mcl.hu/tantárgy lista Hírkelm 1.

{HIRKELM ++}

2017.02.07.

EA. 1.

Modulált jelek ált. leírása

forrás: szimbólumok forrása

$\{\xi_{k_i}\}$ - vektor sorozat : $k \in [1 \dots M]$ szimbólum sorszáma

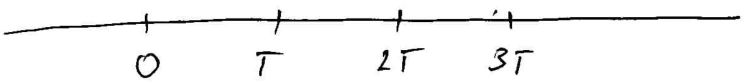
szimbólumok átvitele

T szimbólumidő (időrés)

i időrés

elemi idő

$i \cdot T$



fizikai rétegben valós jelek vannak!

időfüggvények (elemi fv-ek) : $\{x(t)|_{k_i}\}$

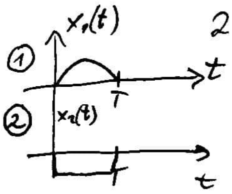
más szimbólumhoz másjelet

korlátolt tartójú szimbólum időfüggvények

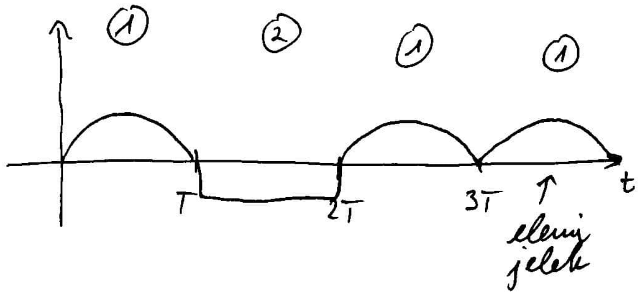
$x_k(t) \in [0, T)$

szimbólum határokon ugrás → nagy sávszél

$x_k(t - iT)$ →



2 időfv. példa



ez egy realizáció

vevőnek kell tudni hol kezdődik a szimbólum.

ha csak megfigyelő vagyok → bármilyen eltolással értelmezem. (plusz szabadsági fok)

— · —

$\{\varphi_i(t)\}_j$ - függvénykészlet $j : [1 \dots N]$ ortogonális + normált fv.

$$\int_0^T \varphi_j(t) \cdot \varphi_\ell(t)\, dt = \begin{cases} 1 & ha\ j = \ell \\ 0 & ha\ j \neq \ell \end{cases}$$

ortonormált jelkészlet

legyen teljes $x_k(t)$ halmazra vonatkozóan

bármilyen jelet le tudok írni az ON bázis segítségével

Teljesség:

$$\boxed{\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{j=1}^{N} x_{kj} \cdot \varphi_j(t) \\ x_{kj} &= \int_0^T x_k(t)\, \varphi_j(t)\, dt \end{aligned}}$$

⇒ Fourier-sor fejtés $x_k(t) \Rightarrow \overline{x}_k = \{x_{k1} \dots x_{kN}\}$

Tetszőleges esetre van-e ortonormált bázis jelre?

② H/KFLM ++ 2017.02.07

Gram-Schmidt ortogonalizáció:

1) $x(t)$ halmaz

$$x_1(t) = \underset{\uparrow}{a} \cdot \varphi_1(t) \qquad (\ )^2$$

$\varphi_1(t)$ ← ONB-fv

a ← arányos mozzó tag

$$\int x_1(t)^2 = \int a^2 \cdot \varphi_1(t)^2 \rightsquigarrow \int \varphi_1^2(t) = 1 \rightarrow$$

$$\varphi_1(t) = \frac{x_1(t)}{a} = \frac{x_1(t)}{\sqrt{\int_0^T x_1^2 t \, dt}}$$

2) $x_2(t) = b \cdot \varphi_1(t) + c \cdot \varphi_2(t) \qquad \cdot \varphi_1(t) \cdot \int$

$$\int_0^T x_2(t) \cdot \varphi_1(t) dt = b \cdot \int_0^T \underbrace{\varphi_1^2(t) dt}_{\Rightarrow 1} \; c \cdot \underbrace{\int \varphi_2 \varphi_1(t) \, dt}_{\Rightarrow \emptyset}$$

$$\underbrace{x_2(t) - b \cdot \varphi_1(t)}_{\text{ismert}} = c \cdot \varphi_2(t)$$

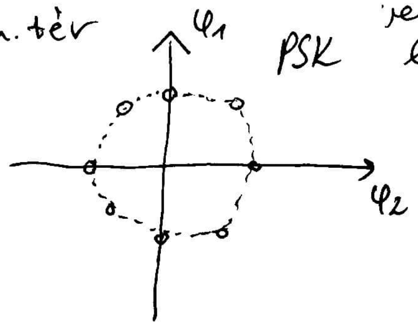
ha egy új függvény nem nyit új dimenziót → nem lesz ortogonális a többire az új.

$M \geqslant N$

M, N

OFDM: N dim. tér

PSK vektoros leírás



$$\boxed{x_k(t) = \sum x_{kj} \varphi_j(t)}$$

$$\int_0^T x_k^2(t) \, dt = E_k \quad \text{k-dik jel energiája}$$

csak akkor nem ∅ ha $j \neq e$

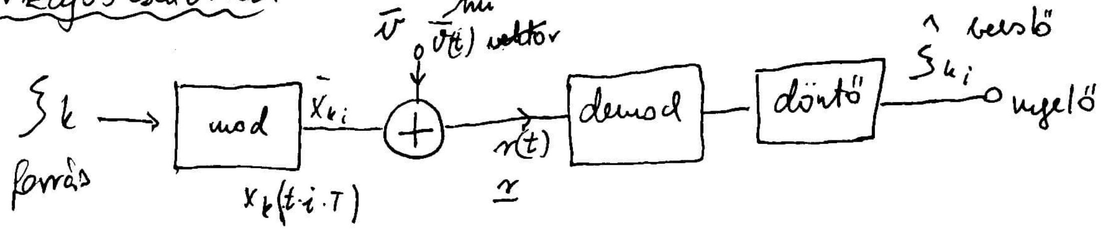
ONB

$$\int_0^T \left(\sum_{j=1}^{N} x_{kj} \cdot \varphi_j(t) \right) \left(\sum_{e=1}^{N} x_k \cdot \varphi_e(t) \right) dt = \sum_j^N \sum_e^N x_{kj} x_{ke} \int_0^T \varphi_j(t) \varphi_e(t) \, dt \Rightarrow \sum_j^N x_{ki}^2$$

BPSK

— · —

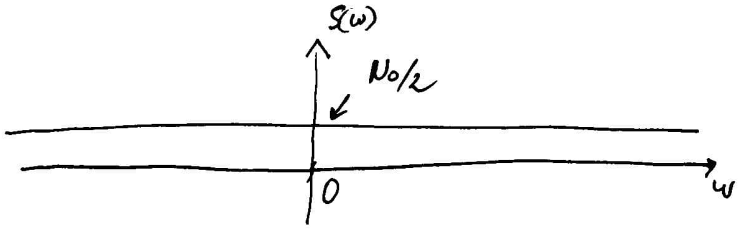
Additív zajos csatorna:



HIRKELH
KT

2017-02.07.

additiv Gauss-zajos csatorna:



$N_0/2$ - kétoldalas teljesítménysűrűség

$N_0 : [W/Hz]$

N_0 : - egyoldalas sűrűségjel

végtelen teljesítmény van itt!

de ha véges sávnál van → kisebb a zaj teljesítmény!

(+) → van egy N dim. jeltérem, ebben a térben mekkora a zaj?
ezen kívül nem érdekel a zaj! a zaj komponenseknek nincs vetülete a jel térre → nem zavar minket a zaj.

autokorrel. fv.: $R(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \delta(t)$

független növekményű a jel → nincs köze a következő/előző jelhez a mostaninak, tetszőlegesen kis eltolásra is korrelálatlan.

Gauss-esetben: korrelálatlanság → függetlenséget is jelent.

— • —

Gauss-csatornák vektortér:

$\underline{V} = [V_1 \dots V_N]$ V_i komponensek valószínűségi változók (nem konstansok)

$V_j = \int_0^T V(t)\,\varphi_j(t)\,dt$ → ez létezik! (tegyük fel) → a végeredmény is Gauss eloszlású lesz. (ha $V(t)$ Gauss → lin. kombináció súlyozva) jó most 2 paraméteres!

minden időpillanatban 1. valséggel végtelen amplitudójú

nem triv. kiértékelni

$\mathbb{E}\{V_j\} = \int_0^T \mathbb{E}(V(t))\,\varphi_j(t)\,dt = 0$

szorzat várhatóértéke → korrelációja

$\mathbb{E}\{V_j V_k\} = \mathbb{E}\Big[\Big(\underbrace{\int_0^T V(t)\cdot\varphi_j(t)\,dt}_{V_j}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^T V(\varrho)\cdot\varphi_k(\varrho)\,d\varrho}_{V_k}\Big)\Big] =$ véletlen $V(t)$ és $V(\varrho)$
$\mathbb{E}$ és $\int$ cseréje lesz!

vetületek!

$= \int_0^T\int_0^T \underbrace{\mathbb{E}[V(t)\cdot V(\varrho)]}_{\sim \frac{N_0}{2}\cdot\delta(t-\varrho)} \varphi_j(t)\,\varphi_k(\varrho)\,dt\,d\varrho = \frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T \underbrace{\delta(t-\varrho)}_{t=\varrho \text{ kivéve } \emptyset}\varphi_j(t)\,\varphi_k(\varrho)\,dt\,d\varrho =$

$= \frac{N_0}{2}\int_0^T \varphi_j(t)\,\varphi_k(t)\,dt \begin{cases} N_0/2 & k = j \\ \emptyset & k \neq j \end{cases}$

vagyis a jeltérbe belelóg a zaj minden dimenzióban egyenletesen sűrűsége

④ minden irányba

HÍRKELM. ++ 3.

2017.02.07

Hétfő: $10^{00}-12^{00}$

Kedd: $10^{00}-12^{00}$

<u>AGWN</u>: N dim vektortérben minden vektorba ad egy $N_0/2$ várható értékű komponenst. (egyenletesen)

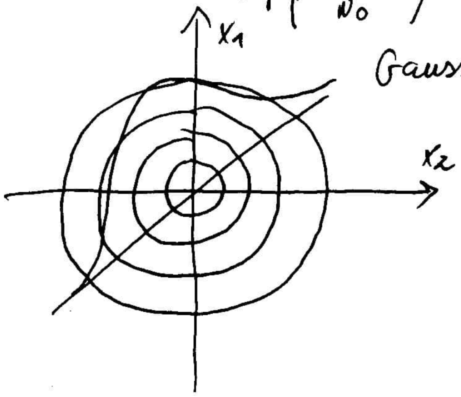
$$P_{\underline{v}}(\underline{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\right)^N e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot N_0}}\right)^N \cdot \prod_{j=1}^{N} e\left(\frac{-x_j^2}{N_0}\right)$$

$\prod_{j=1}^{N}$

teljesítmény sűrűség fv.

$\exp\left(\frac{x_1^2+x_2^2}{N_0}\right)$ kör-egyenlet lesz.

<u>N = 2 esetében:</u>



<u>Irrelevancia</u>: $\underline{V} \to V(t)$

nincs olyan kapcsolat, mint $x(t) - \underline{x}$ esetén

$$V(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} v_j\, \varphi_j(t)}_{\text{vetületek a jeltérben!}} + \tilde{V}(t)$$

nem tudom a zajt kompletten leírni

maradék zajrani kívül esik a jeltéren. ezt integrálással eliminálom!

$\int_0^T x(t)\cdot\varphi_i(t)\,dt \Rightarrow$ ez egy szűrő!

<u>állítás:</u> $\tilde{V}(t)$ (nagy teljesítményű zaj)

$\underline{r} = \underline{x}_k + \underline{V}$

$r_j \longrightarrow V(t)$ - vel korreláltatom

komponenst

az elemi jelek által kifeszített dimenzióban eső zaj elég séges

$\underline{r} = \underline{x}_k + \underline{V} \iff \boxed{r(t) = x_k(t) + V(t)}$ zaj + hasznos jel összege.

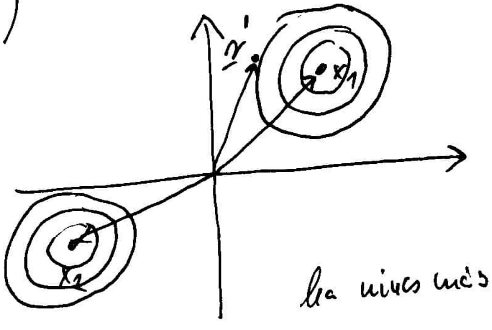
$$P_{\underline{r}}(\underline{y}\,|\,\underline{x}_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^N \cdot \prod_{j=1}^{N} \exp\left(-\frac{y_i - x_{ki}}{N_j}\right)^N$$

valószínűség

N dim nem ∅ Exp értékű Gauss.

y feltéve hogy $\underline{x}_k$-t küldték

(a priori) feltételes sűrűség fvek ezek ismertek



$\underline{r}'$-t veszem a vevőn

ha nincs más infó → MIN Distance döntés optimális

ha van forrás-statisztika akkor más is lehet.

$\boxed{EA.}$ (1)

Hirdelm
2017. 02. 13.

$$r(t) = x_k(t) + v(t)$$

$$\boxed{\underline{r} = \underline{x}_k + \underline{v}} \; ?$$

végtelen dimenziós térből ki kell venni a saját teret. (irreleváncia tétel)

$$v(t) = \sum_{k=1}^{N} v_j \varphi_j(t) + \tilde{v}(t)$$

$$\forall \; E(r_j, \tilde{v}(t)) = \emptyset \rightarrow \text{irreleváncia tétel}$$

$$P_r(\underline{y} \mid x_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot N_0}}\right)^N \exp\left(-\frac{\sum_i^N (y_i - x_{ki})^2}{N_0}\right)$$ ha korrelálatlan → független

feltételes valség, k-üz küldték sűrűség fv.

Zárt alakban leírható: N_0 kell – zaj 1 oldalas telj. sűrűség fv-e

Nem mindig Gauss-zajos a csatorna! ha van interferencia forrás, már nem jó.

Mi van ha nem Gauss-zajos a csatorna? → Semmit se tudunk elvileg :)
→ konkrét megoldás nincs!

Interferencia közelítése Gauss-zajjal (sok forrás esetén) jól közelíthető.

CDMA esetben is ezt használjuk.

Ez egy MODELL. Gauss + Gauss → Gauss

Többutas terjedés: N-LOS: Rayleigh
LOS esetben: Rice
} ezek is Gauss modellekre épülnek

Példák elemzése:

QPSK mod: $x_1(t) = \cos(w_0 t)$ $\quad x_3(t) = \sin(w_0 t)$ $\quad$ 4 elemi jel → 2 bit info / symbol
$x_2(t) = -\cos(w_0 t)$ $\quad x_4(t) = -\sin(w_0 t)$ $\quad$ 2D jeltér!

kell az ONB bázis fv. G-S ortogon.

$$\varphi_1(t) = \tfrac{1}{a} \cdot x_1(t)$$

$$\underbrace{\int_0^T \varphi_1(t)^2 \, dt}_{1} = \frac{1}{a^2} \int_0^T x_1^2(t) \, dt \rightsquigarrow \Rightarrow a^2 = \int x_1^2(t) \, dt \quad \rightsquigarrow \int_0^T \cos^2(w_0 t) \, dt = \left[\frac{1 + \cos 2 w_0 t}{2}\right]_0^T \Rightarrow$$

$$\varphi_1(t) = \frac{x_1(t)}{\int_0^T x_1^2(t) \, dt}$$

(2)

Hirkelm
2017.02.13.

$$= \frac{T}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2w_0 t)}{2w_0}\right]_0^T$$

$\boxed{2 w_0 t = \pi + k\cdot\pi}$ szimbólumidő és frekvencia közt kapcsolatot írok elő!

$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(w_0 t)$ ← ONB

$$\underline{x}_1 = \begin{array}{cc} \left[\sqrt{\frac{T}{2}}\right. ; & \left. 0\right] \\ x_{11} & x_{12} \end{array}$$ ← vektor

$$\underline{x}_2 = \begin{array}{cc} \left[-\sqrt{\frac{T}{2}}\right. ; & \left. 0\right] \\ x_{21} & x_{22} \end{array}$$ ← jelvektor

$x_3(t) = b\cdot\varphi_1(t) + c\cdot\varphi_2(t) \quad / \cdot\varphi_1(t), \int$

$$\int_0^T x_3(t)\cdot\varphi_1(t)\,dt = \int_0^T b\cdot\underbrace{\varphi_1^2(t)}_{1}dt + \int \underbrace{c\cdot\varphi_1(t)\varphi_2(t)}_{\varnothing}dt$$

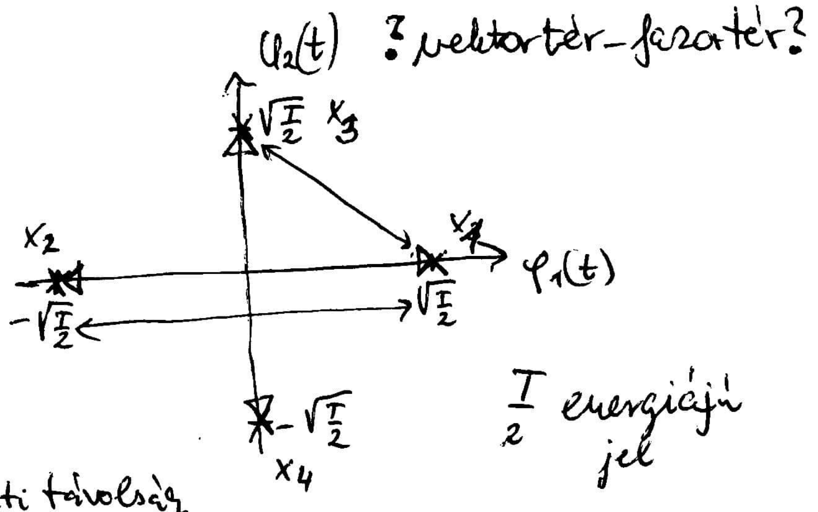
$$\int_0^T x_3(t)\cdot\varphi_1(t)\,dt = b$$

$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\cos(w_0 t)$ ha $b=0$

$*\ \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin w_0 t$

$\underline{x}_3 = \left[0 ; \sqrt{\frac{T}{2}}\right]$

$\underline{x}_4 = \left[0 ; -\sqrt{\frac{T}{2}}\right]$



$\frac{T}{2}$ energiájú jel

vektorok közti távolság

$$\|\underline{x}_2 - \underline{x}_3\|^2 = \underline{\underline{T}}$$

$$\|\underline{x}_1 - \underline{x}_3\|^2 = \int_0^T (x_1(t) - x_3(t))^2 dt$$

$$\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|^2 = \int_0^T (x_1(t) - x_2(t))^2 dt = \underline{\underline{2T}}$$

Hirkelim
2017.02.13

FSK-jel

$m=2$ bináris

$X_1(t)=\cos(\omega_1 t)\ [t\in[0,T)]$ két féle frekijű jel

$X_2(t)=\cos(\omega_2 t)\quad t\in[0,T)$

$\boxed{GS}$ kell a vektortér

$\varphi_1(t) \Leftrightarrow x_1(t)$ ugyanaz, mint az előbb

2D vektortér van!

$\varphi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\cos\omega_1 t \quad \underline{X}_1=\left[\sqrt{\frac{T}{2}};\varnothing\right]$ ~ így mint az előbbi példánál

$x_2(t)=\cancel{a}\ b\cdot\varphi_1(t)+c\cdot\varphi_2(t)\quad /\varphi_1(t)\cdot;\int_0^T$

ω_2

$b=\int_0^T x_2(t)\varphi_1(t)\,dt \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{T}}\int_0^T \cos\omega_2(t)\cdot\cos\omega_1(t)\,dt =$

2-es jel φ_1 irányú vetülete

$$=\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\frac{1}{2}\int_0^T\cos[(\omega_1+\omega_2)t]\,dt+\frac{1}{2}\int_0^T\cos[(\omega_1-\omega_2)t]\,dt\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{2}{T}}\,\frac{1}{2}\cdot\cancel{\left[\frac{\sin(\omega_1+\omega_2)t}{\omega_1+\omega_2}\right]_0^T}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)t}{\omega_1-\omega_2}\right]_0^T$$

elhanyagolják

legyen $\underline{\omega_1>\omega_2}$ // nem mindig kell így legyen

$\underline{\text{és } (\omega_1+\omega_2)T=\pi+n\pi}$

$$\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\omega_1-\omega_2)t}{\omega_1-\omega_2}$$

$\omega_1-\omega_2=\Delta\omega$

löket

$$b=\sqrt{\frac{2}{T}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\Delta\omega T)}{\Delta\omega}=\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\underbrace{\frac{\sin\Delta\omega T}{\Delta\omega T}}_{\frac{\sin(x)}{x}}$$

$$X_2(t)=b\cdot\varphi_1(t)+c\cdot\varphi_2(t)=$$

$$x_2(t)-b\cdot\varphi_1(t)=c\varphi_2(t)$$

$$\cos(\omega_2 t)-\sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\frac{\sin\Delta\omega T}{\Delta\omega T}\cdot\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega_1 t=c\cdot\varphi_2 t\quad /(\ )^2$$

ábrázoljuk inkább!

