: $\lambda_1 = -4$ esetén $\underline{m}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = -2$ esetén $\underline{m}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\underline{x}_f(t) = \begin{bmatrix} 3C_1e^{-4t} + 5C_2e^{-2t} \\ C_1e^{-4t} + C_2e^{-2t} \end{bmatrix}$ 2 pont

$u(t) = \delta(t)$ esetén a gerjesztett összetevő 0, így $\underline{x}(t) = \underline{x}_f(t)$. Az állapotváltozók kezdeti értéke: $x_1(+0) = 1$, illetve $x_2(+0) = 0$. A kezdeti értékeket figyelembe véve: $\begin{array}{c}3C_1 + 5C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 0\end{array}$.

$C_1 = -0,5$, $C_2 = 0,5$. 2 pont

$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3C_1e^{-4t} + 5C_2e^{-2t} \\ C_1e^{-4t} + C_2e^{-2t} \end{bmatrix} = 1,5e^{-4t} - 0,5e^{-2t}$

$h(t) = \varepsilon(t)\,[1,5e^{-4t} - 0,5e^{-2t}]$ 2 pont, összesen **8 pont**

Másik megoldás $h(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t)\mathbf{C}^T(\mathbf{L}_1e^{\lambda_1 t} + \mathbf{L}_2e^{\lambda_2 t})\mathbf{B}$

$\mathbf{L}_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -15 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,5 & 7,5 \\ -0,5 & 2,5 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 & -7,5 \\ 0,5 & -1,5 \end{bmatrix}$ 3 pont

$\mathbf{C}^T\mathbf{L}_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,5 & 7,5 \\ -0,5 & 2,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1,5$ $\mathbf{C}^T\mathbf{L}_2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2,5 & -7,5 \\ 0,5 & -1,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -0,5$

$h(t) = \varepsilon(t)(1,5e^{-4t} - 0,5e^{-2t})$ 3 pont, összesen **8 pont**

Kispéldák.

1. Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = A\delta[k+1] + B\delta[k] + \varepsilon[k-1]C0,9^k$.Az A, B és a C paraméterek mely értékeire *a)* kauzális, *b)* GV-stabilis a rendszer?
   a) $A = 0$, B, C tetszőleges, b) A, B, C tetszőleges. **2 pont**

2. Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = 2\varepsilon[k]0,8^k$, gerjesztőjele konstans: $u[k] = 5$. Adja meg a válasz értékét a $k = 2$ ütemben!
   $y[2] = 50$ **2 pont**

3. Egy DI rendszer állapotváltozós leírása:
   $$x[k+1] = 0,5x[k] - u[k], \quad y[k] = 5x[k] + 2u[k].$$
   Adja meg a rendszer válaszának kezdeti értékét, ha gerjesztő jele: $u[k] = \varepsilon[k]10\cos(0,1\pi k)$!
   $y[0] = 20$ **2 pont**

4. Adja meg az $x[k] = 3\cos 0,1\pi k + 4\sin 0,1\pi k$ szinuszos DI jel komplex amplitúdóját!
   $\overline{X} = 3 - j4 = 5e^{-j0,9273}$ $(-53,13^o)$ **2 pont**

5. Egy GV-stabilis DI rendszer válaszjele az $u[k] = 5\cos(\frac{\pi}{2}k + 0,5)$ bemeneti jelre $y[k] = 4\cos(\frac{\pi}{2}k - 0,1)$. Adja meg a rendszer átviteli tényezőjét e jelek diszkrét körfrekvenciáján!
   $\overline{H} = 0,8e^{-j0,6}$ **2 pont**