(4)

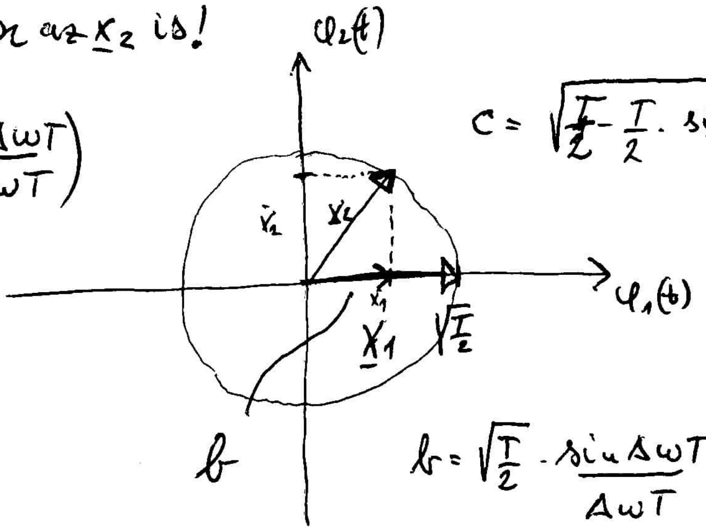
Kivlelen. 2017.02.13

a két jel energiája ugyanaz → csak a frekvencia más

$\sqrt{\frac{T}{2}}$ sugarú körön lesz az $\underline{x}_2$ is!

$$\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|^2 = T\cdot\left(1 - \frac{\sin \Delta\omega T}{\Delta\omega T}\right)$$

távolság



$$c = \sqrt{\frac{T}{2} - \frac{T}{2}\cdot\frac{\sin \Delta\omega T}{\Delta\omega T}}$$

$$b = \sqrt{\frac{T}{2}}\cdot\frac{\sin\Delta\omega T}{\Delta\omega T}$$

$x_1 \perp x_2$ ha $b = \emptyset$

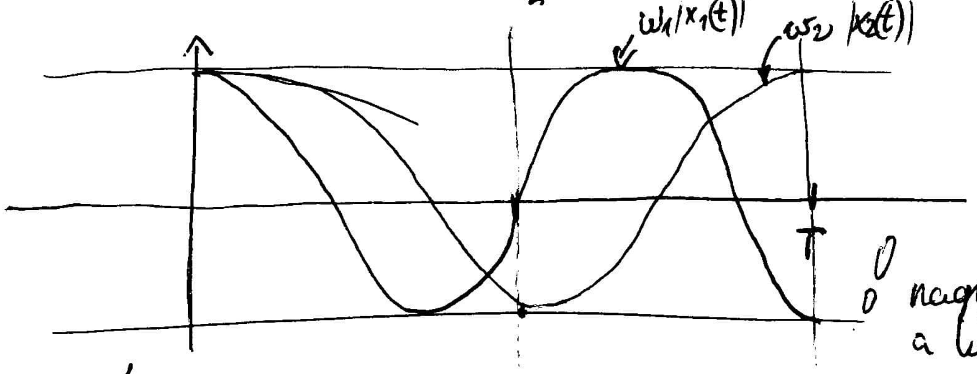
$\rightsquigarrow \boxed{\Delta\omega T = \frac{\pi}{2}} \rightarrow$ legkisebb $\Delta\omega$ ahol a kétjel $\perp$.

FSK a vektortérben olyan mintha $90°$-ra lenne egymástól.

QPSK és FSK a vektortérben ekvivalens! HOPPÁ

1.) $\Delta\omega T = \frac{\pi}{2}$, ez az MSK moduláció (GSM rendszer) GMSK

1 szimbólumidő alatt éppen $\frac{\pi}{2}$ változás jön létre



0 nagy ugrás van! a követhetőnél

$T = \frac{1}{1200}$ s

$\omega_1 = 1800\ \text{Hz}\cdot 2\pi$

$\omega_2 = 2\pi\cdot 1200\ \text{Hz}$

később visszatérünk rá

5

Hihelou 2017.02.13

2.) $\Delta\omega T = 2\pi$ fast F-FSK itt is van ortogonalitás (vektortérben!)

↓

ezt betartom

hiába lesz távol a 2 freki, ugyanolyan lesz a zaj-érzékenység.

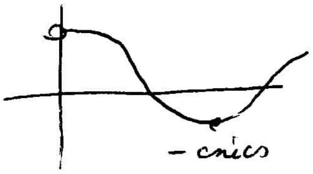
hiába viszem bármilyen távolra a két frekvenciát nem lesz elvileg jobb ~~a~~ a zaj vs. jel moduláció szempontból; persze technikailag könnyebb 1GHz és 1Hz-et megkülönböztetni.

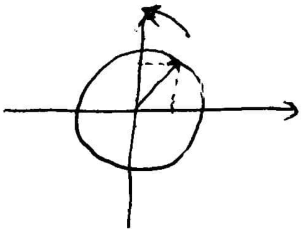
állandó burkolójú jelek jók a torzítás miatt! GSM-ben ezért van szög-moduláció ezért lett freki moduláció, jól tűri a NL torzítást.

Technikai okokból jobb ez sokkal!

3.) $\frac{\sin \Delta\omega T}{\Delta\omega T} = -0.21$

$\Delta\omega T \cong 4,5\,rad$





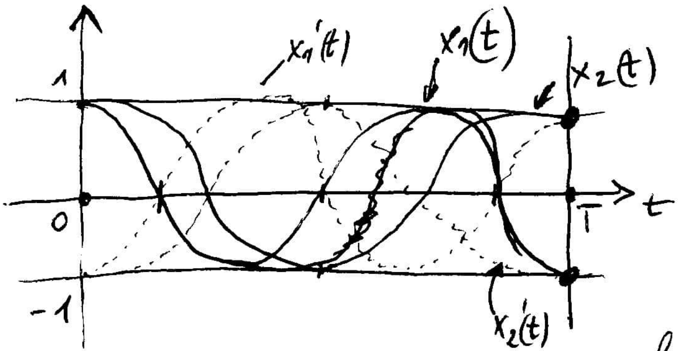
$\|\underline{x}_1 - \underline{x}_2\|^2 = 1,2 \cdot T$

nagyobb távolságot hozok létre

FSK jobb beállításából → legjobb vektor elrendezést kaphatunk!

nem tudom jól megvalósítani a jelet.

MSK, CPM - continuous phase modulation.



használjuk $x_1'(t)$ és $x_2'(t)$-t amik éppen az előzőek inverzei.

4 jelet veszek

logikai „1" → $x_1(t)$ vagy $x_1'(t)$

„0" → $x_2(t)$ vagy $x_2'(t)$

} nincs fázisugrás elvileg

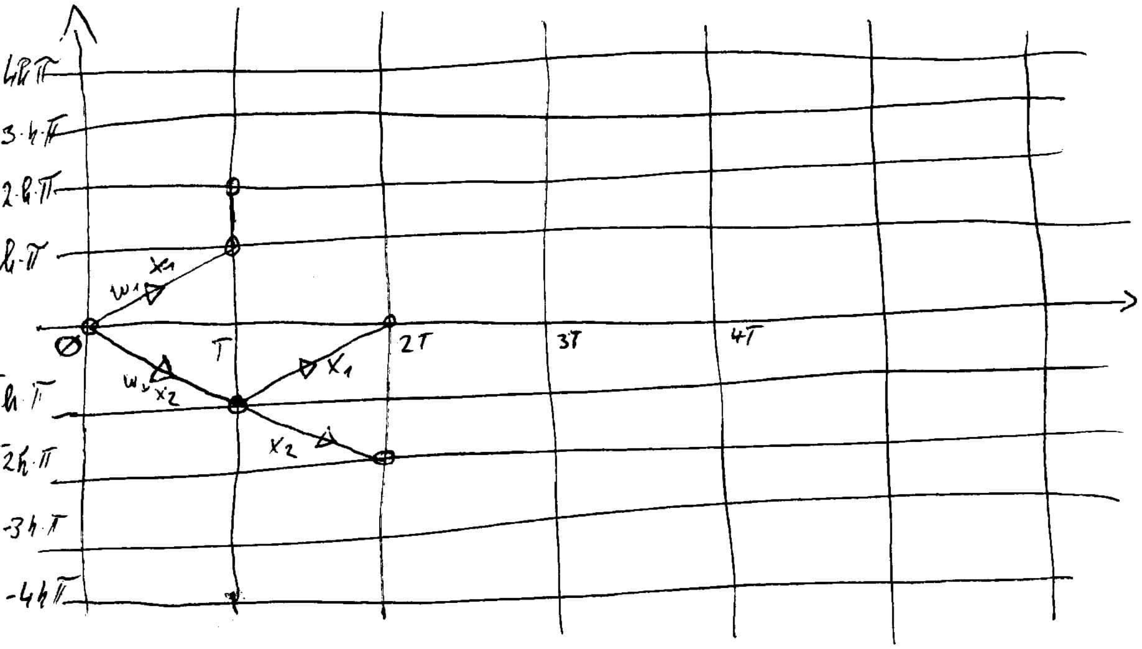
T-nél ugrik a fázis, ha 1→2 következik

GSM moduláció

6

Hirtelen
2017.02.13

fázis-időfv:



$h = \frac{1}{2}$ általában!

vezessük be:

$$\omega_0 = \frac{\overset{1800\,Hz}{\omega_1} + \overset{1200\,Hz}{\omega_2}}{2}$$ vivőfrekv. (mesterséges) $\omega_0 = 2\pi \cdot 1500$ rad/s

$$(\omega_1 - \omega_0)T = \Delta\varphi_1 \rightsquigarrow \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \cdot T = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$ ez nem jó, most van fázisugrás

P1

(1.)

Hirkelen
2017.02.14.

Si ganara

Optimális vevő:

koherens vevő
minden időpillanatban
ismeran az elemi jellelet

$P_{\underline{r}}(y \mid \underline{x}_k) \Rightarrow \underline{r} = \underline{x}_k + \underline{v}$

k. ik üzenet

vett jel (zaj+h. jel)

$$P_{\underline{r}}(y \mid x_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^N \cdot \exp\left(-\sum_{j=1}^{N} \frac{(y_i - x_{ki})^2}{N_0}\right) \qquad (1)$$

$k = 1 \dots M$

M üzenetem

M dimenziós tér

$\{\Pi_k\}$ - apriori eloszlás fv.

minden szimbólumnak van egy apriori valószínűsége

Bayes döntés:

célja, hogy k-t eltalálja

$P_{err}\{\hat{k} \neq k\}$ - szimbólum hiba valószínűség

becslés

bithiba valószínűség ≠ szimbólum hiba valség.

aposteriori valség

apriori valószínűségi súly fv.

$$\hat{k} = \arg\max_k \left(\Pi_k \cdot P_{\underline{r}}(\underline{r} \mid \underline{x}_k)\right)$$ ← minimális hibával járó döntés

$\tilde{r}$ - vett jel   y-térben helyettesítjük $\tilde{r}$-ot

ez elég komoly lenne és bonyolultnyes.

Döntési tartományok:

$$\bigcup_{k=1}^{M} (Y_k) = y$$ teljes üzenettér

+ ortogonálisak!

$$Y_k = \{y : \Pi_k \cdot P_{\underline{r}}(\tilde{r} \mid \underline{x}_k) > \Pi_m \cdot P_{\underline{r}}(\tilde{r} \mid x_M), \ \forall M \neq k\}$$

k-ik döntési tartomány
vesszük a logaritmust!

$$= \{y : \ln \Pi_k P_{\underline{r}}(\tilde{r} \mid \underline{x}_k)) > \ln(\Pi_m P_{\underline{r}}(\tilde{r} \mid x_M)) \ \forall m \neq k\} =$$

$$= \{y : \ln \frac{\Pi_k}{\Pi_m} + \ln\left(\frac{P_{\tilde{r}}(\tilde{r} \mid x_k)}{P_{\tilde{r}}(\tilde{r} \mid \underline{x}_m)}\right) > 0\} \ \forall m \neq k$$

jó hogy kiesik N_0, és egyszerűsödik sokat a számítás (1)

$$Y_k = \{y : \ln\left(\frac{\Pi_k}{\Pi_m}\right) - \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} (y_j - x_{kj})^2 + \frac{1}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} (y_j - x_{mj})^2 > 0\} =$$

megszüntetem a $()^2$ emelést

$$\{y : \ln\left(\frac{\Pi_k}{\Pi_m}\right) - \frac{E_k - E_m}{N_0} + \frac{2}{N_0} \sum_{j=1}^{N} (x_{kj} - x_{mj}) \cdot y_j \gtrless 0\} \ \forall m \neq k$$

← jelek energiája x_k^2

lehet ≠-séget engedni

$$\sum_{j=1}^{k} x_{kj}^2 = E_k$$

nem jelenik meg az y_j^2 → lineáris döntési tartomány!

2.

Kirkelm
2017.02.14.

Lineáris egyenlőtlenség lesz a vége!

N dimenziós hipersík lesz a megoldás, ráadásul hipersíkok határolják a döntési tartományt!

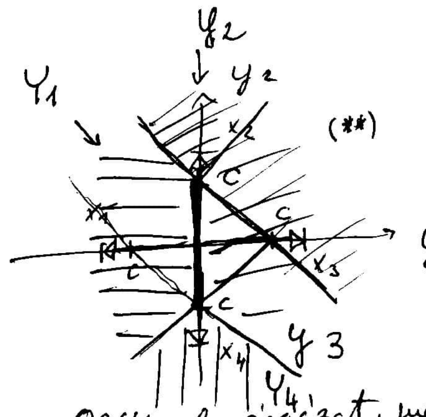
megengedhetem a $\boxed{\geq 0}$ feltételt

Példa a döntési tartomány számítására:

$\underline{X}_1 = [-1;0]$ $\quad \underline{X}_3 = [1,0]$

$\underline{X}_2 = [0,1]$ $\quad \underline{X}_4 = [0;-1]$

} ez a vektortér y-térben



és E_1, E_2, E_3, E_4 jelenergiák azonosak!

$\pi^{(1)} \Rightarrow \pi_2 = \pi_4 \quad \pi^{(2)} \Rightarrow \pi_1 = \pi_3$

apriori valség

és $\pi^{(2)} > \pi^{(1)}$ – a példa kedvéért csak.

ez QPSK de vigyázat, mert nem feltétlenül csak ez lehet a vektortérben

nézzük a döntési tartományokat!

① : $\ln\left(\frac{\pi_k}{\pi_m}\right) + \frac{2}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} (x_{kj} - x_{mj}) \cdot y_j \geq 0 \quad m \neq k$ nézzük meg az ~~el~~ egyenlőséget!

$$\boxed{\ln\left(\frac{\pi_k}{\pi_m}\right) + \frac{2}{N_0} \sum_{j=1}^{N} (x_{kj} - x_{mj}) y_j = 0} \quad m \neq k$$

határfelület k és m közt

a) $k=1, m=2$ $\quad$ x_1, x_2 közt $\qquad X_1$ vs. X_2

mert $\pi^{(2)} > \pi^{(1)}$

$$\ln\left(\frac{\pi^{(2)}}{\pi^{(1)}}\right) + \frac{2}{N_0}(-1) \cdot y_1 + \frac{2}{N_0}(-1) \cdot y_2 =$$

$x_{k_1} = -1$

$$\underbrace{\frac{N_0}{2} \cdot \ln \frac{\pi^{(2)}}{\pi^{(1)}}}_{C} - y_1 - y_2 = 0$$

$\boxed{y_2 = C - y_1}$ egyenes egyenlete (**)

többi esetben → ugyanez lesz

b) $k=1, m=3$

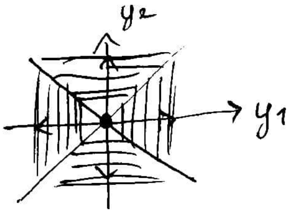
$$C + -y_1 - y_1 = 0$$

és $C = 0$ $\qquad \boxed{-2y_1 = 0}$ függőleges egyenes lesz

mi van ha $C \gtrless 1$ ⇝ az apriori valségek miatt nem a vett jelre döntök.

③

Hirhelm +
2017.02.14.

ha $c=0 \rightarrow$  ez lesz a döntési tartomány

az optimális koherens vevő felépítése:

$$\sum_{j=1}^{N} \underbrace{x_{kj}\, y_j}_{\text{vetület}} \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} x_{kj} \cdot r_j = \int_0^T x_k(t) \cdot r(t)\, dt$$

véges szorzatjelfüggvényt csinálok
szűrök egyet!

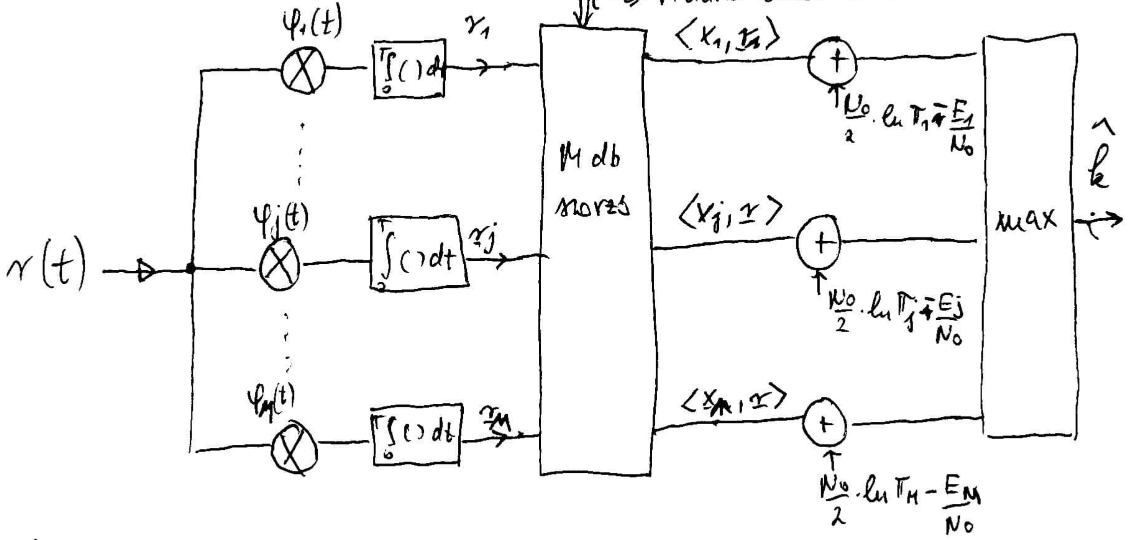
skalárszorzat vektortérben
$\equiv$
korrelációműveletek L_2 térben
$()^2$ integrálható fv-tér

$$\left(\ln \Pi_k - \frac{E_k}{N_0} + \frac{2}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} x_{kj} \cdot r_j \right)$$ maximális legyen!
k-becslése

$$\frac{N_0}{2} \left(\ln \Pi_k - \frac{E_k}{N_0} \right) + \sum_{j=1}^{N} x_{kj}\, r_j$$ ez legyen maximális

↓ integrál

$\{X_k\}$ (összes X_k halmaza) M darab skalárszorzatot csinálok

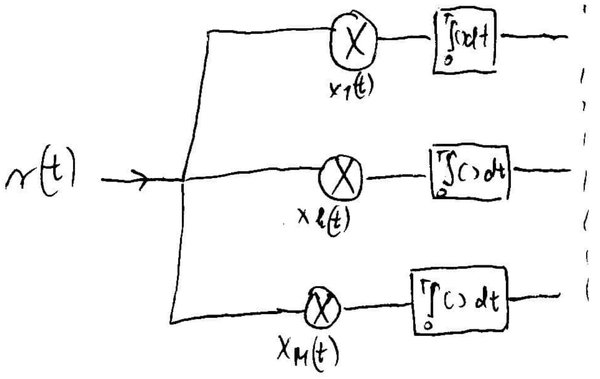


φ_j - kell, N_0 - kell
↳ kb. sohasem tudom mérni

mikor melyik jó?

$\Pi_k = \Pi = \frac{1}{M}$ ha az apriori valószínűségek =-ek
akkor nem kell az N_0
⊕ és az energiák is egyformák!

Másképp!



ugyanaz
·||·

Hírközlés +
2017. 02. 14.

Hibavalószínűség számítása:

pontosan számolni ritkán lehet, általában becslések elérhetők.

P_{e_k} : feltételes hibavalószínűség!

nincs benne a döntési tart.

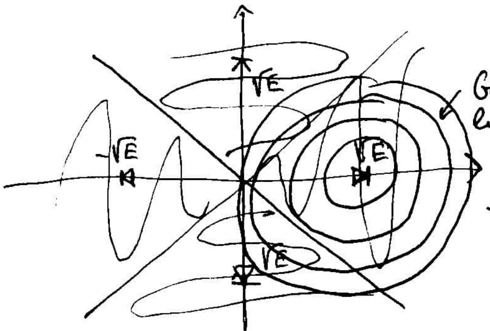
$$P_{e_k} = P_r(r \notin Y_k \mid \underline{x}_k) = 1 - P_{\underline{r}}(\underline{r} \in Y_k \mid \underline{x}_k)$$

$$\boxed{\int_{\underline{y} \in Y_k} P_{\underline{r}}(\underline{y} \mid \underline{x}_k)\, d\underline{y}}$$

van egy N dim Gauss változós sűrűségfv. ki kell számolni, ajjaj!

$y \in Y_k$ döntési tartomány

QPSK példa



$E_k = E$ $\quad \pi_k = \frac{1}{M}$

Gauss hegy: ● - döntési tartományok! szintvonalai

→ integrálom a döntési tartományon kívüli részt → hibaarány.

← k-ik üzenetek küldettek

$$P_r(y \mid x_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot N_0}}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{(y_1 - x_{k_1})^2 + (y_2 - x_{k_2})^2}{N_0}\right)$$

origót áthelyezem $\sqrt{E}$ pontra

$$P(y \mid x_k) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} N_0}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{y_2^2 + y_1^2}{N_0}\right)$$

→ koordináta trafót csinálok R, Θ

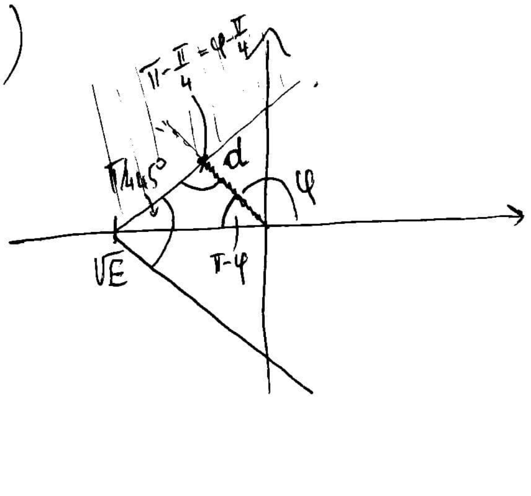
$R, \Theta \sim (Y_1 \quad Y_2)$ tengelyeket átranszformálom

val. változók r, ϑ

y_1, y_2

$$y_1 = r \cdot \cos\vartheta \qquad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$$
$$y_2 = r \cdot \sin\vartheta \qquad \tan\vartheta = \frac{y_2}{y_1}$$

$$P(r, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi N_0}}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right) \cdot \underset{\text{Jacobi det}}{r} = \frac{r}{\pi \cdot N_0} \cdot \underbrace{\exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)}_{\vartheta\text{-tól nem függ}}$$



$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{d}{\sqrt{E}} \qquad d = \sqrt{E} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$$

szimmetria miatt

$$\frac{P_e}{2} = \boxed{\int_d^{\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{r}{\pi N_0} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right) d\varphi\, dr}$$

→ ezt kell kiértékelni

EA 1.

Hirhelm
2017.02.21.

Hibavalószínűség számítás:

$$P_{efr} = P_r(\underline{r} \notin Y_k \mid \underline{x}_k) = \int_{y \in \bar{Y}_k} P_r(y \mid \underline{x}_k)\, dy$$

vagy $\in \bar{Y}_k$

több dimenziós integrál

vel. sür. fv. integrálja

nem a k-ik üzenet

$Y_k \cup \bar{Y}_k = Y$ teljes tér

$$P_e = \sum_{k=1}^{M} \Pi_k \cdot P_{ek} \quad \text{legyen } \boxed{\Pi_k = \frac{1}{M}}$$

apriori valség egyenlő
mert minden szimbólum valsége egyenlő

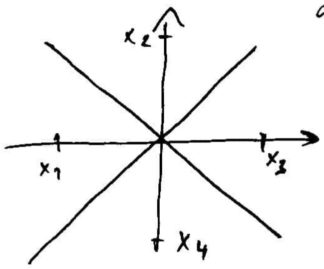
$$\bar{Y}_k = \{ y : \ln[P_{\underline{r}}(y \mid \underline{x}_m)] > \ln[P_{\underline{r}}(y \mid \underline{x}_k)],\ k \neq m \}$$

döntési tartomány inverze

döntési tartomány

döntési tartomány $\bar{Y}_1 = Y_2 \cup Y_3 \cup Y_4$

legalább 1 ilyen van



$$y : \ln\left[\frac{P_{\underline{r}}(y \mid \underline{x}_m)}{P_{\underline{r}}(y \mid \underline{x}_k)}\right] > 0$$

és legalább 1 darab $\underline{m}$ van!
feltéve hogy $\underline{x}_k$ küldték

$$\bar{Y}_k = \bigcup_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} \left\{ y : \ln\left[\frac{P_r(y \mid \underline{x}_m)}{P_r(y \mid \underline{x}_k)}\right] > 0 \right\}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

felső becslés ha elhagyom $P(A \cap B)$-t
union upper bound

$$P_{err_k}(\underline{r} \in \bar{Y}_k \mid \underline{x}_k) \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} P_{\underline{r}}\left(\ln \frac{P_{\underline{r}}(\underline{r} \mid \underline{x}_m)}{P_r(\underline{r} \mid \underline{x}_k)} > 0 \,\middle|\, \underline{x}_k\right)$$

x_k küldték

pairwise prob. err.

esemény valség
$\underline{r}$ vektor nincs benne a k-ik döntési tart.
de a k-t küldték

$$= \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} P_e(k \to m)$$

kétéves világ

ez egy páros verseny
csak m és k versenyez!

k-helyett m-re döntök
ha csak két elem van! $\underline{k}$ és $\underline{m}$

QPSK eset: az egyes döntési tartományok felett integrálás páronként. Jó a felső korlát.

EA 2.

Hirkelun
2017.02.21.

Uniós korlát baja, hogy lehet, hogy túl nagy (akár 1)

$$P_e(k \to m) = \Pr\left(\frac{2}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} (x_{kj} - x_{mj}) y_j < \frac{E_k - E_m}{N_0} \;\middle|\; \underline{x}_k \right)$$

kimenő jel, zajvektor, jelek vetülete, jelenergiák

$r_j = y_j = \underline{x}_{kj} + \underline{v}_j$ ← val. vált. Gauss eloszlású

ezért a summa is, Gauss-ok lineáris kombinációja → Gauss

$$\eta = \frac{2}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} (x_{kj} - x_{mj})(x_{kj} + v_j)$$

$$\mu = \mathbb{E}(\eta) = \frac{2}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} (x_{kj} - x_{mj}) x_{kj}$$

v_j szórásnégyzete! ismerem a val. változót!

$$\sigma_\eta^2 = \mathbb{E}\left[(\eta - \mathbb{E}(\eta))^2 \right] = \frac{4}{N_0^2} \cdot \sum (x_{kj} - x_{mj})^2 \cdot \frac{N_0}{2} \to \frac{2}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^{N} (x_{kj} - x_{mj})^2$$

σ_η^2, $\mathbb{E}(\eta) = \mu$ Gauss

kü

$$P_e(k \to m) = \Pr\left(\eta < \frac{E_k - E_m}{N_0} \right) = \int_{-\infty}^{\frac{E_k - E_m}{N_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \cdot \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma_\eta^2} \right) dz$$

$$Q(x) : \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) dz$$

hibaintegrál fv

Gauss-fv ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) Z feletti része

előjelcsere van! ezt kell kiindulni

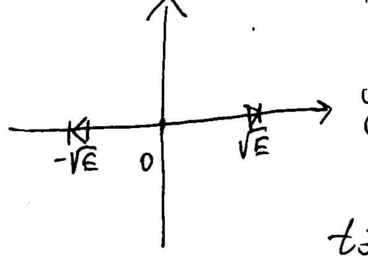
$$P_e(k \to m) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma_\eta}\left(\frac{E_k - E_m}{N_0} - \mu \right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2} \right) dz = Q\left[\frac{1}{\sigma_\eta} \left(\frac{E_m - E_k}{N_0} + \mu \right) \right] =$$

$$= Q\left(\frac{\|\underline{x}_k - \underline{x}_m\|}{\sqrt{2 N_0}} \right)$$

a páronkénti hiba valószínűség csak az euklideszi térbeli távolságtól függ!

Példák:

1) BPSK



$\|x_k - x_m\| = 2 \cdot \sqrt{E}$

$\frac{E}{N_0} = SNR$

$$Q\left(\frac{2 \cdot \sqrt{E}}{\sqrt{2} \cdot N_0} \right) = Q\left(\sqrt{2} \cdot \frac{E}{N_0} \right) =$$

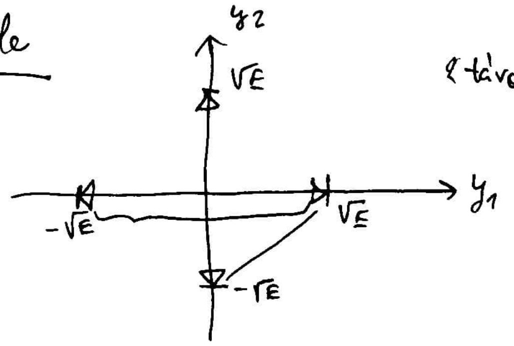
$$Q\left(\sqrt{2 \frac{E}{N_0}} \right)$$

tökéletes hibaarány

EA 3.

Kirkelen
2017.02.21.

2) QPSK példa



ε távolság: $\sqrt{2E}$, $2\cdot\sqrt{E}$

hibavszg felső becslése

elhagyható a két sík integrál miatt

$$P_{err} \leq 2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

megj. BPSK szimbólumidő $T = T_{bit}$

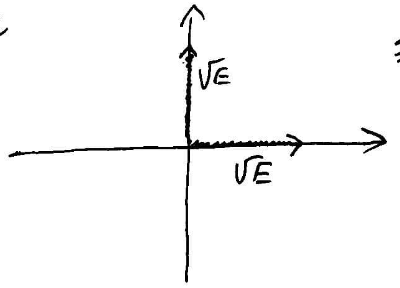
QPSK $T = 2T_{bit}$

ha $\frac{E_b}{N_0}$-ra vonatkoztatunk → BPSK és QPSK ugyanaz! Energiában...

MSK jel:

2 féle

$N=2$, $M=2$



$$P_{err} = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \text{ !}$$

ismét!

Közelítő számítások:

m-1 darab távolság van.

$$P_{ek} \leq \sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{M} P_e(k\to m) = \sum_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{M} Q\left(\frac{\|x_k - x_m\|}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right)$$

k-ik hibavalószínűség becslése

ha meghatározom a legkisebb távolságot → ott felső becslést adhatok a hibára

$$\ldots \leq (M-1)\, Q\left(\frac{\|x_k - x_m\|}{\sqrt{2}N_0}\right)$$

$$(*)\quad \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\cdot x} \leq Q(x) \leq \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\cdot x}$$

pl BPSK $x: \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{E}{N_0}}$

$$* \quad Q(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\cdot x}$$ közelítés ha x nagy!

$$P_e = Q\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

2 féle E, E' (energia)

$$P_e' = Q\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{E'}{N_0}}\right)$$

$$\boxed{\frac{P_e'}{P_e} = \frac{Q\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{E'}{N_0}}\right)}{Q\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{E}{E'}}\exp\left(-\frac{E'-E}{N_0}\right)}$$

$\frac{E}{N_0} = 10\,dB$ $\quad \frac{E}{N_0} = 13\,dB$ $\quad \frac{P_e'}{P_e} = ?$ $\to \frac{1}{\sqrt{2}}10^{-4}$ javulás!

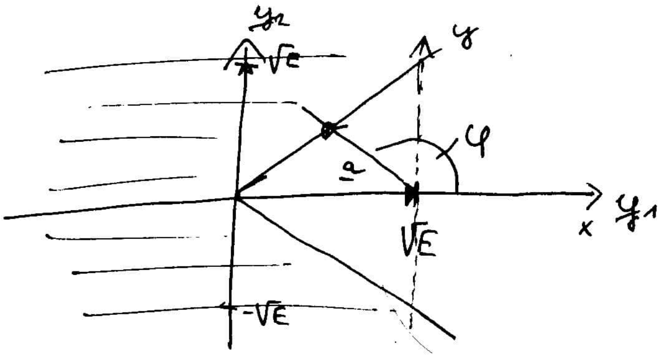
A jól SNR esetén a minimális euklid. távolságok dominálnak → jól jellemezhető vele a teljesítm...

EA 4.

Mikelm

2017.02.21.

MQPSK, MQAM:



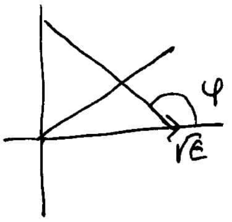
$$P(x,y) = \frac{1}{\pi \cdot N_0} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{N_0}\right)$$

$$P(r,\varphi) \Rightarrow \frac{1}{\pi \cdot N_0} \cdot r \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{\pi N_0} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}}_{2\times \text{ ezen}} \int_{a}^{\infty} r \cdot \exp\left(-r^2 \cdot \frac{1}{N_0}\right) dr\, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[-\exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)\right]_a^{\infty} d\varphi$$

45°-os φ esetén van metszet!

mennyi lesz, $\underline{a}$?



$$a = \sqrt{E} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$P_e = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi} \exp\left(-\frac{E}{N_0} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}\right) d\varphi$$

ha SNR = 0 $\rightarrow \frac{M-1}{M}$

a sík 3/4-ét integrálom

egyenletes eloszlással

$\frac{1}{4}$ jó $\frac{3}{4}$ rossz.

5. EA ①

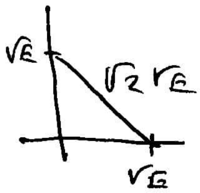
Hirhelm
2017.02.27.

①

QPSK, 4-PSK $\qquad Q\left(\frac{\|x_k - x_m\|}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right)$

$$P_e < \sum_{k}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{M} P_e(k\to m) \quad \rightsquigarrow \quad P_e \le 2\cdot Q\left(\frac{\sqrt{2\cdot E}}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right) = 2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

páros hiba $\qquad$ QPSK eset



E: itt szimbólum energia

E_b itt $\frac{E}{2}$

ha T_b idő a referencia $\qquad$ 1 szimbólumidő (2bit)

$$P_e \lessapprox 2\cdot Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = 2\cdot Q\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

QPSK: 2 ortogonális BPSK
ugyanaz jön ki, mint BPSK esetben.

MSK-jel:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$ ugyanaz.

Közelítő számítások:

$$P_e = \sum_{k=1}^{M} \pi_k \cdot P_{e_k} \le \sum_{k=1}^{M}\pi_k \cdot \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{M} P_e(k\to m) = \sum_{k=1}^{M}\pi_k \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{M} Q\left(\frac{\|x_k - x_m\|}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right)$$

apriori val. séggel súlyozott

ennek felső becslése a legkisebb euklideszi távolságot!

legkisebb távolságokat

$$\le \sum_{k=1}^{M}\pi_k \cdot (M-1)\cdot Q\left(\frac{\|x_m - x_k\|_{min}}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right) = (M-1)\cdot Q\left(\frac{\|x_m - x_k\|_{min}}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right)$$

②

$$P_e \le \sum_{k=1}^{M}\pi_k \cdot \sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{M} P_e(k\to m) \simeq \sum_{k=1}\pi_k \cdot a_{k_{min}} \cdot \underbrace{Q\left(\frac{\|x_k - x_m\|_{min}}{\sqrt{2}\, N_0}\right)}_{\text{konstans lesz}} =$$

nézzük csak a legközelebbiket a szomszédosakat k-hoz képest

konstans lesz mert a min. kell!
kihozható a Σ elé!

súlyozott hibaarány lesz

$$= Q\left(\frac{\|x_k - x_m\|_{min}}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right)\underbrace{\sum_{k=1}^{M}\pi_k\cdot a_{k_{min}}}_{K_{min}} = K_{min}\cdot Q\left(\frac{\|x_k - x_m\|_{min}}{\sqrt{2}\, N_0}\right)$$

ez egy várható érték

20 perc

5. EA 2

Glickelm
2017.02.27.

$$Q(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\underset{=1}{\sigma}} \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} dx \qquad \boxed{erfc(x) = 2\cdot Q\left(\sqrt{2}\cdot x\right)}$$

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} \leqslant Q(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$Q(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}\cdot e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

25 perc

Kódolt moduláció

...cél a minimális euklideszi távolság növelése, ezáltal a hibaarány csökkentése...

$\{\xi_{k_i}\}$ — szimbólum, üzenet index, időrész

T idő a szimbólum idő

nem egy időrészben van csak értéke a fv-eknek

$\{\xi_{k_i'}\}$ -> ez egy másik szimbólum sorozat -> ez egy másik időfv.

30 perc

$S(t,\{\xi_{k_i}\})$; $S'(t,\{\xi_{k_i'}\})$ két különböző modulált jel.

$$d_{min} = \min_{k_i \neq k_i'} \int_{-\infty}^{\infty} \left(s(t,\{\xi_{k_i}\}) - s'(t,\{\xi_{k_i'}\})\right)^2 dt$$

34 p.

euklideszi távolság minimuma -> legalább van 1 olyan hely, ahol különböznek!

$k_i = k_i'$ $i<0$

$k_i \neq k_i'$ ha $i=0$

$k_i \mp k_i'$ ha $i>0$

$$P_e \simeq K_{min}\cdot Q\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2}\cdot N_0}\right)$$

min. táv. pontok száma(?) értéke

egyetlen időrészre korlátozott jel esetére is igaz a fenti képlet

„0" „1" „2" „3"

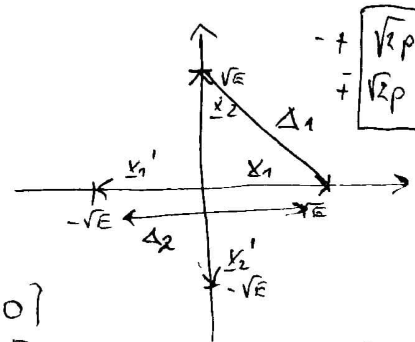
0 T 2T 3T 4T

$x_1(t)$
⋮
$x_M(t)$

Folytonos fázisú MSK jel:

T-re korlátozott elemi jelek

1 bitnyi információ 4 jellel



$\pm\sqrt{2P}\cos(\omega_1(t))$
$\pm\sqrt{2P}\cos(\omega_2 t)$ elemi jelek

van a memória a modulátorban.

$x_1' = [-\sqrt{E}, 0]$

$x_1 = [\sqrt{E}, 0]$

$x_2' = [0, -\sqrt{E}]$

$x_2 = [0, \sqrt{E}]$

+ kellene a folytonos fázis!

"1" "0" érték

↳ $x_1(t)$ után csak $x_1'(t)$ vagy $x_2'(t)$ jöhet csak

$x_2(t)$ után $x_1(t)$ vagy $x_2(t)$ lehet csak

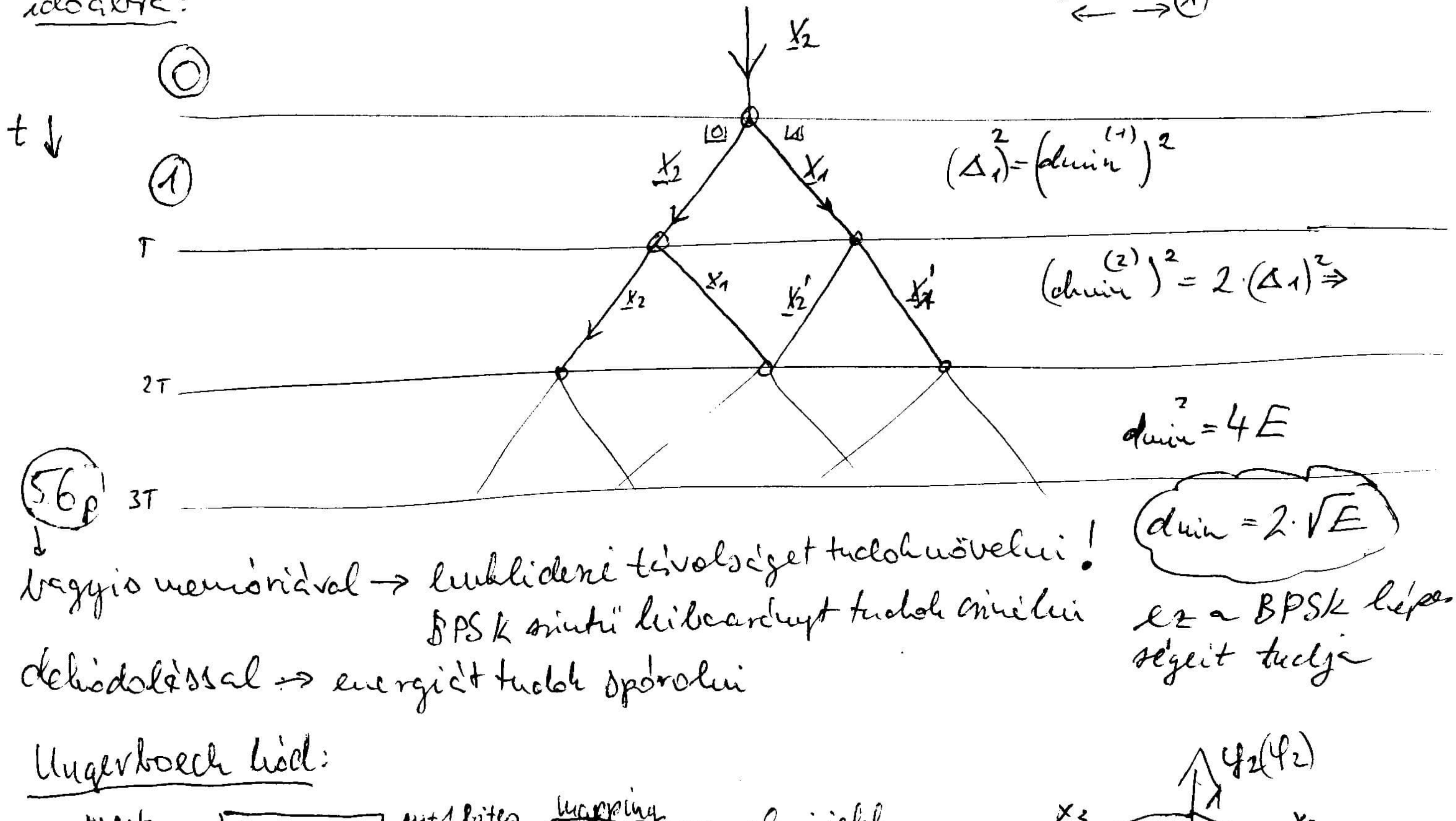
$x_1'(t)$ után $x_1(t)$ vagy $x_2(t)$

$x_2'(t)$ után $x_1'(t)$ vagy $x_2'(t)$

$\Delta_1 = \sqrt{2E}$
$\Delta_2 = 2\cdot\sqrt{E}$ } két jel távolság!

49.p.
időábra:

0 érték ←→ 1



$(\Delta_1)^2 = (d_{min}^{(1)})^2$

$(d_{min}^{(2)})^2 = 2\cdot(\Delta_1)^2 \Rightarrow$

$d_{min}^2 = 4E$

$d_{min} = 2\cdot\sqrt{E}$

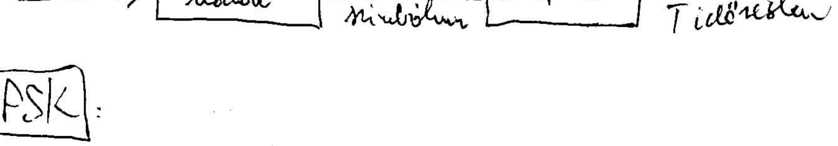
ez a BPSK képességeit tudja

56p

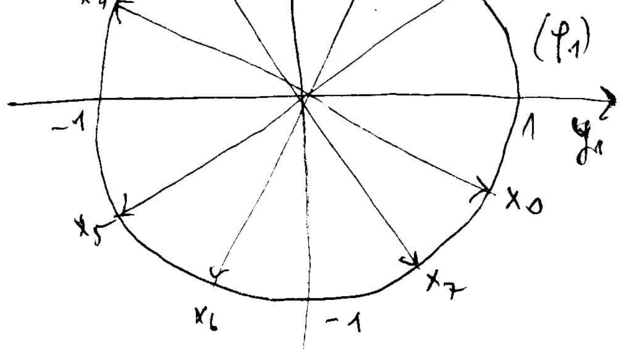
Vagyis memóriával → euklideszi távolságot tudok növelni!
BPSK szintű hibaarányt tudok elérni

kódolással → energiát tudok spórolni

Ungerboeck kód:



4PSK:



5EA 4

Hétfő
2017.02.27.

Ungerboeck-kód:

4PSK:

csoportosítsuk a jeleket

$\underbrace{x_0, x_4}_{c_0}, \underbrace{x_2, x_6}_{c_2}$ 3 bs csoport

$\underbrace{x_1, x_5}_{c_1}, \underbrace{x_3, x_7}_{c_3}$ 3 bs csoport

b_1 csoportban: $\Delta_1 = \sqrt{2}$ (QPSK)

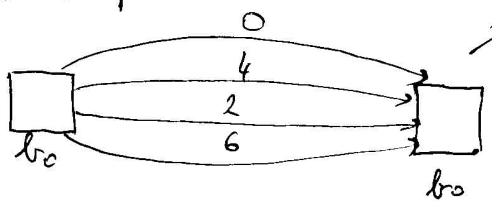
c_0-ban: $\Delta_2 = 2$

$\Delta_0 = 0,765$ $\left(2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

három távolság.

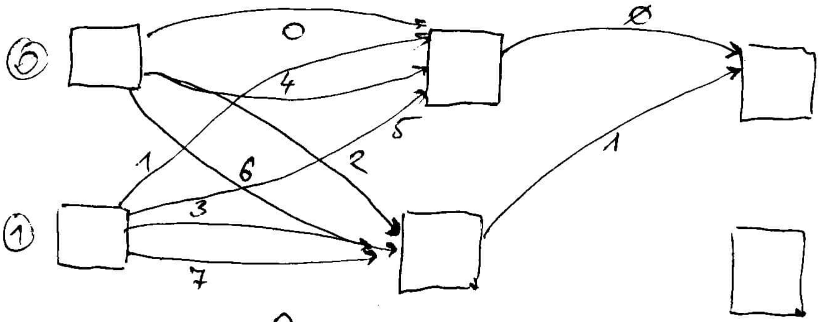
① konvolúciós kódolóban: 1 állapot van

a) "nincs" állapot



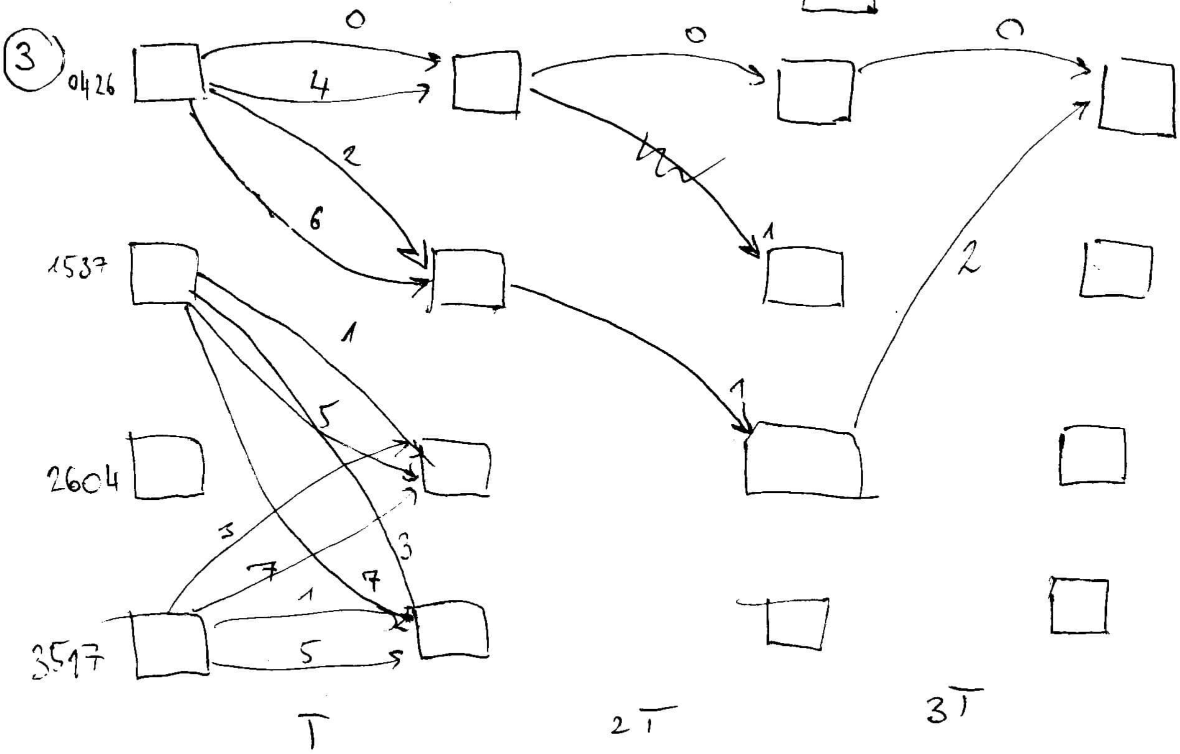
$\boxed{d_{min} = \sqrt{2}}$

: párhuzamos átmeneteket nem tudom kiszűrni

② 

$\boxed{d_{min}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_0^2}$

~~dmin~~

③ 

$d_{min}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_1^2 + \Delta_0^2 \simeq 2,1$

ezzel nyerek 3dB-t kódolással!

$\boxed{6.EA}$ 1.

Kiskelen
2017.02.28

Kódolás lényege:

- jel energia legyen változatlan
- szimbólumidő változatlan
- ez ~~nem~~ hibajavító kódolás!!
- csak komplexitást növelek

} ugyanakkora az adatsebesség!

4 állapotnál, ha vannak párhuzamos átmenetek → $d_{min} = 2$

Az optimális nem koherens vevő: → elemi jeleket minden pillanatban ismerek

$\{\xi_{k_i}\}$: szimbólum sorozat, M üzenet van, $x_k(t) \to x(t - i\cdot T)$ (szimbólumidővel eltolt jel), $[0, T)$ véges tartójú jeleket alkalmazunk.

idősés

$$\boxed{X_k(t) = \underbrace{z_k(t)}_{\text{véges tartójú jel}} \cdot \sqrt{2} \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{vivő}} \quad k=1 \dots m} \quad \text{alapsávi jelkinlet}$$

$-\{z_k(t)\} \Rightarrow \{\varphi_j(t)\}$ teljes ortonormált bázis → minden $z_k(t)$-t le lehet írni $\varphi_j(t)$-vel

$$M \geq N$$

$$z_k(t) = \sum_{i=1}^{N} z_{k_j} \cdot \varphi_j(t) \qquad z_{k_j} = \int_0^T z_k(t) \cdot \varphi_j(t)\, dt \qquad \text{Fourier-sor!}$$

---

adóban ismerem a fázist, vevőben a vivőfázisát nem tudom

$$r(t) = \sqrt{2} \cdot z_k(t) \cdot \cos(\omega_0 t - \Theta) + V(t) \qquad f_\Theta(\varsigma) = \frac{1}{2\pi} \quad \varsigma \in [0, 2\pi)$$

vett jel ↓ (Θ: teljesen ismeretlen)

$$r(t) = \sqrt{2} \cdot z_k(t) \cdot \cos(\Theta) \cdot \cos(\omega_0 t) + \sqrt{2} \cdot z_k(t) \cdot \sin(\Theta) \cdot \sin(\omega_0 t) + V(t)$$

Új jeltér kell, ONB most nincs vivő

$$\Psi_{c_j}(t) = \sqrt{2} \cdot \varphi_j(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \text{(alapsávi jel)}$$

$$\int_0^T \Psi_{c\,j}(t) \cdot \Psi_{c\,k}(t)\, dt = \int_0^T \varphi_j(t)\, \varphi_k(t) \cdot \cos^2(\omega_0 t)\, dt$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega_0 t)\, dt}{2} =$$

$$\Psi_{s_j}(t) = \sqrt{2} \cdot \varphi_j(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

ha ω_0 nagy akkor

Ψ_s és Ψ_c ortonormált bázist alkot

$$\int_0^T \underbrace{\text{∿∿∿}}_{\text{gyors}} \cdot \underbrace{\overline{}}_{\text{lassú}}\, dt = \emptyset$$

Hideghéti
2017.02.28.

alapsávi jel bázis nélküle

$\underline{X}_l =$

$$x_l(t) = \sqrt{2} \cdot \sum_{j=1}^{N} z_{lj} \cdot \varphi_j(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

alapsávban van! — vivősávban van

$$\underline{X}_l = \{ \underset{x_{l1}}{z_{l1}} \ldots \underset{x_{ln}}{z_{ln}} \} \qquad x_{lj} = z_{lj} \quad *$$

2N dimenziós lesz a jeltér → több zaj kerül a jeltérbe!

$$r(t) = \underline{r} \to [r_c, r_j] \qquad r_{c,j} \Rightarrow \mathbb{E}(\cdot) = 0$$
$$\mathbb{E}(r_{c,j}^2) = \frac{N_0}{2}$$

Az elemi jelek ortogonálisak ma már! alapsávi jelek.

de ez nem szükséges az optimális vevőhöz.

$$r(t) = \sqrt{2} \cdot z_l \cdot \cos(\omega_0 t - \Theta) = \sqrt{2} \cdot z_l(t) \cdot \cos(\Theta) \cos(\omega_0 t) + \sqrt{2} \cdot z_l(t) \cdot \sin(\Theta) \sin(\omega_0 t) =$$

$$= \cos\Theta \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{N} z_{lj}\, \varphi_j(t)}_{z_l(t)} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_0 t) + \sqrt{2} \cdot \sin\Theta \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{N} z_{lj}\, \varphi_j t}_{z_l(t)} \sin(\omega_0 t) =$$

$$= \cos(\Theta) \cdot \sum_{j=1}^{N} z_{lj}\, \Psi_{cj}(t) + \sin(\Theta) \sum_{j=1}^{N} z_{lj} \cdot \Psi_{sj}(t)$$

független additív zaj lesz

$$\underline{r} = [r_c, r_s] = [r_{c1} \ldots r_{cN}, r_{s1} \ldots r_{sN}] = [\underbrace{\cos(\Theta)\, \underset{\underset{z_{lj}!}{\parallel}}{x_{lj1}} + r_{c1}}_{r_{c1}} \ldots, \underbrace{\sin(\Theta)\, x_{l1} + r_{s1j}}_{r_{s1}} \ldots] =$$

T: elégséges csak a jeltér statisztikáit ismerni, és nem mindent.

$$P_{\underline{r}}(y_c, y_s \mid \underline{X}_l, \Theta) = \left(\sqrt{\frac{1}{\pi \cdot N_0}}\right)^{2N} \prod_{j=1}^{N} \exp\left(- \frac{(y_{cj} - \cos\Theta \cdot x_{lj})^2 + (y_{sj} - \sin\Theta\, x_{lj})^2}{N_0}\right) =$$

2 feltétel van! — ismernem kellene Θ-t de nem ismerem

$$= \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N} \cdot \prod_{j=1}^{N} \exp\left(- \frac{x_{lj}^2}{N_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{y_{cj}^2 + y_{sj}^2}{N_0}\right) \cdot \exp\left(2\, \frac{\overbrace{y_{cj}\, x_{lj}}^{\langle y_c, x_l \rangle} \cos(\Theta) + \overbrace{y_{sj}\, x_{lj}}^{\langle y_s, x_l \rangle} \sin(\Theta)}{N_0}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi \cdot N_0}\right)^{N} \cdot \prod_{j=1}^{N} \exp\left(- \frac{E_l}{N_0}\right) \cdot \exp\left(\frac{\|y\|^2}{N_0}\right) \cdot \exp\left(2 \cdot \frac{\langle y_c, x_l \rangle \cos(\Theta) + \langle y_s, x_l \rangle \sin(\Theta)}{N_0}\right)$$

$**$

6. EA. 3

Hirkeln
2017.02.28.

$P_{\underline{r}}(y_c, y_s | x_\ell) = ?$ Teljes valószínűség tételével $y = \tilde{r}$

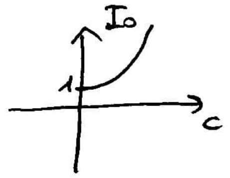
Θ-tól kell megszabadulni $P_{x}(x) = P(x|a)\,P(a)$

feladat: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(c\cdot\cos(\vartheta))\,d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(c\cdot\cos(\vartheta-\Theta_0)) = I_0(c)$ monoton növő fv.

dióda átlagos árama

Bessel-fv
0. rendű módosított

$I_0(x) \cong \left(1+\frac{1}{8x}\right) e^{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot x}$



$a = 2\cdot\frac{\langle y_c, \underline{x}_\ell\rangle}{N_0}$

$b = 2\cdot\frac{\langle y_s, \underline{x}_\ell\rangle}{N_0}$

(**) szinlet

$\exp(a\cdot\cos\vartheta + b\cdot\sin\vartheta) = \exp\left(\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos(\vartheta-\Theta_0)\right)$ $\Theta_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(a\cdot\cos\vartheta + b\cdot\sin\vartheta)\,d\vartheta = I_0\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)$

$P_{\underline{r}}(y|x_\ell) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N}\cdot \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{N_0}\right)\cdot \exp\left(-\frac{E_\ell}{N_0}\right)\cdot I_0\left(2\frac{\varrho_\ell}{N_0}\right)$

ismertek

$\varrho_\ell = \sqrt{\langle y_c, \underline{x}_\ell\rangle^2 + \langle y_s, \underline{x}_\ell\rangle^2}$

Bayes-döntés

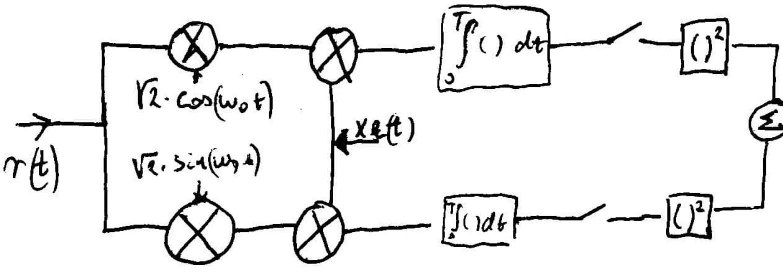
$\Pi_\ell \cdot \exp\left(-\frac{E_\ell}{N_0}\right)\cdot I_0(2\varrho_\ell/N_0) > \Pi_m \cdot \exp\left(-\frac{E_m}{N_0}\right)\cdot I_0(2\varrho_m/N_0)$ $\forall\, m \neq \ell$ esetén

ha ez hb. esélytelen $\to$ hagyjuk a fenébe!

ha $\Pi_\ell = \frac{1}{M}$ (minden valség egyforma) ✓

$E_m = E_\ell = E$ (minden energia egyforma) ✓

és mivel I_0 monoton növő $\to$ ha $\boxed{\varrho_\ell > \varrho_m}$ $\to$ akkor ℓ-re döntök!
$\forall m \neq \ell$



a $(\,)^2$ és a Σ miatt eltűnik a Θ, jelszintet mérek

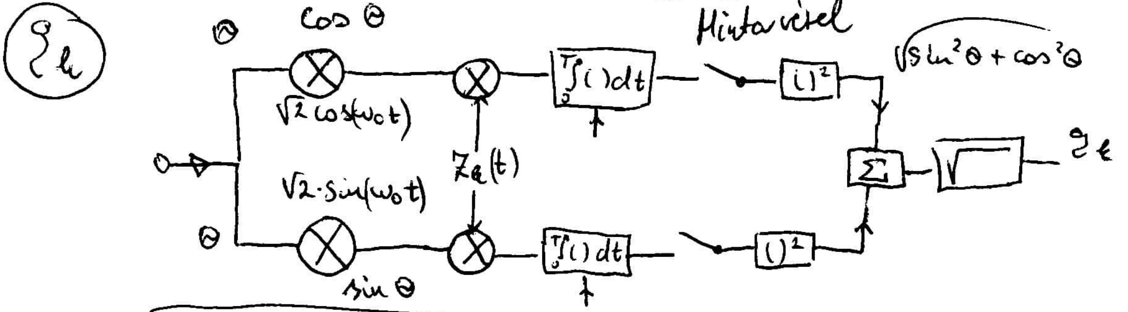
ez az optimális vevő a ϱ_ℓ-tadja

de csak akkor igaz ha Θ-ról semmit sem tudok!

F.A ①

Hirkelun 2017.03.07

Nem koherens optimális vevő



$$\xi_k = \sqrt{\langle \underline{r}_{\cos}, \underline{z}_k \rangle^2 + \langle \underline{r}_{\sin}, \underline{x}_k \rangle^2}$$
($\underline{x}_k$ written above $\underline{z}_k$)

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{N} x_{kj} \Psi_{cj} \qquad \Psi_{cj} = \sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t)\,\varphi_j(t)$$
(psi)

$$\Psi_{sj} = \sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0 t)\,\varphi_j(t)$$

vivőszóbeli leírás
2N dimenziós
ONB

$$\langle r_c, \underline{x}_k \rangle = \int_0^T r_c(t)\, x_k(t)\, dt = \int_0^T \left(\sum_{j=1}^{N} r_{cj}\cdot \Psi_{cj}(t)\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_{ki}\Psi_{ci}\right) dt =$$

$r_c(t)$: cos-vetületek a vett jelnek

$$= \int_0^T \left[\sum_{j=1}^{N} r_{cj}\Psi_{cj}(t) + r_{sj}\cdot\Psi_{sj}(t)\right]\cdot\left(\sum_{i=1}^{N} x_{ki}\Psi_{ci}(t)\right) dt =$$

$$\int_0^T r(t)\cdot\sqrt{2}\cdot z_k(t)\cdot\cos(\omega_0 t)\, dt$$

$$\langle \underline{r}_s, \underline{x}_k \rangle = \int_0^T r_s(t)\cdot x_k(t)\, dt = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\underline{r}_s\cdot \underline{x}_{kj}}_{\substack{\text{vektor}\\ \text{skalár szorzat}}} = \sum_{j=1}^{N} \overbrace{r_{sj}\,\Psi_{sj}(t)}^{r_s(t)} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} x_{ki}\Psi_{si}(t)}_{} =$$

behelyettesítem ezt a fenti

$$= \int_0^T r(t)\sqrt{2}\cdot z_k(t)\cdot\sin(\omega_0 t)\, dt = \langle \underline{r}_s, \underline{x}_k \rangle$$

Θ függés eltűnik a $(\,)^2$-re emelés és $\sqrt{\ }$ gyök miatt $\cos^2\Theta + \sin^2\Theta = 1$

Tulajdonképpen az optimális súlyfv egy de csak zajmentes esetben. Zaj növésre a legjobb a korrelációs időre vett integrálásnak felel meg. Az elemi jeleket ortogon. jelkészletből választom!

EA 2

2017.03.07.

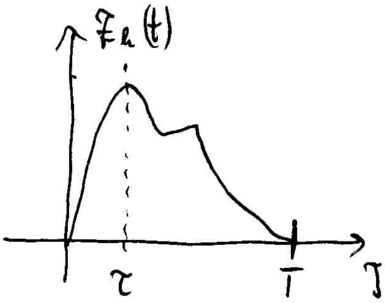
$\int_0^T r_c(t)\cdot z_k(t)\,dt$ · korrelációs megoldás

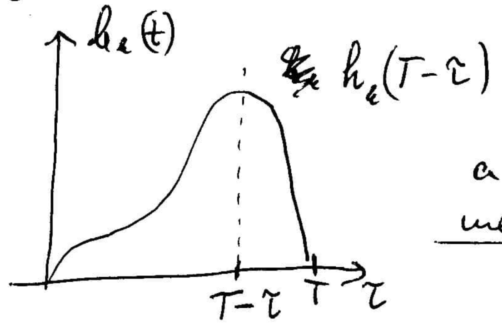
(elemi jel)

kvadratúra korrelációs detektor

$$\int_{-\infty}^{t} r_c(t)\cdot h_k(t-\tau)\,d\tau \xRightarrow{t=T} \int_{-\infty}^{T} r_c(\tau)\,\underbrace{h_k(T-\tau)}_{z_k(t)\text{-vel ekvivalens}}\,d\tau \quad \text{ha } h_k(T-t)=z_k(t)$$

mivel csak a $t=T$ értékre kell dönteni
ez lesz az illesztett szűrő

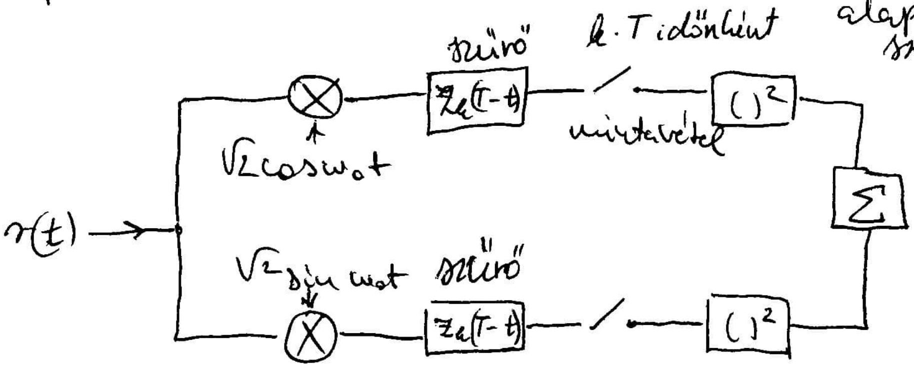




a súlyfv időtengelyét megforgatom

alapsávi illesztett szűrős megoldás.

nem koherens opt. vevő alapsávi illesztett szűrővel



$h_{k_c}(t)$ és $h_{k_s}(t) \rightarrow$

$\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0(T-t))\,z_k(T-t)$
$t\in[0,T)$

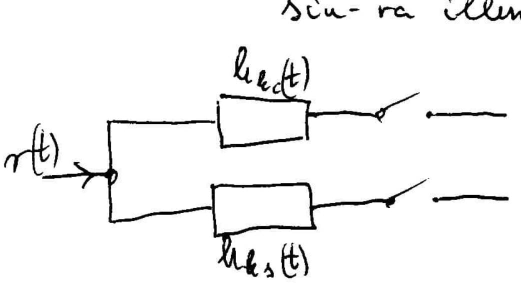
koszinuszos ill. szűrő

$$h_{k_c}(t) = \sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0(T-t))\cdot z_k(T-t) \quad t\in[0,T)$$

cos-ra illesztett szűrő

$$h_{k_s}(t) = \sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0(T-t))\cdot z_k(T-t) \quad t\in[0,T)$$

sin-re illesztett szűrő



lehet vivősávi szűrőt is csinálni, nem kell szinkronizálni!

EA 3

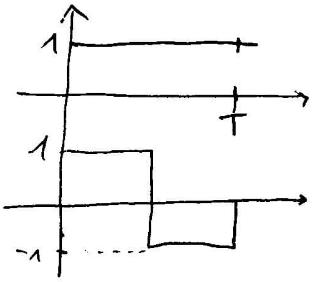
2017.03.07.

Saját feladat:

nem koherens vevő, zajmentes esetben:

$$Z_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \in [0,T) \\ 0 & \text{ha } t \notin [0,T) \end{cases}$$

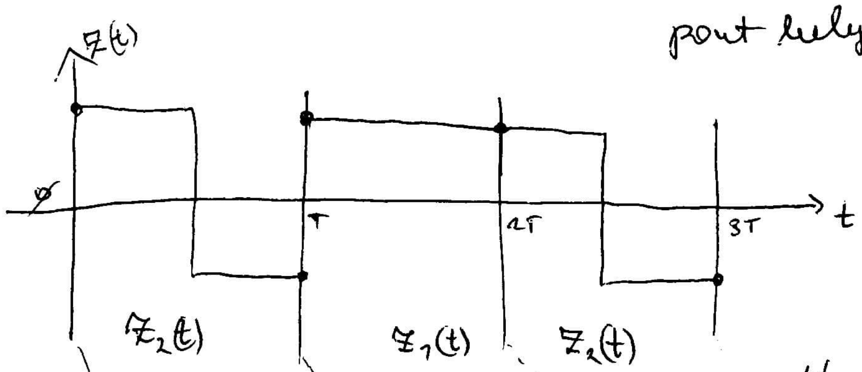
$$Z_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 \to t/2 \\ -1 & t/2 \to T \\ 0 & \text{máshol} \end{cases}$$



ezek ortogonálisak most

$\cos(\Theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vagyis $\Theta = 45°$

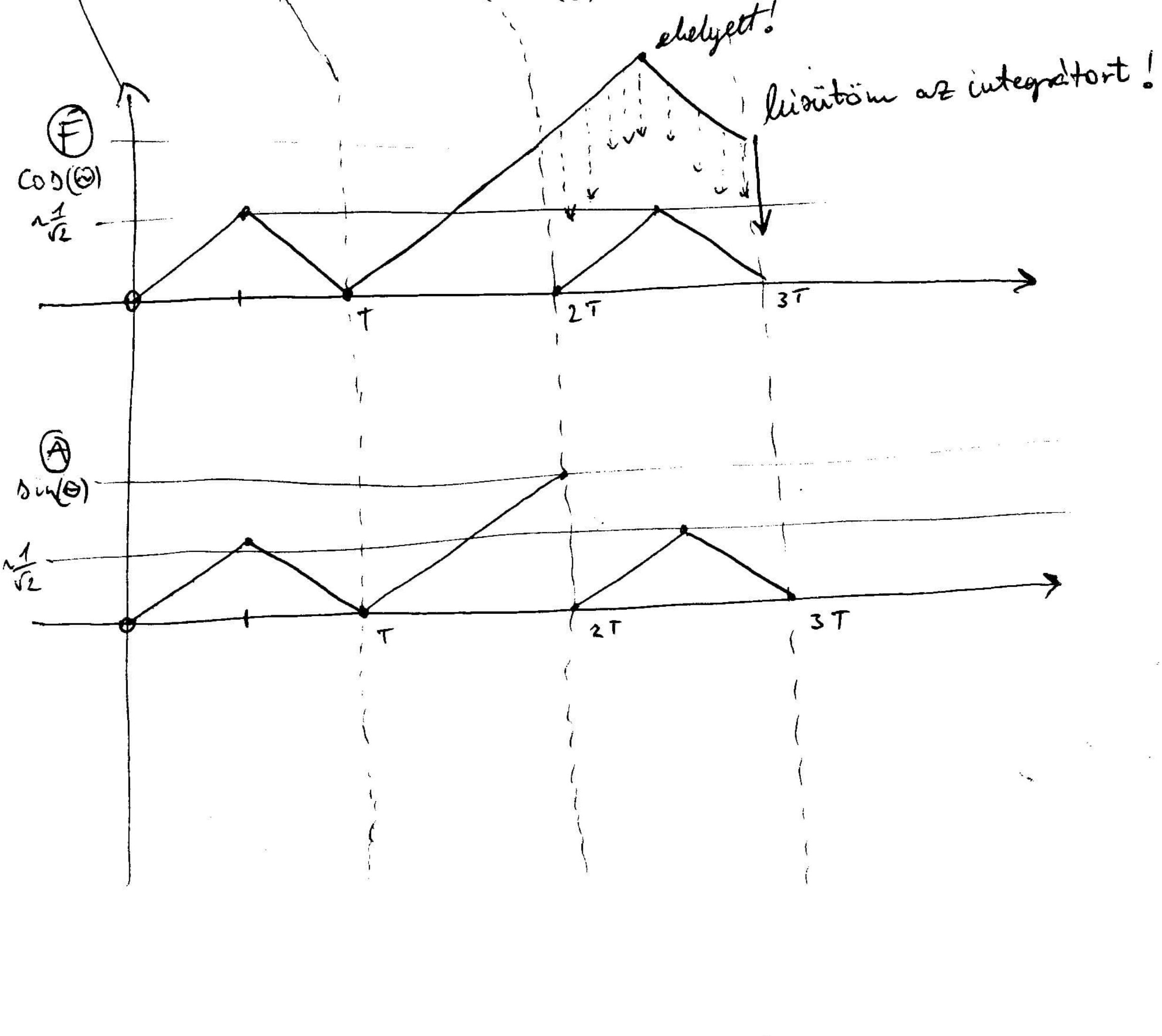
milyen lesz a jel a mintavételi pont helyén?



feltétel: ezek a jelek jönnek be.

$k = 1$ vagyis $Z_1(t)$-t választjuk

induláskor az int. kimenetei Ø-k!



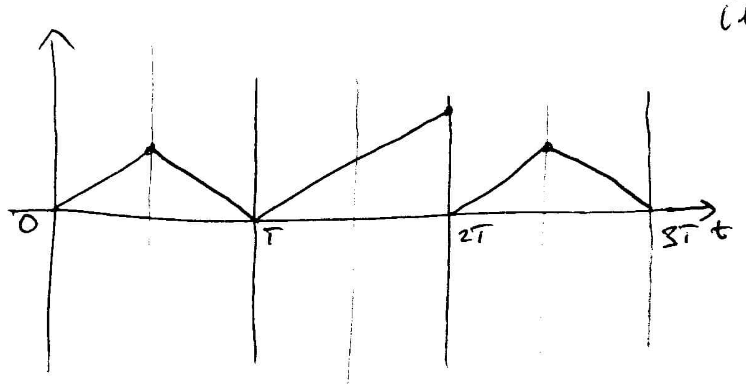
EA ④

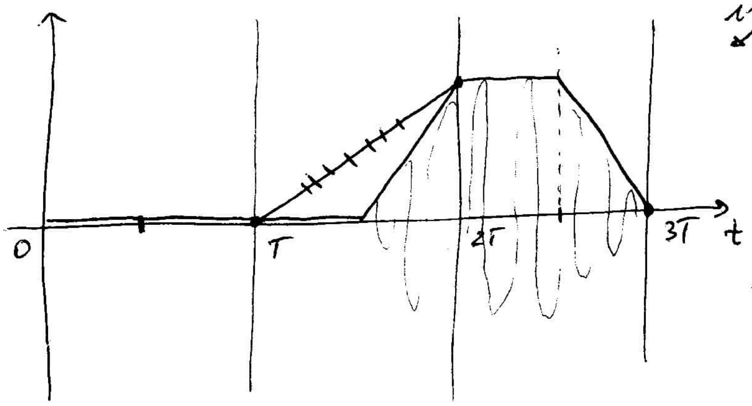
2017.03.07 Hirkelm

Illesztett szűrős megoldás:

a mozóssal is ugyanazt kell kapjunk!

$\Theta = 0$, $\cos\Theta = 1 \rightsquigarrow \sin(\Theta) = 0$ → alsó ágon nincs jel, ez így a koherens illesztett ~~szűrő~~ vevő jele





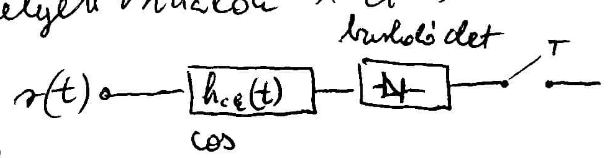
ill. szűrő: elemi jel fordítottja
↙ csúsztatott időablakkal

lényeg, hogy a mintavételi időpontban ugyanazt adja!
nem kell kiszűrni a konstansokat,
ez folyamatos szűrést produkál.
Az illesztett szűrő kimenetén ott lesz a vivő frekvenciás komponens is.

ez a trapéz alakú jel a sin, cos. jel burkolója

a két minta (sin, cos) burkolója van a kimeneten.

2 szűrő helyett csinálok 1-et →



10:651

Hibaarány számítás:

$z_k(t) = \sqrt{E} \cdot \varphi_k(t)$ $k = 1 \dots m$ — azonos energia mindenhol
m darab ortogonális alapsávi jel!
N = M jeltér

$\hat{k} = \arg\max_k (\xi_k)$

$\Pi_k = \frac{1}{M}$ – egyenletes eloszlással jön a forrástól a szimbólum

$P_{correct_k} = 1 - P_{e_k}$

EA ⑤

2017.03.07

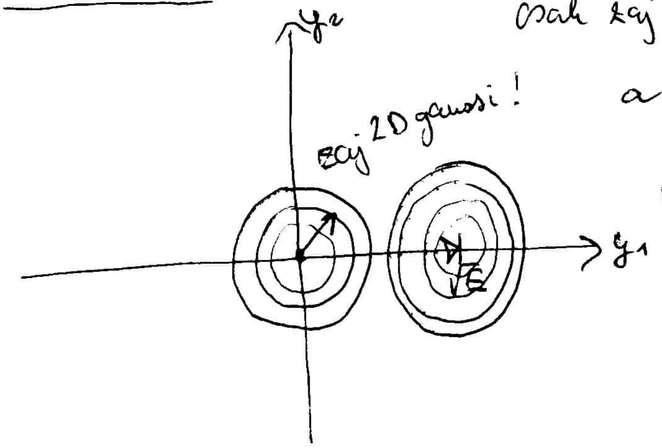
$$\boxed{P_{e_k} = P\left(\hat{k} \neq k \mid \underline{x}_k\right)} \text{ def.}$$

ha ortogonális a jelkészlet: $\forall k$ esetén a hiba ugyanaz!

$$P_{e_k} = P_r\left(\varrho_k > \varrho_1, \varrho_k > \varrho_2 \cdots \varrho_k > \varrho_{k+1} \cdots \mid \underline{x}_k\right)$$

kiválasztom a k-t, ha minden k-nál nagyobb a ϱ_k

<u>illusztráció:</u>



csak zaj pill. vektor értéke milyen?

a vektor hosszának a statisztikája Ø körül $\boxed{\text{Rayleigh}}$

$\sqrt{E}$ körül $\boxed{\text{RICE}}$

ha 2 ortogonális súlyfv. szűrő van akkor a zaj ami átmegy a 2-n → független lesz.

1 $\boxed{\text{Rice}}$ versenyez $\boxed{M-1}$ Rayleigh-vel

ha sok jelem van → egyre több Rayleigh lesz, sok lesz ha diszkrét győző

8.EA 1 | 2017.03.13.

Hétfő

Nem koherens rendszerek hibaarányai

Spec. eset: $z_k(t) = \sqrt{E}\cdot\varphi_k(t)$, $k=1\ldots M$ alapsávi elemi jelek

$E_k = E$ minden elemi jel energiája egyenlő

$\Pi_k = \frac{1}{M}$ - minden apriori egyenlő

$\underline{z}_k = \underline{x}_k$ {vivős vektor =

ortogonális jelek választásával!

nem koh. vektor korr.

$$g_k = \sqrt{\langle \underline{r}_{cos}, \underline{x}_k\rangle^2 + \langle \underline{r}_{sin}, \underline{x}_k\rangle^2}$$

$$\hat{k} = \arg\max_k (g_k)$$ k-ra döntök, mint üzenetre

$$P_{e_k} = P_r(\hat{k} \neq k \mid \underline{x}_k) = 1 - P_{c_k}$$

korrekt! átvitel

P_{e_k}: hibás átvitel; $\hat{k} \neq k$: rossz üzenetre döntünk!

$$P_{c_k} = P_r[g_k > g_m \ \forall m \neq k \mid \underline{x}_k] = P_r[g_k > g_1 \ldots g_k > g_{k-1} \ldots g_k > g_M \mid \underline{x}_k]$$

az ő valsége a legnagyobb!

$$\underline{r} = (r_c, r_s)\ ;\ \underline{z}_k = \underline{x}_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (1) & & (k) & & (N) \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0\ldots & 0\ldots & \sqrt{E}\ldots & 0\ldots & 0 \end{array}\right] \end{array}$$ -> ortogonalitás miatt

(φ_k, t)

$$\Psi_{c_k}(t) = \sqrt{2}\cdot\varphi_k(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \quad \Psi_{s_k}(t) = \sqrt{2}\cdot\varphi_k(t)\cdot\sin(\omega_0 t)$$ 2·N dim bázis osztály

mivel 2N dim. a rendszer, ezért $2\cdot N\cdot\frac{N_0}{2}$ lesz a zaj

minden dimenzióba $\frac{N_0}{2}$ függetlenül bejut!

$$r_{c_k}(t) = x_k(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot\cos(\vartheta_0)$$

$$r_{s_k}(t) = x_k(t)\cdot\sqrt{2}\cdot\sin(\omega_0 t)\cdot\sin(\vartheta_0)$$

$$\underline{r}_c : \left[r_{c1}, r_{c2} \ldots\ \sqrt{E}\cos(\vartheta_0) + r_{c_k} \ldots\ r_{c_N}\right];\quad \underline{r}_s \left[r_{s_1} \ldots\ \sqrt{E}\cdot\sin(\vartheta_0) + r_{s_k} \ldots\ r_{s_N}\right]$$

(indexek: (1), (k), (N)); r_{c1}: zaj

8.EA. ②   2017.03.13 Hírbelen

gyakorlatilag egy teljesítmény becslést végzek!

q_k ; $\langle \underline{r}_c, \underline{x}_k\rangle$; $\langle \underline{r}_s, \underline{x}_k\rangle$ kvadratúra korrelátort alkalmazunk

koherens esetben is kell a kvad. keverő!
hogy a fázisra tudja rabílgeni!

$$q_L = \sqrt{\langle \underline{r}_c, \underline{x}_L\rangle^2 + \langle r_s, \bar{x}_L\rangle^2}$$

ha k-idat küldték

k ≠ L esetben

ha $k \neq L$: $\sqrt{(\sqrt{E}\cdot \nu_{c_L})^2 + (\sqrt{E}\cdot \nu_{s_L})^2}$ ⟶ 2 független Gaussi val. változó ( )² összege

csak zaj van!

$\boxed{\text{Rayleigh eloszlású lesz } q_L}$

M−1 darab

ha $k = L$: $\sqrt{\left[\sqrt{E}\left(\sqrt{E}\cdot\cos(\vartheta_0)+\nu_{c_{k=L}}\right)\right]^2 + \left[\sqrt{E}\left(\sqrt{E}\cdot\sin(\vartheta_0)+\nu_{s_k}\right)\right]^2}$

$\boxed{\text{Rice eloszlású val. változó}}$

M−1 Rayleigh versenyez 1 Rice-al

$\sqrt{E}$ nem befolyásolja a max-ot, elhagyhatjuk!

$\left(r_{c_k}, r_{s_k}, \frac{N_0}{2}\right)$ $R = \sqrt{X^2+Y^2}$

X, Y $f_{XY}(x,y) \Longrightarrow$ R, Φ térbe megyünk! $\Rightarrow f_{R\Phi}(r,\varphi)$

$\Phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$ $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ $\left[N(\emptyset, N_0/2)\right]$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\pi\cdot N_0}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{N_0}\right)$$

$X = R\cdot\cos\Phi$ $x = r\cdot\cos\varphi$
$Y = R\cdot\sin\Phi$ ⇝ $y = r\cdot\sin\varphi$

$$f_{R\Phi}(r,\varphi) = \frac{1}{\pi\cdot N_0}\cdot r\cdot\exp\left(\frac{r^2}{N_0}\right)$$

Jacobi!

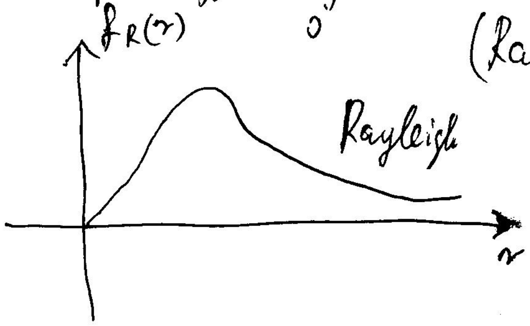
$\cos\varphi$ $\sin\varphi$

$-r\sin\varphi$ $r\cos\varphi$ $r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi$

$$f_R(r) = 2\pi\cdot\frac{1}{\pi N_0}\cdot r\exp\left(\frac{r^2}{N_0}\right)$$

Φ-től független! $\int_0^{2\pi} 1\, d\phi$

(Rayleigh)² ~ exponenciális $j = \det(J) = r$.



← minden k ≠ L esetben igaz!

8.EA 3

Hibbelen
2017.03.13.

$k = L$

$$\sqrt{\left(\sqrt{E}\cdot\cos(\vartheta_0)+\nu_{c_k}\right)^2+\left(\sqrt{E}\sin\vartheta_0+\nu_{s_k}\right)^2}$$

$$X, Y \quad f_{XY}(x,y)=\frac{1}{\pi\cdot N_0}\cdot\exp\left(-\frac{\left(x-\sqrt{E}\cos(\vartheta_0)\right)^2+\left(y-\sqrt{E}\sin(\vartheta_0)\right)^2}{N_0}\right)\rightarrow f_{R,\phi}(r,\varphi)$$

$$f_{R,\phi}(r,\varphi)=\frac{1}{\pi\cdot N_0}\cdot r\cdot\exp\left(-\frac{\left(r\cdot\cos(\varphi)-\sqrt{E}\cos(\vartheta_0)\right)^2+\left(r\cdot\sin\varphi-\sqrt{E}\cdot\sin\vartheta_0\right)^2}{N_0}\right)$$

Jacobi!

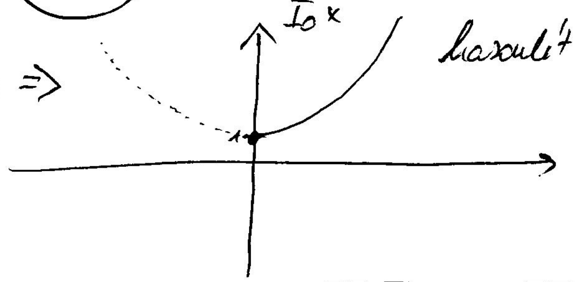
$$=\frac{1}{\pi N_0}\cdot r\cdot\exp\left(-\left(\frac{E}{N_0}\right)\right)\exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)\exp\left(+2\cdot\frac{r\sqrt{E}}{N_0}\left(\underbrace{\cos\varphi\cos\vartheta_0+\sin\varphi\sin\vartheta_0}_{\cos(\varphi-\vartheta_0)}\right)\right)$$

$$f_R(r)=\frac{1}{\pi N_0}\cdot r\cdot\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)\underbrace{\int_0^{2\pi}\exp\left(2\,\frac{r\sqrt{E}}{N_0}\cdot\cos(\varphi-\vartheta_0)\right)d\varphi}_{\text{a } \vartheta_0 \text{ mindegy mert úgyis } 2\pi\text{-ne megyünk át! (oda integrálunk)}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\exp\left(\left(2\cdot\frac{r\sqrt{E}}{N_0}\right)\cos\varphi\right)d\varphi \rightsquigarrow I_0 \text{ Bessel}(0.\ \cancel{\text{fajú}}\ \text{rendű},\ 2.\ \cancel{\text{rendű}}\ \text{fajú})\left[\frac{1}{2\pi}\right]$$

dióda egyenirányít! egy cos jelet

$I_0(x) \Rightarrow$



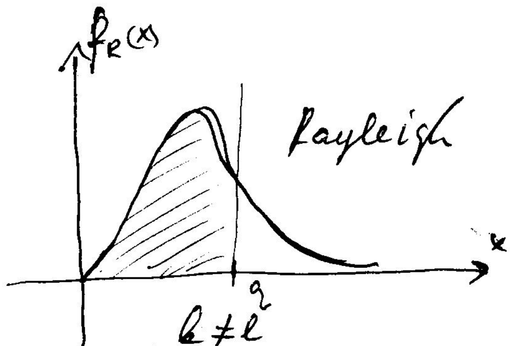
hasonlít a ch(x)-re

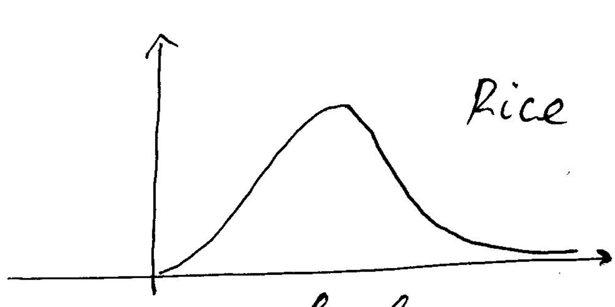
páros fv-ek

$$\boxed{f_R(r)=\frac{2}{N_0}\cdot r\cdot\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)\cdot I\left(\frac{2\cdot r\cdot\sqrt{E}}{N_0}\right)}\longrightarrow\boxed{\text{Rice esetben!}}$$

ha $k = L$

ha $E = 0 \rightarrow$ éppen a Rayleigh jön ki





Rayleigh esetre →

$$P\left(\varrho \geq R_L \mid X_k\right)=\int_0^{\varrho}\frac{2}{N_0}\cdot r\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)dr=\left[-\exp\left(-\frac{r^2}{N_0}\right)\right]_0^{\varrho}=\boxed{1-e^{-\frac{\varrho^2}{N_0}}}$$

8 EA 4

Hilcsler
2017.03.13.

$$\left(1-e^{-\frac{\varrho^2}{N_0}}\right)^{M-1} \rightarrow$$ M-1 darab Rayleigh kisebb, mint $\boxed{\varrho}$

$$\int f_r(\varrho)\,d\varrho \cdot 1-e^{-\frac{\varrho^2}{N_0}}$$

$$P_{C_E}=\int_0^\infty 2\cdot\frac{\varrho}{N_0}\,e^{-\left(\frac{E}{N_0}\right)}\cdot e^{-\frac{\varrho^2}{N_0}}\cdot \cancel{\exp}\left[1-\exp\left(\frac{\varrho^2}{N_0}\right)\right]\cdot d\varrho$$

$$I_0\left(2\cdot\frac{\varrho\cdot\sqrt{E}}{N_0}\right)$$

$r=\varrho$ esetben

$$P_{C_E}=\int_0^\infty 2\cdot\frac{\varrho}{N_0}\cdot\exp\left(\frac{-E}{N_0}\right)\cdot\exp\left(-\frac{\varrho^2}{N_0}\right)\cdot\left[1-\exp\left(\varrho^2/N_0\right)\right]^{M-1}\cdot I_0\left(2\cdot\varrho\cdot\frac{\sqrt{E}}{N_0}\right)d\varrho$$

$\boxed{\text{M = 2 esetén, nem koherens rendszernél}}$ + ortogonális jelkészlet van!

$$P_e=\frac{1}{2}\cdot\exp\left(-\frac{E}{2N_0}\right)$$

Chirp jelek demodulációjánál

Frek. szelektív fading ellen jó a chirp

dodescu@gmail.com

9. EA (1.)

2017.03.14

$\boxed{\text{M detektor}}$ (1) (M-1)

Rice Rayleigh

$$P_{C_k} = P_c = \int_0^\infty 2\cdot\frac{\varrho}{N_0}\exp\left(-\frac{E^{\cancel{2}}}{N_0}+\frac{\varrho^2}{N_0}\right)\cdot I_0\left(2\varrho\frac{\sqrt{E}}{N_0}\right)\left(1-\exp\left(-\frac{\varrho^2}{N_0}\right)\right)^{M-1}d\varrho$$

$$\boxed{\frac{\varrho^2}{N_0}=x} = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{N_0}+x\right)\cdot I_0\left(2\cdot\sqrt{x\cdot\frac{E}{N_0}}\right)\cdot\left(1-\exp(-x)\right)^{M-1}dx \quad ?$$

$$\frac{dx}{d\varrho}=\frac{2\varrho}{N_0}$$

eltűnik!

vagyis a hiba arány/jó arány csak az SNR-től függ $\left(\frac{E}{N_0}\right)$

$$= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\cdot\exp(-x)\cdot I_0\left(2\sqrt{x\frac{E}{N_0}}\right)\cdot\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^M\binom{M-1}{m}e^{-M\cdot x}\,dx =$$

$$\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^M\binom{M-1}{m}\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)\cdot\int_0^\infty \underbrace{\exp\left(-(m+1)x\right)\cdot I_0\left(2\sqrt{\frac{xE}{N_0}}\right)dx}_{\text{Laplace-trafó lesz!}}$$

váltakozó előjelű sor

Bessel-fv Laplace trafója

$$\frac{1}{m+1}\cdot\exp\left(\frac{1}{m+1}\cdot\frac{E}{N_0}\right)$$

$$\Rightarrow P_c = \sum_{m=0}^{M-1}(-1)^M\binom{M-1}{m}\cancel{\exp\left(-\frac{E}{N_0}\right)}\cdot\left(\frac{1}{m+1}\right)\cdot\exp\left(-\frac{E}{N_0}\cdot\frac{m}{m+1}\right)$$

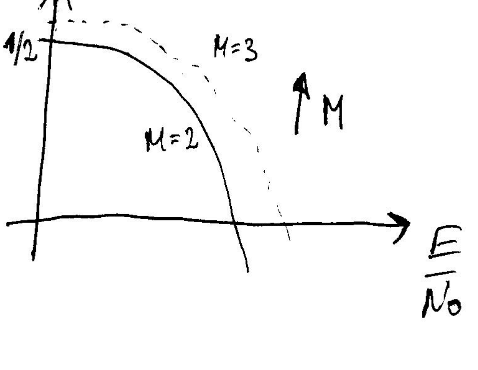
ha $m=\emptyset \rightarrow P_c=1$

$$\boxed{P_e = \sum_{m=0}^{M-1}(-1)^{M+1}\binom{M-1}{m}\cdot\frac{1}{m+1}\cdot\exp\left(-\frac{E}{N_0}\cdot\frac{m}{m+1}\right)}$$

ha $M=2$ bináris

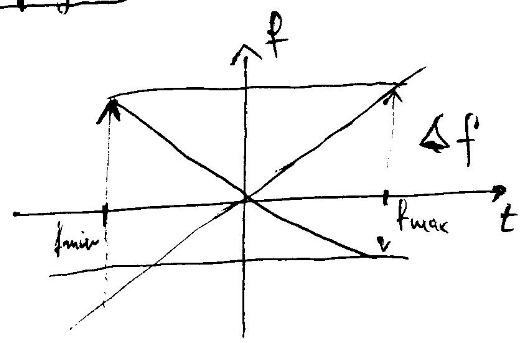
$$P_e = 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\exp\left(-\frac{E}{N_0}\cdot\frac{1}{2}\right)$$ ismerős ??? :)

$$\frac{E}{N_0}\rightarrow\emptyset \longrightarrow \frac{M-1}{M}$$



2017.03.14
Hirhelem

Chirp jel:

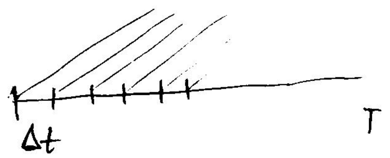


$f \searrow$: „1"
$f \nearrow$: „0"

Spread spectrum communication

a fázis négyzetesen függ az időtől
nem koherens vételre van szükség!

PP Modulációt lehet csinálni!



$\Delta t < T$ az eltolt chirp jelek autokorr. fv-ét megnézem.
ha unimodális → jól megkülönböztethető!

UMTS: előnye kell a nem-koherens vétel!
frekvencia-szelektív fading ellen jól védett,
zavarás ellen jól védett!

Koherens és nem koherens összehasonlítása

végig ortogonális jelekkel

$P_e \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = \frac{E}{N_0 \log_2 M}$ függvénye szerint ábrázoljuk

ha $M \to \infty$, akkor már mindegy, hogy koherens, vagy nem koherens

$$\lim_{M\to\infty} P_e = \begin{cases} 1 & \frac{E_b}{N_0} = \frac{E}{N_0 \log_2 M} < \ln 2 \\ 0 & \frac{E}{N_0 \log_2 M} > \ln 2 \end{cases}$$

$$\frac{E}{N_0 \log_2 M} = \ln 2 \qquad \frac{E}{N_0} \cdot \frac{1}{\log_2 M} \cdot \frac{T}{T} = \frac{1}{Rate} \cdot \frac{P}{N_0} = \ln 2$$ küszöbérték

$$\boxed{Rate = \frac{P}{N_0} \cdot \log_2 e}$$

AWGN csatornán a végtelen sávnél.
maximuma

Kapacitás:

$$C = W \cdot \log_2\left(1 + \frac{\overset{\text{hasznos power}}{P}}{\underset{\text{zaj power}}{N_0 \cdot W}}\right)$$

$\boxed{SEA}$ 3

Hilbertben
2017.03.14.

$$C_\infty = \lim_{W\to\infty} W\cdot\log_2\left(1+\frac{P}{N_0\cdot W}\right) \rightsquigarrow \lim_{W\to\infty} \log_2 e\cdot\ln\left(1+\frac{P}{N_0\cdot W}\right)\cdot W =$$

$$= \lim_{W\to\infty} \log_2 e\cdot\ln\left(1+\frac{P}{N_0\cdot W}\right)^W = \boxed{\log_2 e\cdot\frac{P}{N_0}}$$

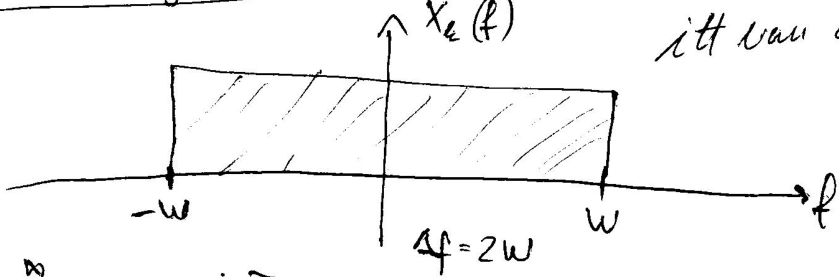
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

mivel N_0 kicsi!

$\boxed{C_\infty = Rate_{max}}$?

A vektorteret terjesszük ki sávkorlátolt jelekre!

itt van a Fourier trafó?



$$X_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\,dt \qquad r(t) = x_k(t)+\nu(t) \qquad SNR = \frac{P_0}{N_0\cdot W}$$

$\frac{N_0}{2}\cdot 2W$

L_2 térben (négyzetesen int. fv-tere)

$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)\,dt$ – skalárszorzat

$\|x(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt < \infty$ – norma + létezik a $\mathcal{F}$-trafójuk

$d(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)-y(t))^2\,dt$ – távolság

→ pontokban különbözhetnek, megszámlálhatóan véges pontban

Parseval:

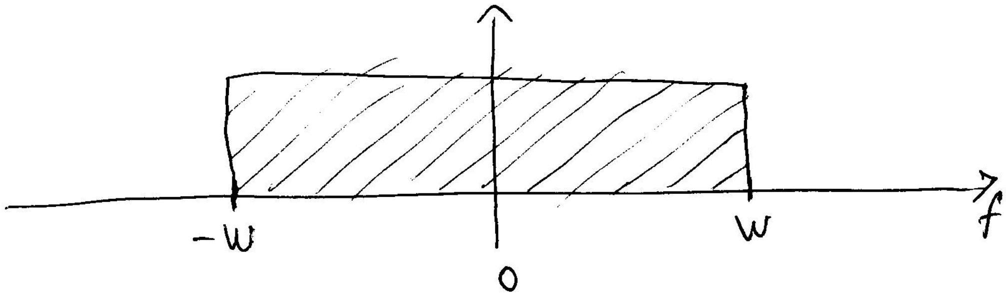
$$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle X(f), Y(f)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\,Y(f)^*\,df$$

komplex fv-ek

$$\|x(t)\|^2 = \|X(f)\|^2$$

Hirbehu
2017. 03. 20.

A jeltér:



$B = 2W$

$\sigma = 2W \cdot \frac{N_0}{2} = W \cdot N_0$

$SNR = \frac{P}{W \cdot N_0}$

sávkorlátolt jelek világa

$$\langle \varphi_j(t), \varphi_k(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(t)\, \varphi_k(t)\, dt \begin{cases} \neq 0 & j = k \\ = 0 & j \neq k \end{cases}$$

$\boxed{\text{ONB fv. készlet}}$

ortogonális

$$\frac{\varphi_j(t)}{\|\varphi_j(t)\|^2} \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j^2(t)\, dt$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{j \in I} \frac{\langle x(t), \varphi_j(t) \rangle}{\|\varphi_j(t)\|^2} \varphi_j(t)}$$

egész számok halmaza

ha $\|\varphi_j(t)\| = 1$

$$x(t) = \sum_{j \in I} \underbrace{\langle x(t), \varphi_j(t) \rangle}_{\text{jelvetítés}} \cdot \underbrace{\varphi_j(t)}_{\text{súlyozás}}$$

$$\langle x(t), \varphi_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \varphi_j t\, dt = $$

$$= \sum_{j = I} x_j \varphi_j$$

$$\boxed{\exp(-j 2\pi \cdot f \cdot kT) \quad k \in \mathbb{Z} \quad f \in (-W, W)}$$

$T = \frac{1}{2W} \rightsquigarrow$ periódusidő

frekvenciában periodikus jelek leírása

ez ortogonális bázist állít elő.

$$\int_{-W}^{W} \exp(-j 2\pi f \cdot l \cdot T) \cdot \overset{\text{konjugált}}{\exp(+j 2\pi f \cdot k \cdot T)}\, df \Rightarrow \int_{-W}^{W} \exp(j 2\pi f (l-k) T)\, df =$$

$$= \left[\frac{\exp(j 2\pi f (l-k) T)}{j 2\pi (l-k) T} \right] = \frac{\exp(2\pi \cdot W \cdot (l-k) T j) - \exp(-2\pi W \cdot (l-k) T \cdot j)}{j 2\pi \cdot (k-l) T} =$$

$$= \sin(\pi \cdot (k-l)) / \pi (l-k) \rightsquigarrow \frac{1}{T} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot (l-k))}{\pi (l-k)} \rightsquigarrow \begin{cases} \text{ha } l = k & \frac{1}{T} \\ \text{ha } l \neq k & 0 \end{cases}$$

10 EA ②

Hideleu
2017. 03. 20.

$$\boxed{= \sqrt{T} \cdot \exp(-j\, 2\pi f \cdot k \cdot T) \quad k \in \mathbb{Z} \quad f \in [-W, +W]}$$

(sávkorlátolt ortonormált bázis állítani elő)

$$\boxed{X(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle X(f), \sqrt{T} \cdot \exp(-j\, 2\pi f \cdot kT) \rangle}_{\text{skalár értékű}} \cdot \sqrt{T} \cdot \exp(-j\, 2\pi f k T) \quad f \in [-W, W]}$$

ez mért ortonormált bázis!

$$x(t) = \underset{(\sqrt{T})^2}{T} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(f) \cdot \exp(-j 2\pi \cdot f \cdot k \cdot T) \cdot \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j 2\pi f k \cdot T}\}$$

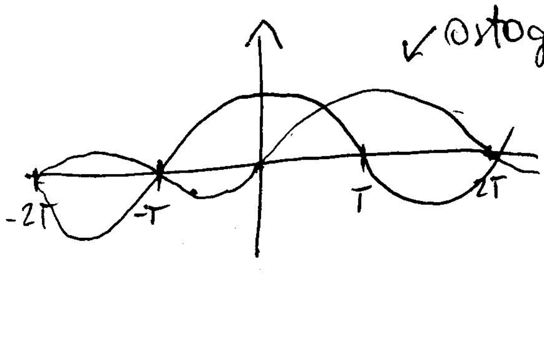
$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\exp(-j 2\pi k \cdot f T)\} = \int_{-W}^{W} e^{-j 2\pi \cdot f \cdot k \cdot T} \cdot e^{j 2\pi f \cdot t} \, df =$$

$$= \left[\frac{\exp\left(j 2\pi f (t - kT)\right)}{j 2\pi \cdot (t - k \cdot T)}\right]_{-W}^{W} = \frac{\exp(j \cdot 2\pi \cdot W(t - kT)) - \exp(-j 2\pi W(t - kT))}{j \cdot 2\pi (t - kT)} =$$

$$= \frac{\sin(2\pi \cdot W \cdot (t - kT))}{\pi (t - kT)} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{t - kT}{T}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{t - kT}{T}\right)} \Rightarrow$$

$W = \frac{1}{2T}$

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{t - kT}{T}\right)}{\pi \cdot \left(\frac{t - kT}{T}\right)} = \mathrm{sinc}_T(t - kT) \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$x(t) = \frac{1}{T} \cdot \sum \langle x(t), \mathrm{sinc}_T(t - kT) \rangle \cdot \mathrm{sinc}_T(t - kt)$$

sávkorlátolt jel vektortérbeli leírásához ∞ dim. térben kell mozognunk.

10 EA ②

Hideken
2017.03.20.

$j \in \mathbb{Z}$

$$X(j\cdot T) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle x(t), \mathrm{sinc}_T\, t-kT\rangle \cdot \underbrace{\mathrm{sinc}_T(j\cdot T - kT)}_{\text{csak a } j=k\text{-nál lesz } 1 \text{ másból } \boxed{0}}$$

minta száma éppen!

ha $j=k \rightarrow \frac{1}{T}\langle x(t), \mathrm{sinc}_T(t-j\cdot T)\rangle$

$$X(j\cdot T)\cdot T = \langle x(t), \mathrm{sinc}_T(t-jT)\rangle$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k\cdot T)\cdot \mathrm{sinc}_T(t-kT)}$$ ez a klasszikus mintavételi tétel!

~~$T=\frac{1}{2W}$~~ $T = \frac{1}{2W}$

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\cdot \frac{\sin\left(\pi\cdot\frac{t-kT}{T}\right)}{\pi\cdot\frac{(t-k\cdot T)}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}}\cdot \mathrm{sinc}_T(t-kT) \quad k\in\mathbb{Z}$$

és a vivősávi jelek?

$$\underset{\text{vektortér}}{x_k} = \frac{1}{\sqrt{T}}\cdot\langle x(t), \mathrm{sinc}_T(t-k\cdot T)\rangle = \underbrace{\sqrt{T}\cdot X(kT)}_{\text{ez a minta kb.}}$$

ortogon. elemi jelek!

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, dt = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = T\cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{x(k\cdot T)\, y(k\cdot T)}_{\text{minták}}$$

Vivő

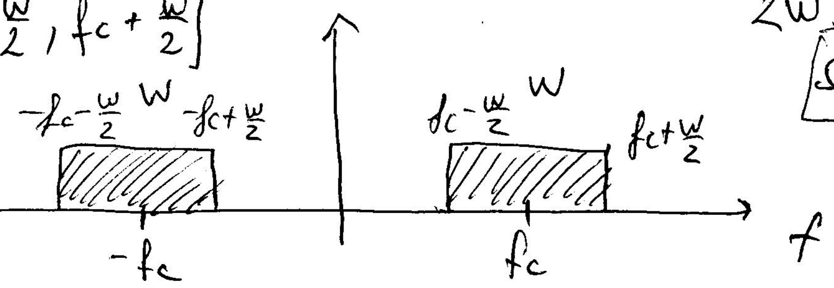
$x(t) \quad f \in \left[f_c - \frac{W}{2}, f_c + \frac{W}{2}\right]$

2W ömeleu

$$\boxed{SNR = \frac{P}{W\cdot N_0}}$$

$B = 2W$

$T = \frac{1}{W} \rightarrow$ normalizálás miatt



keressünk ONB-ket!

$$\{\varphi_k(t)\cdot\cos(2\pi\cdot f_c\cdot t),\ \varphi_k(t)\cdot\sin(2\pi\cdot f_c\cdot t)\} \quad \text{ONB} \checkmark$$

Holschuh
2017.03.20.

$$\mathcal{F}\{\varphi_\ell(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)\} \rightsquigarrow$$

$$\left[\Phi_\ell(f-f_c)+\Phi_\ell(f+f_c)\right]\cdot\frac{1}{2}$$ (cos - eltérés jel)

$$\langle\varphi_\ell(t)\cdot\cos(2\pi f_c t),\ \varphi_\ell(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)\rangle = \frac{1}{4}\left[\Phi_\ell(f-f_c)+\Phi_\ell(f+f_c)\right]\left[\Phi_\ell^*(f-f_c)+\Phi_\ell^*(f+f_c)\right] \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\ell(f+f_c)\cdot\Phi_\ell^*(f+f_c)+\Phi_\ell(f-f_c)\Phi_\ell^*(f-f_c)\,df =$$

korlátozott a frek. tartományban!

ha az egyik $\frac{W}{2}$ nem lóg be a másikba → ∅ lesz a közös rész

ortogonálisak!

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_\ell(f)\cdot\Phi_\ell(f) = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\ell(t)\,\varphi_\ell(t)\,dt \Rightarrow$$

mivel végig integrálunk ezért mindegy hol van W/2

$$\left[\varphi_\ell(t)\cdot\cos(2\pi f_c t)\cdot\sqrt{2}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_{c\ell}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\cdot\mathrm{sinc}_T(t-kT)\cdot\cos(2\pi f_c\cdot t)\\ \varphi_{s\ell}(t) &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\,\mathrm{sinc}_T(t-kT)\cdot\sin(2\pi f_c\cdot t)\end{aligned}}$$

cos.

2N dim. ~~jgy~~ jeltér lesz!

sin

$$SNR = \frac{P}{W\cdot N_0}$$

10. EA (1)

2017.03.21
Hírközlés

Ortogonális PAM típusú / QAM típusú moduláció:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \cdot \underbrace{\varphi_k(t)}_{\text{ONB}}} \qquad \boxed{\varphi_k(t) = p(t - k\cdot T)}$$ ortonormált sorozat

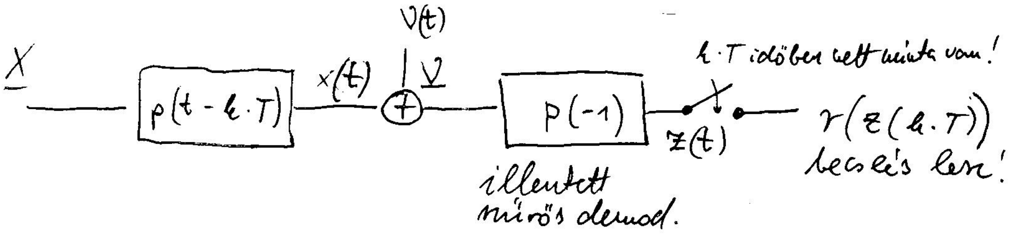
pl. $\mathrm{sinc}_T(t-kT)$ ...

$$\boxed{r(t) = x(t) + \nu(t)}$$

egy-egy vetület

$$r_k = \langle r(t), \varphi_k(t)\rangle = \langle x(t), \varphi_k(t)\rangle + \langle \nu(t), \varphi_k(t)\rangle = \boxed{x_k + \nu_k}$$

milyen p-t válasszak?



Nyquist feltétel: p(t)-re ad előírást

- $p(t-kT)$ ortonormált fv-t jelent $k\in\mathbb{Z}$-re
- $g(t) = p(t) * p(-t)$ $\quad g(0) = 1$ ha $k=0$ $\quad g(k\cdot T) = 0$ ha $k\neq 0$
- $\displaystyle \frac{1}{T}\sum_{M\in\mathbb{Z}} G\left(f - \frac{M}{T}\right) = 1$

$\left.\right\}$ ezek ekvivalensek

$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(f)$

(1)

$$\langle p(t-kT), p(t-k'T)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-k'T)\,p(t-kT)\,dt = \int p(\tau)\cdot p(\tau - k\cdot T + k'T)\,d\tau =$$

konvolúció

$$= g\left((k-k')T\right)$$ p-ből jön, hogy g-k ortonormált bázist képeznek!

(2)

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\, \varphi_k(t)$$

$$z(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \cdot g(t - k\cdot T)$$

11. EA 2

2017.03.21

ideális mintavételezés:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\cdot T)}$$

fourier sor! leírás

$$\mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\cdot T)\right]=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}c_\ell\, e^{j2\pi\frac{\ell}{T}\cdot t}\Rightarrow$$

$$c_\ell=\left[\int\delta(t)\cdot e^{-j2\pi\cdot\frac{\ell}{T}\cdot t}\,dt\right]\cdot\frac{1}{T}=\frac{1}{T}$$

$$\hookrightarrow\boxed{\frac{1}{T}\cdot\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{\ell}{T}\right)}$$

periodikus mintavevő jel frekvenciatartományban

frekvi fv.

---

a mintavétel helyén vagyunk!

$$\mathcal{F}\left[z(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\sum_{\ell}x_\ell\cdot g(t-\ell T)}_{z(t)}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\,e^{-2\pi jft}\,dt=$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x_\ell\cdot g((n-\ell)T)\cdot e^{-j2\pi fnT}\cancel{dt}=\boxed{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x_\ell\cdot 1\cdot e^{-j2\pi\cdot\ell\cdot f\cdot T}}$$

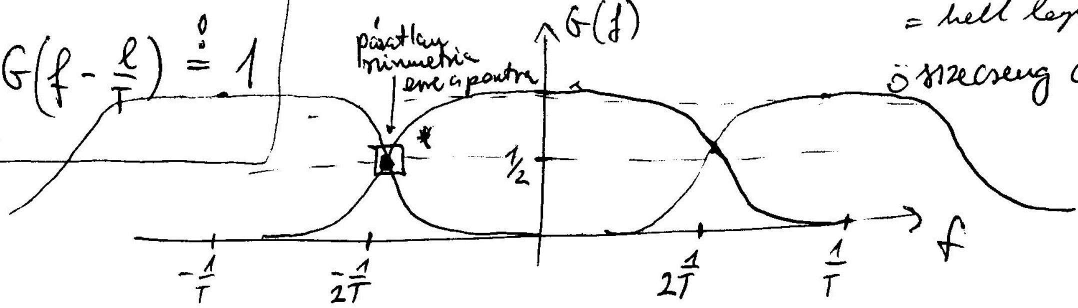
nT ránmutat a dirac-ra!

35:21

$$\mathcal{F}\{z(t)\}*\left[\frac{1}{T}\cdot\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{\ell}{T}\right)\right]=\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}x_\ell\, e^{-j2\pi\cdot\ell\cdot f\cdot T}\left(\underbrace{\frac{1}{T}\cdot\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}G\left(f-\frac{\ell}{T}\right)}\right)$$

= kell legyen 1-el
összecseng az előző feltétellel.

$$\boxed{\frac{1}{T}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}G\left(f-\frac{\ell}{T}\right)\overset{!}{=}1}$$



nincs optimum erre! minden G(f), amire páratlan a * pontra megfelelő

lekerekítjük

elvileg végtelen ideig kell várni, ~~a~~ de inkább csonkolok időtartományban!

11. EA (3)

2017.03.21.

Hiheleu

Teljesítő képesség:

$$R < C = W \cdot \log_2(1+SNR)$$

rate $\frac{C}{W} = \log_2(1+SNR)$ $\quad \varrho = \left(\frac{R}{W}\right) < \frac{C}{W}$

spektrális hatékonyság $\left(\frac{R}{W}\right)$

E_s : szimbólum energia $\left[\frac{W}{2 \text{ dimenzió}}\right]$ $\quad \boxed{W = \frac{1}{2T}}$; T

W sávszélességben → 2 dimenzió (sin és cos)

$\varrho : \left[\frac{bps}{Hz}\right]$ ~ Spektrális hatékonyság

$$P = \frac{E_s}{2T} = E_s \cdot W \qquad \boxed{SNR = \frac{E_s}{N_0}}$$

Normalizálás SNR-re:

$\varrho < \log_2(1+SNR)$

$SNR > 2^{\varrho} - 1$

1. $\boxed{SNR_{norm} \triangleq \frac{SNR}{2^{\varrho}-1}}$ $\quad$ adott a ϱ
2. $\frac{E_b}{N_0} \leq \frac{2^{\varrho}-1}{\varrho}$ $\quad$ ha el akarom érni ϱ-t, ennyi E_b/N_0 + kell előállítsak!

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{2^{\varrho}-1}{\varrho} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{e^{\varrho \cdot \ln 2} - 1}{\varrho} = \frac{1 + \varrho \ln 2 - 1}{\varrho} = \boxed{\ln 2}$$

Taylor-sor → $1 + \varrho \cdot \ln 2 - 1 + \ldots$

Teljesítménykorlátozott rendszerek:

kicsi a jel-zaj viszony! $\quad$ DEEP space comm.

$$\varrho < \log_2(1+SNR) \simeq SNR \cdot \log_2 e$$

Sávkorlátozott rendszerek:

$$\varrho < \log_2(SNR)$$

ha kétszerezem az SNR-t → csak $1 \frac{bps}{Hz}$-el növel!

Példa:

Sávkorlátozott jelre

$W = 3{,}5 \text{ kHz}$

$SNR = 37 \text{ dB}$

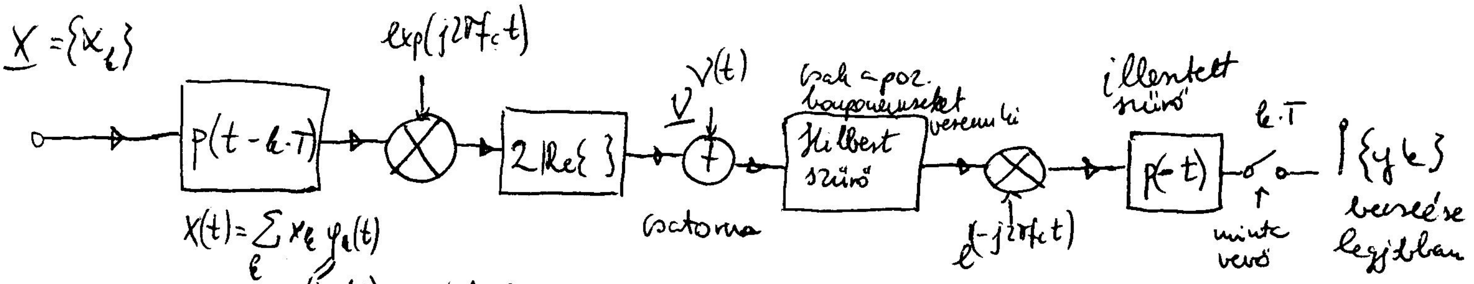
$$\varrho = ~~1+\log_2~~ \log_2(1+SNR) \simeq \left(\frac{37}{3} \frac{bps}{Hz}\right)$$

$$\boxed{R < 43 \text{ kbps}}$$

EA 12 (1)

2017.03.27.
Hétfőn

Az ortogonális QAM rendszerek:



$p(t-\ell T)$ zajok függetlenek!

$W = \frac{1}{T}$ (2 minta van, sin, cos) $P_{zaj} = 2W\cdot\frac{N_0}{2} = W\cdot N_0$

$$y_\ell = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{M} x_k\, p(\tau-kT)\, h(\ell\cdot T-\tau)\,d\tau = \sum_{k} x_k \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau-kT)\cdot h(\ell T-\tau)\,d\tau =$$

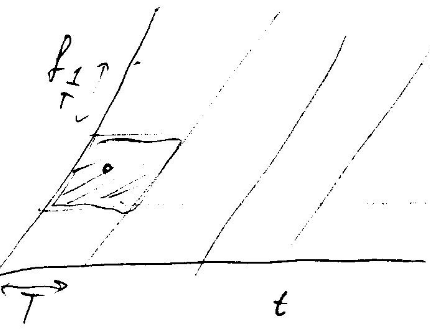
$$\sum_k x_k \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)\cdot h(\ell T-k\cdot T-\tau)\,d\tau}_{z_{\ell-k}} = \sum_k x_k\, z_{\ell-k} \quad \text{nincs ISI}$$

ha $z_{\ell-k}=\delta_{\ell k}$

ha van időhiba: $T \Rightarrow T+\delta$ → áthallás lesz! [szimbólumszinkron]

ha van fázishiba: sin vs. cos → áthallás lesz! [vivő szinkron]

OFDM szinkronizálás:

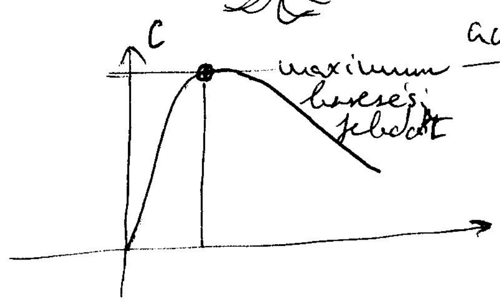


szinkronizáló idő-frek cellákat alkalmazok!

sok-sok fázismérés, mert kell a szinkronhoz.

fázis eloszlás mérése kell

adatátvitel vs. szinkronizálás!



EA 12. 2

2017.03.27.

Az M-PAM, MQAM teljesítő képességek:

$\boxed{\text{BPAM}}$ BPSK: $A=[-\alpha,\alpha]$ $\alpha>0$ $E_{bit}=\alpha^2$, $T=1$ (bitidő), zaj van! $\sigma^2=\frac{N_0}{2}$

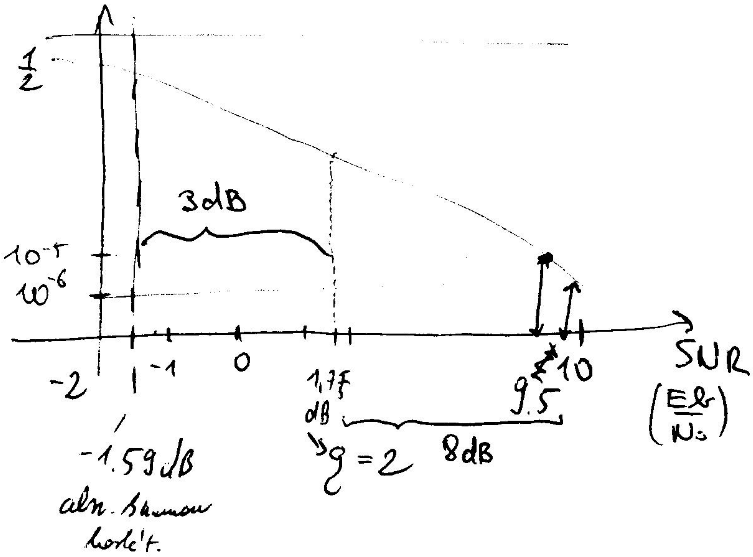
$\varrho = 2\left[\frac{bit}{2\,dim}\right]$ 2dim -> 2 bit   2 PAM átvitele $E_s = 2E_b$

— o —

$$P_{bit} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot \exp\left(-y^2/2\sigma^2\right)\,dy \qquad Q(x) = \int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$x = \frac{y}{\sigma} \quad dx = \frac{dy}{\sigma}$$

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = \boxed{Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$



$$\frac{E_b}{N_0} > \frac{2^{\varrho}-1}{\varrho}$$

hibajavítás,
ha $\varrho = 2$-t tartjuk -> BPSK-hoz képest csak ennyit nyerhetünk... adott csatorna mellett.

~~MQAM~~:

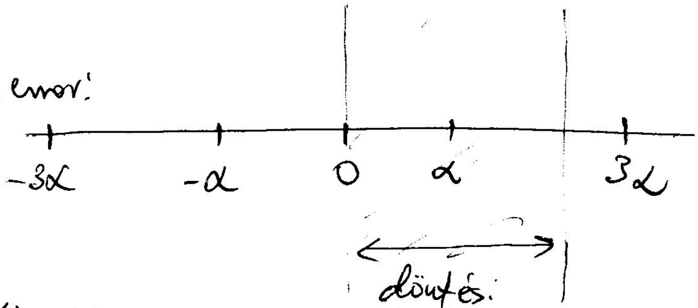
$A\ (\pm\alpha, 2\alpha \ldots, (M-1)\alpha)$

$$E\{A\} = \frac{2}{M}\cdot\left[\alpha^2 + 3^2\alpha^2 + \ldots (M-1)^2\alpha^2\right] = \alpha^2\cdot\frac{M^2-1}{3}$$

$$\boxed{E_s = 2\cdot\alpha^2\cdot\frac{M^2-1}{3}}$$

Hilcheln
2017.03.27.

$P_r(e)$: prob. of error:



$$P_r(e) = 2\,Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)\cdot\frac{M-2}{M} + 2\,Q\cdot\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = \frac{2\cdot(M-1)}{M}\cdot Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \Rightarrow \text{ha } M \gg \rightsquigarrow 2\cdot Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

átlagos hibavalószínűség

M^2 QAM: 2 ftlen MPAM

$$P_s = 1-(1-P_r(e))^2 = \cancel{1}-\cancel{1}+2P_r(e)-P_r(e)^2 = 2P_r(e)-P_r^2(e) \rightsquigarrow$$

kvad. komp. független zajt adunk!

$$= 4\cdot Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \text{ jó hibaarány esetén!}$$

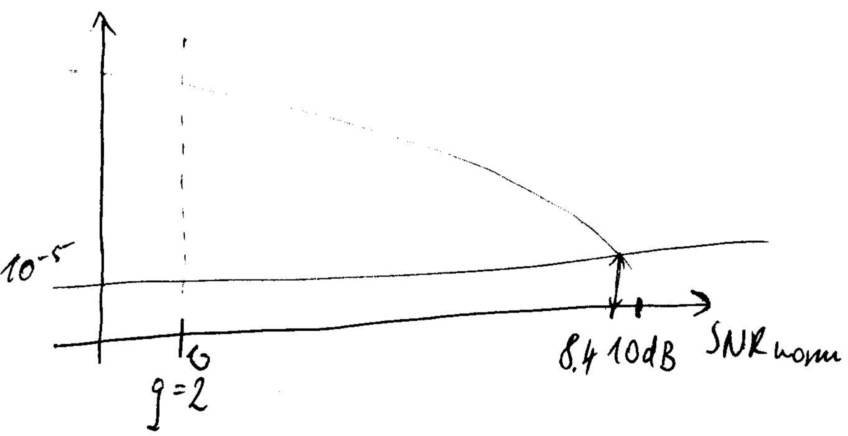
Két féle energia normalizálás:

$\frac{E_b}{N_0}$; $SNR_{norm} = \frac{SNR}{2^{\varrho}-1}$ $\qquad \varrho = \log_2 M^2 = 2\cdot\log_2 M$

$M^2 = 2^{\varrho}$

$$SNR_{norm} = \frac{SNR}{M^2-1} = \frac{E_s/N_0}{M^2-1}$$

$$P_s \simeq 4\cdot Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) = 4\cdot Q\left(\sqrt{3\,SNR_{norm}}\right) \quad SNR_{norm} \text{ ftlen } M^2\text{-től}$$



$\boxed{12\ EA}$ $\boxed{4}$

2017.03.27.

Kis jelterek teljesítőképessége

Konstelláció:

$\{\underline{x}, \dots, x_M\}$ $x \in \mathbb{R}^N$ ha $N = 1, 2$

$\mathcal{A} = \{a_j, 1 \le j \le M\}$

$\rho = 2 \cdot \frac{1}{N} \log_2(M)$ spektrális hatékonyság

$\boxed{E_s = \frac{2}{N} E(\mathcal{A})}$ $\left\{\frac{W}{2Dim}\right\}$ $E_b = \frac{E(\mathcal{A})}{\log_2 M}$ $E_b = \frac{E_s}{\rho}$

jeltér

$\boxed{E\{\mathcal{A}\} = \frac{1}{M} \cdot \sum_j \|a_j\|^2}$ $\boxed{d_{min}(\mathcal{A})}$

$\boxed{K_{min}(\mathcal{A})}$ ⇝ $d_{min}(\mathcal{A})$-ra levő pontok átlagos száma

⇝ súlyozza a libafor.t!

$d_{min}^2(\mathcal{A})$ ⇒ normalizálom $E(\mathcal{A})$-ra, E_s-re, E_b-re

Hf: BPSK, QPSK, 4AM, 16QAM

(BPSK: +1, −1; QPSK: +1, −1; 4AM: ±1, ±3)

a) $E(\mathcal{A}) = 1$, $d_{min} = 2$, $K_{min}(\mathcal{A}) = 1$ ✓

b) $E(\mathcal{A}) = 2$, $K_{min} = 2$, $d_{min} = 1$

c) $E(\mathcal{A}) = \frac{20}{4} = 5$, $K_{min} = 1,5$, $d_{min} = 1$

d) ~~$E(\mathcal{A})$~~ $K_{min} = 3$

e) $E(\mathcal{A}) = 4,38$ ⇝ $K_{min} = \cancel{3,5}\ 4,125$

szomszédok száma vs. energia

K_{min}-től lineárisan függ a $P_r(e)$

energiától exponenciálisan!

13. EA ①

Hirbelen
2017.03.28.

Kis jelterek teljesítőképessége:

$\mathcal{X}, E(\mathcal{X}), \varrho, d_{min}(\mathcal{X}), k_{min}(\mathcal{X}), E_b, E_s$

A konstellációk Descartes szorzata:

$\mathcal{A}, \mathcal{A}^k$ — k-szoros Descartes szorzat

$\mathcal{A}^k = \{\underline{x}_{j1}, \ldots, \underline{x}_{jk}\} \to j, k \in (1 \ldots M], x_k \in \mathcal{A}\}$ bonyolultabb vektortér

kiterjesztés $\underline{k}$ faktorral!

- $dim(\mathcal{A}) = N$, méret: M
- $dim(\mathcal{A}^k) = K \cdot N$, méret: M^k $\rightsquigarrow$ bitátvitel $\Rightarrow k \cdot \log_2 M$
  $(N' = K \cdot N)$
- $K_{min}\{\mathcal{A}^k\} = K \cdot k_{min}\{\mathcal{A}\}$ $\rightsquigarrow$ szomszédok száma
- $E_s = \frac{2}{N'}$ $E_s(\mathcal{A}^k) = \frac{2}{K \cdot N} \cdot K \cdot E_s \Rightarrow E_s' = \frac{2}{N} \cdot E_s$
- $E_b' = \frac{E\{\mathcal{A}^k\}}{k \cdot \log_2 M} = E_b$
- $d_{min}^2 = d_{min}'^2$

Kódkiterjesztés!

$\boxed{C \subset \mathcal{A}^k}$ (C: kód) bitsebesség csökken, de d_{min} nő ezzel kódolási nyereséget tudok elérni

---

Minimális távolságú dekódolás:

$\boxed{\underline{y} = \underline{x} + \underline{\nu}}$ $\quad P_\nu(\underline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}}^N \cdot e^{\left(-\frac{\|\underline{z}\|^2}{2\sigma^2}\right)}$

Bayes döntés: maximális aposteriori valószínűséget kell elérni

$$\boxed{\underbrace{p(\underline{a}_j | \underline{y})}_{\text{aposteriori}} = \frac{p(\underline{y}, \underline{a}_j) \cdot \overbrace{p(\underline{a}_j)}^{\text{apriori}}}{\underbrace{p(\underline{y})}_{\text{adott érték}}}} \to P(\underline{a}_j) \cdot p(\underline{y} | \underline{a}_j) \Rightarrow \max$$

MAP:

ML:

|13.EA| 2

2012.03.28.
Kiírtam

$$p(y|a_j) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \cdot \exp\left(-\frac{\|y-a_j\|^2}{2\sigma^2}\right)$$ a legközelebbi szomszédra kell döntenem

---

$\mathcal{A}^k, Pr(e') \rightarrow \mathcal{A}$ ismert $Pr(e)$ hogy tudom $\mathcal{A}^k$-ban $Pr(e')$-t

$\downarrow$

$$Pr(e') = 1 - (1 - Pr(e))^k = 1 - \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \binom{K}{k} Pr(e)^k \simeq 1 + K \cdot Pr(e) \Rightarrow K \cdot Pr(e)$$

$$Pr(e') = K \cdot Pr(e)$$

Bináris esetben: $\pm\alpha$, $E_b = \alpha^2$

$$P_b = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$Pr(e') = K \cdot Q\left(\sqrt{2 \cdot \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

define: $P_b' = \frac{Pr(e')}{K} = Q\left(\sqrt{K \frac{E_b}{N_0}}\right)$ furcsa paraméter de nem változott itt.

1 bitre eső hibaarány

$$Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2(\mathcal{A})}{2N_0}}\right) \cdot \frac{K_{min}}{\log_2|\mathcal{A}|} \simeq P_b \qquad K_b = \frac{K_{min}}{\log_2|\mathcal{A}|}$$

számosság

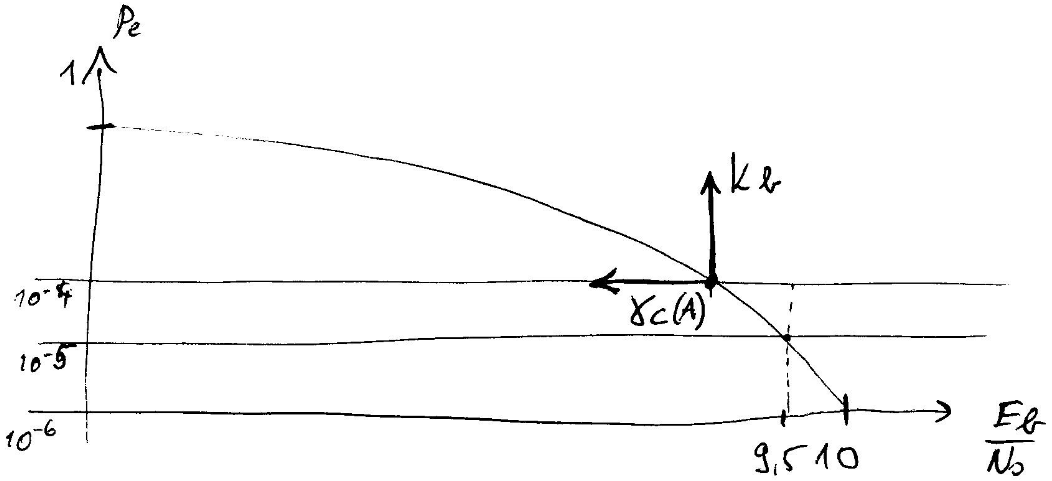
$$P_b = K_b(\mathcal{A}) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2(\mathcal{A})}{2N_0}}\right); \quad Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

γ_c: névleges kódolási nyereség: $\frac{d_{min}^2(\mathcal{A})}{4E_b} = \gamma_c$

$$\boxed{P_b = K_b(\mathcal{A}) \cdot Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0} \cdot \gamma_c(\mathcal{A})}\right)}$$

13 EA (3)

2017.01.28.
Hideku



$\gamma_{eff}(A)\,[dB] \cong \gamma_c(A) - 0{,}2\,\log_2(K_b(A))$

$\gamma_c(A)$ [dB], $\log_2(K_b(A))$ [dB]

effektív kódolási nyereség (10^{-5} hibához)

Ortogonális és rokon jelterek:

1. ortogonális jeltér:

M, $\mathbb{R}^N$ vektorok de amúgy $M = N$

$A = \{a_j,\ 1 \le j \le M\}$

$\langle a_j, a_i \rangle = 0$ ha $j \ne i$

$= E$ ha $j = i$ ⇝ minden vektor hossza $= \sqrt{E}$

$d_{min}^2 = 2E$

$E(A) = E$

$\varrho(A) = \frac{2}{M} \cdot \log_2 M$ ⇝ ez nem túl jó, ha nő az M, csökken a ϱ

$E_s(A) = \frac{2}{M} \cdot E(A) = \frac{2E}{M}$ ⇝ energia csökken ha M nő

$E_b(A) = \frac{E_s(A)}{\varrho(A)} = \frac{E(A)}{\log_2 M}$

Q-t közelítjük

$P_{r(e)}(A) = \underset{\text{sokaság}}{(M-1)}\, Q\left(\sqrt{\frac{E(A)}{N_0}}\right) = (M-1)\, Q\left(\sqrt{\frac{E_b \cdot \log_2 M}{N_0}}\right) \simeq (M-1) \cdot \exp\left(-\frac{E_b}{N_0 \cdot 2} \cdot \log_2 M\right) =$

$\le \exp(\ln M) \cdot \exp\left(-\frac{E_b}{N_0 2} \cdot \log_2 M\right) = \exp\left(\ln M \cdot \left(1 - \frac{E_b}{N_0 \cdot 2} \cdot \frac{1}{\ln 2}\right)\right)$

ha $\frac{E_b}{N_0 \cdot 2} \cdot \frac{1}{\ln 2} > 1$ ⇝ $\boxed{\frac{E_b}{N_0} > 2 \cdot \ln 2}$

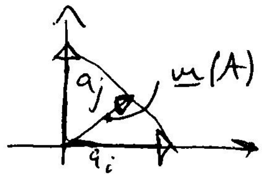
Hibelen
2017.03.28.

majdnem elértük a Shannon korlátot!
(ln 2 közelében vagyunk)

$$\frac{E_b}{N_0} > 2 \ln 2$$

Szimplex jeltér:

A ortogon ~~jelalak~~ jeltér



$$|A| = M, \quad A = \{ a_j \mid j = 1 \ldots M \} \quad \langle a_j, a_i \rangle = E \cdot \delta_{ji}$$

$$\underline{m}(A) = \frac{\sum_j a_j}{M}$$ átlagérték, küldök feleslegesen egy konstanst!

$$= \sum_{j=1}^{M} a_j \cdot \frac{1}{M}$$ Szimplex: jeltér − átlag jeltér

legyen: $\underline{a}_j = a_j - \underline{m}(A)$ kisebb energiájú jeltér lesz

$$d_{min}^2(A') = \|a_i' - a_j'\|^2 = \|a_i - a_j\|^2 = 2 \cdot E(A)$$

mindkét vektorból ugyanazt vonom le → d_{min} nem változik!

$$\varrho(A') = \varrho(A)$$

$$E_s(A') = \frac{2}{M} \cdot E(A') \Rightarrow \Big[E(A') = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{M} \|a_j\|^2 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{M} \|a_j - \underline{m}(A)\|^2 =$$

$$\frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{M} (a_j - m(A))(a_j - m(A)) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{M} \underbrace{\|a_j\|^2}_{E(A)} - 2 \cdot \underbrace{\langle m(A), a_j \rangle}_{\langle a_j, \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} a_i \rangle \Rightarrow \frac{\|a_j\|^2}{M} = \frac{E(A)}{M}} + \|m(A)\|^2$$

$$\|\underline{m}(A)\|^2 = \langle \sum_j^M a_j, \sum_i^M a_i \rangle = \frac{M \cdot E(A)}{M^2} = \frac{E(A)}{M} \Big]$$

M darab találkozás van!

$$E(A') = E(A) - 2 \frac{EA}{M} + \frac{EA}{M} = EA \cdot \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$ ha M nő ~ eltűnik

igazából a jeltér dimenzióját csökkentem 1-el!

$\boxed{13\ \text{EA}}$ (5)

Hirkelu
2017.03.28.

~~hubieramos planteado~~
~~hubiera llamado~~
~~hubierais~~

~~múltan - kiintetni~~

~~s/a~~

30/8

Bi-ortogonális jeltér

$A'' = \pm A^* \;;\; M'' = 2 \cdot M^* ,\; E(A'') = E(A^*)$ $\quad A^*$: ortogon. tér

inverz jelek

$d_{min}(A'') = d_{min}(A^*)$ $\quad \rho(A'') = \frac{2}{N} \log_2 (M'') = \frac{2}{M} \cdot (1 + \log_2 M)$

$m(A'') = 0$

$N'' = N^* = M$

14. EA ①

Kirkelun
2017. 04. 03.

Biortogonális jeltér

$A'' = \pm A$

origótól $\sqrt{E}$-re

M darab jel $\rightsquigarrow M'' = 2 \cdot M$; $E(A'') = E(A)$

$d_{min}^2(A'') = d_{min}^2(A) = 2\,E(A)$

$m(A'') = 0; \ldots \quad N'' = N = M$

várható érték vektor

$\rho(A'') = \frac{2}{N} \log_2 M'' = \frac{2}{N} \cdot \log_2(2M)$

— · —

legyen

$M'' = 2 \cdot M \overset{\downarrow}{=} 2^k \qquad M = 2^{k-1}$

$\rho = \frac{2}{2^{k-1}} \cdot \log_2 \overset{2^k}{M''} = \frac{2 \cdot k}{2^{k-1}} \cancel{\log_2 M''} = \boxed{4k \cdot 2^{-k}}$ ha k nagy $\Rightarrow$ romlik a hatékonyság.

$\gamma_c(A'') = \frac{d_{min}^2(A'')}{4 E_b(A'')} = \frac{2 \cdot E(A)}{4 \frac{E(A)}{k}} = \boxed{\frac{k}{2}}$

névleges kódolási nyereség

$K_{min}(A'') = 2M - 2 = \boxed{2^k - 2}$

legköz. szomszédok száma

$K_b = \frac{K_{min}}{\log_2 |M|}$

$\underbrace{\gamma_{c_{eff}} = \gamma_c - 0{,}2 \cdot \log_2 K_b}_{dB}$ bináris esetben 10^{-5} hiba esetén

— · —

a) $k = 4$ 4 bit/symbol

$M = 2^k = 16$

$\rho = 4k \cdot 2^{-k} = 1$ bps/Hz

$\boxed{E_b = \frac{E(A)}{4}}$

$K_b = \frac{K_{min}}{\log_2 M} = \frac{K_{min}}{4} = \frac{2^k - 2}{4} = \frac{14}{4} = 3{,}5$

$\gamma_c = \underline{2} \quad \left(\frac{k}{2}\right)$

$K_b = 3{,}5$

$\gamma_{c_{eff}} = 2 - 0.2 \log_2 3.5$

14 EA. (2)

2016.04.03
Hirkelm

$k=6$
$M=32$ $\quad \varrho = \frac{2}{2^{k-1}} \log_2 2^k = \frac{12}{32}$ $\quad E_b = \frac{E(A)}{6}$

$K_b = \frac{2^k-2}{k} = \frac{62}{6}$ $\quad \gamma_c = 3$

$\gamma_{eff} = 4{,}1\,dB$

$k=8$
$M=128$
$\gamma_{eff} = 6\,dB - 0.2 \log_2 \frac{254}{8} \simeq 5\,dB$

Bináris kódok világa:

Jel konstellációk

$2PAM: \pm\alpha \to (0,1)$

$C \subseteq (0,1)^N$ N hosszú bin. sorozatok altere a kód(C); $F2^N$-tér

$C \in F_2^N$

$A = \{\pm\alpha\}$; $\{S: (0,1) \Rightarrow A\}$ $\quad s(0) = +\alpha$

(x): boole változó $\quad s(1) = -\alpha$

$S(x) = \alpha \cdot (-1)^x$ $\quad s(x) = \alpha \cdot (1-2x)$

$x=0;\ x=1$

---

ha $n=3$ $\quad \boxed{\{000, 011, 110, 101\} = C}$ Hamming-kód

$\varrho = \frac{2 \cdot N}{3} = \frac{4}{3}$ [bps/Hz] [bit/2 Dim] $\quad E(s(C)) = N \cdot \alpha^2 = 3 \cdot \alpha^2$ $\quad N=3$

$\boxed{\varrho(C)}$

$d_{min}^2(C) = 2 \cdot (2\alpha)^2 = 8\alpha^2$; $\quad E_b = \frac{3}{2} \cdot \alpha^2$

Euklideszi tér trafó után!

$\gamma_c(s(C)) = \frac{d_{min}^2(s(C))}{4 E_b(s(C))} = \frac{4}{3}$ ✓ sebességet vettek el, de d_{min}^2-et nyertek!

2016.04.03.

Hirkelm

- kódolásban nincs optimum (mindig emberekről van elnevezve)

Bináris lineáris kódok, mint alterek:

$F_2 = \{0,1\}$ Műveletek a Galois test felett: $+, \cdot,$

$0+0=0$ antivalencia művelet (XOR) $0\times 0=0$

$0+1=1$ $0\times 1=0$

$1+0=1$ $1\times 0=0$ (AND)

$1+1=0$ $1\times 1=1$

$\alpha+0=\alpha$

$\alpha * 1 = \alpha$

Inverz is létezik

$\alpha, -\alpha$ $\alpha+(-\alpha)=0$ $\boxed{-\alpha=\alpha}$

Skalárral szorzás, összeadás:

$\mathbb{F}$ V vektortér, $\underline{v}, \underline{v}' \in V \Rightarrow \underline{v}+\underline{v}' \in V$

és $\underline{v}+\underline{v}=0$ (van null elem!)

$(\mathbb{F}_2)^N$ $C \subseteq (\mathbb{F}_2)^N$ lineáris kód (ez egy altér, zárt az összeadásra)

- a komm. lin. vektor mindegyik!

$C(G)$ $G=(g_1 \cdots g_k)$

$$C(G)=\left\{\sum_j g_j \cdot a_j \,;\, a_j \in \mathbb{F}_2,\ 1\le j\le k\right\}$$

Boole világban vagyunk!

ez a lineáris kód, benne van minden olyan vektor ami így előállítható.

- 2^k különböző vektorok van $\Rightarrow$ k bit/szimbólum HA g_j-k lineárisan ftlen
- ez a kód generátor polinom halmaz
- Generátor mátrixba rendezhető! $(k\times n)$ méretű mátrix

$\dim(V)=k$ független generátorok száma!

2016.04.03.
Kiss

(n, k) ; $\mathbb{F}_2^n$; $\underline{0}$

Példák:

(n, n) kód
$(n, 0) \to$ nullvektor
$(n, 1) \to \{\underline{0}, \underline{1}\}$
$(n, n-1) \to \{\underline{0},$ $\rightsquigarrow$ páros számú 1-esek vannak az összes kódszóban.
Single parity check code
fel tudom ismerni a hibát, de nem tudom hogy hol!

15EA ①

Kirkelun
2017. 04. 04.

$G(\mathcal{G}) = \left\{\sum_j a_j g_j ; a_j \in \mathbb{F}_2 , 1 \le j \le k\right\}$ lineáris kombináció, kódból!

2^k elem van k darab a_j van!

000, 011, 101, 110 Hamming kód

mi ennek a generátora? válasszunk ki egy elemet! ↓ $n=3$, $k=2$, $n-k=1$

generálható bármely 2 nem ∅ elemből $C^{\perp}: (000, 111)$

Hamming metrika:

$\mathbb{F}_2^n$ tér ; $w_{Hamming}(\underline{x})$ adott vektorban az 1'ek száma → Hamming súly

és ez metrika is egyben

- ≥ 0 $w_H(\underline{x}) = 0$ ha $\underline{x} = \underline{0}$
- $w_H(\underline{x}) = w_H(-\underline{x})$ és mivel $\underline{x} = -\underline{x}$ ezért ez teljesül! [szimmetria]
- $w_H(\underline{x}+\underline{y}) \le w_H(\underline{x}) + w_H(\underline{y})$ $\quad \begin{matrix}0110\\0100\end{matrix} + \Rightarrow 0010$ ✓

$d(\underline{x},\underline{y}) = w_H(\underline{x}-\underline{y}) = w_H(\underline{x}+\underline{y})$ ezek mind teljesülnek az $\mathbb{F}_2^n$ térben

---

Bin. lin. kódok:

ez csoport!

mert csoport!

$\underline{x} \in C$ és $\underline{y} \in C \to \underline{x}+\underline{y} \in C$

$\{\underline{x}+\underline{y} \mid \underline{y} \in C\}$; $\underline{x} + C = C$

minden lehetséges elemen végig megyek

minden elemet az x fog adni

Távolság invariancia tétel:

$\underline{x} \in C$; $\underline{y}$ $d_H(\underline{x},\underline{y}) \Leftrightarrow d(\underline{0},\underline{y})$

$\underline{y}$ végigmegy az összes C elemen!

a referencia pontra invariáns a Hamming távolság

$d = \min\limits_{x \neq y \in C} d_H(\underline{x},\underline{y}) \Rightarrow$ ~~...~~ legkisebb Hamming súlyú vektor lesz!

min. Hamming távolság

(n, k, d) bin. lin. kód

hossz, kódszó szám, ~~Hamming~~ min Hamming

15 EA 2

Kirhelm
2017.04.04.

a) (n, n) $d = 1$ N_d = d távolságra levő kódszavak száma

$N_1 = n$

b) $(n, n-1)$ $d = 2$ single par. check

$N_2 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{N}{2}$

c) $(n, 1)$ $d = n$

$N_n = 1$

d) $(n, 0)$ $d = \infty$

Skalár szorzat, $\mathbb{F}_2^n$-ben (*)

$\langle \underline{x}, y \rangle = \sum_j x_j * y_j$

$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0$ ⇝ de ez nem jelent $\perp$-et, itt nincs ortonormált bázis!

↳ igaz ha páros számú 1-es van!

$\langle x, y \rangle = 0 \cancel{\Leftrightarrow} x \perp y$

C duális kód, $C^{\perp}$

$\underline{x} \in C$; k

$C^{\perp} = \{ y \in \mathbb{F}_2^n ; \langle y, x \rangle = 0 \text{ minden } x \in C\text{-re} \}$

$C \Rightarrow G$, k (n, k)

$C^{\perp} \Rightarrow H$ $n-k$ $(n, n-k)$ $(C^{\perp})^{\perp} = C$

$C = \{ \underline{a} \underset{k \times n}{\underline{G}} ; \underline{a} \in \mathbb{F}_2^n \}$ ha $\underline{a} \underline{G} \underline{H}^T \underline{b}^T = \underline{0}$ $\boxed{\underline{G} \underline{H}^T = \underline{0}}$

$C^{\perp} = \{ \underline{b} \underset{n-k \times n}{\underline{H}} , \underline{b} \in \mathbb{F}_2^{n-k} \}$

$\boxed{\underline{x} \underline{H}^T = \underline{0}}$

egy $\underline{x}$ akkor is csak akkor kódszó →
ha a duális kód generátormátrixával vett
szorzata = 0

15 EA ③

Hidvégi 2017.04.06

a) (n, n) duálisa ; $(n, \cancel{n-k}\ \emptyset)$

b) $(n, (n-1))$ duálisa, $(n, 1)$

c) $(2, 1)$ duálisa $(2, 1)$

[00, 11] önduális kód

Diszkrét bin. blokk kódok az euklideszi térben:

(n, k, d) ; $S(C)$; N_d alkalmazzuk $S(\cdot)$-et kódokra!

$\mathcal{A} = [\pm\alpha]$ $\begin{matrix} 0 \to \alpha \\ 1 \to -\alpha \end{matrix}$ dimenziószám: $N = n$

$\rho = \dfrac{2 \cdot k}{n}$ ⇝ 2-nél kisebb hatékonyság lesz!

$\underline{x} \Rightarrow \{\pm\alpha \ldots \pm\alpha\}$

E_S = minimális energia $= E(S(C)) = n \cdot \alpha^2$; $\alpha^2 \cdot n$ ⇝ vektor energiája

$E_b = \dfrac{n \cdot \alpha^2}{k}$

$\underline{x}, \underline{y} \in C \rightsquigarrow \|S(\underline{x}) - S(\underline{y})\|^2 = 4 \cdot \alpha^2 d_H(\underline{x}, \underline{y})$

$\langle s(\underline{x}), s(\underline{y}) \rangle = (n - d_H(\underline{x}, \underline{y})) \cdot \alpha^2 + d_H(\underline{x}, \underline{y})(-\alpha^2) =$

$[n - 2d_H(x, y)]\,\alpha^2$

$$\boxed{d_{min}^2(s(C)) = 4\alpha^2 d}$$

$$\gamma_c = \frac{d_{min}^2(s(C))}{4 \cdot E_b} = \frac{4\alpha^2 \cdot d}{4 \cdot \frac{n\alpha^2}{k}} = \frac{k \cdot d}{n}$$

$K_b(s(C)) = \dfrac{N_d}{k}$

$$\boxed{P_{err_{bit}} \cong \frac{N_d}{k} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{k \cdot d}{n} \frac{2 \cdot E_b}{N_0}}\right)}$$

Példák: $C, (n, k, d)$; $\underline{x} \in C$

$P_{\underline{x}} = \sum_i x_i$ < páros 1-es → ∅ ; ptlan 1-es → 1

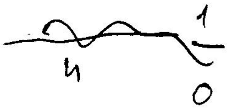
paritás bit

C' ; $(\underline{x}, P_x)$ n+1 hosszú kód

paritás bit

15 EA 4

Hibelen
2017.04.04



$(\underline{x}+y,\ p_x+p_y) \in C'$

— o —

$C',\ d',\ (n+1,\ k,\ d=?)$ ha páratlan a d → nő eggyel
páros a d → nem változik! d'

$\frac{k\cdot d}{n} \lessgtr \frac{k\cdot(d+1)}{n+1}$ d és n viszonyától függ de $d<n$

ezért $+1$ esetén jobb lesz!

(2) ha elhagyom a kód közös elemét → javítom a hatékonyságot

pl: elhagyom a $\emptyset$-kat

$n \to n-1$; $k'=k$;

Reed-Müller kód:

(R-M)

$n \leq 32$ esetén a legjobbak! d_{min} értelemben

d: mindig 2 hatványa

- RM kódok generálása (kosza 2× ező algoritmus)

$RM(r,m)$ $m\geq 0$ és $0\leq r\leq m$ vannak kódok!

$n=2^m$ $d=2^{m-r}$ ($r\leq m$)
hosszúság!

ha $r=m$ → $d_{min}=1$
$RM(m,m) \Rightarrow 2^m$ hosszú bin. kód
$(2^m, 2^m, 1)$ — kiinduló kód!

- $m=0$ → 1 hosszú kód!

$RM(0,0) \to [0; 1]$ ✓

$RM(-1,m) = [2^m, 0, \infty)$ $[\underbrace{0000\ldots}_{2^m}]$

$RM(-1,0) = 0$

— o —

$RM(r,m) = \{(\underline{u}, \underline{u}+\underline{v}) \mid \underline{u} \in RM(r,m-1),\ \underline{v} \in RM(r-1,m-1)\}$ ciklikus algoritmus!

16. EA. 1

Kicsilevél
2017.04.10.

Reed Müller kódcsalád

$RM(r,m)$; d_{min} 2 hatványa, $2^m = n$ kódhossz

(n,k,d) 2^k

[n=32-ig ezek a legjobb kódok teljesítő képesség szerint)

$m \geq 0$ $1 \leq r \leq m$

$d = 2^{m-r}$

1) ha $r=m$, $RM(m,m)$ $d_{min}=1$, $2^m=n$, $k=2^m$,

$(2^m, 2^m, 1) = n, k, d$ -> univerzális kód

2) $r=-1$ kivételesen!

$RM(-1,m)$; 2^m ; $k \hat{=} 0$; $d=\infty$ (csak a 0000 ... lehet)

$\boxed{(2^m, 0, \infty) \text{ definíció}}$

3) $m=\emptyset$

$RM(-1,0)$ $(n=1, k=0, d=\infty)$

$RM(0,0)$ $(\underset{2^m=1}{n=1}, k=1, d=1)$

definíció
nekem ezek a kódok

Plotkin algoritmus:

$RM(r,m) = \{\underline{u}, \underline{v}+\underline{u}\} \mid \underline{u} \in RM(r,m-1), \underline{v} \in RM(r-1,m-1)\}$ kossz 2x algoritmus

$RM(1,2)$ ehhez kell: $RM(0,1)$ és $RM(1,1)$

$RM(0,1)$: $\{(0,0),(1,1)\}$ $\rightarrow \underline{v}$

$RM(1,1)$: $\{00, 01, 10, 11\}$ $\rightarrow u$

$RM(1,2)$ $2^m=4$, $2^{m-r}=2$

$k=3$ mert $2^k=8$ 8 féle kombináció lehet

$\underline{u}, \underline{u}$ ha $\underline{v}=00$

$u, \underline{u}+(11)$ ez u inverze!

$RM(1,2)$: [0000, 0101, 1010, 1111, 0011, 0110, 1001, 1100]

$N_2 = 6$
2 távolságra levő nemszódok száma.

$d_{min}=2$

16.EA (2)

Hikelen
2017.04.10.

a generált kód is csoport lesz!

Tulajdonságok:

- $RM(r,m)$, $n=2^m$, $k(r,m)$
- $\boxed{k(r,m) = k(r,m-1) + k(r-1,m-1)}$ számosság növekedik, leírások adódnak össze
- $RM(r-1,m) \subseteq RM(r,m)$ *
- $RM(r,m)$ $d = 2^{m-r}$ ha $r=-1 \to d=\infty$
- $k(r,m) = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}$ $\rightsquigarrow$ ezért volt $RM(1,2)$-nél $k=3$ $(2^k=8)$
- $k(r,m) = \sum_{0\le j\le r} \binom{m-1}{j} + \sum_{0\le j\le r-1} \binom{m-1}{j} = 1 + \sum_{1\le j\le r} \left[\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1}\right] \overset{?}{=} \sum_{0\le j\le r} \binom{m}{j}$

ez a Pascal háromszög!

$P\Delta$ m-edik sorának r-ig vett összege.

$d = 2^{m-r}$

1. ha $\underline{u} = 0$ $d = 2^{(m-1)-(r-1)} = 2^{m-r}$
2. ha $\underline{u}+\underline{v} = 0$, $\underline{u} = \underline{v}$
3. ha $u \neq 0$, $\underline{u}+\underline{v} \in RM(r,m-1) \to$ * miatt!

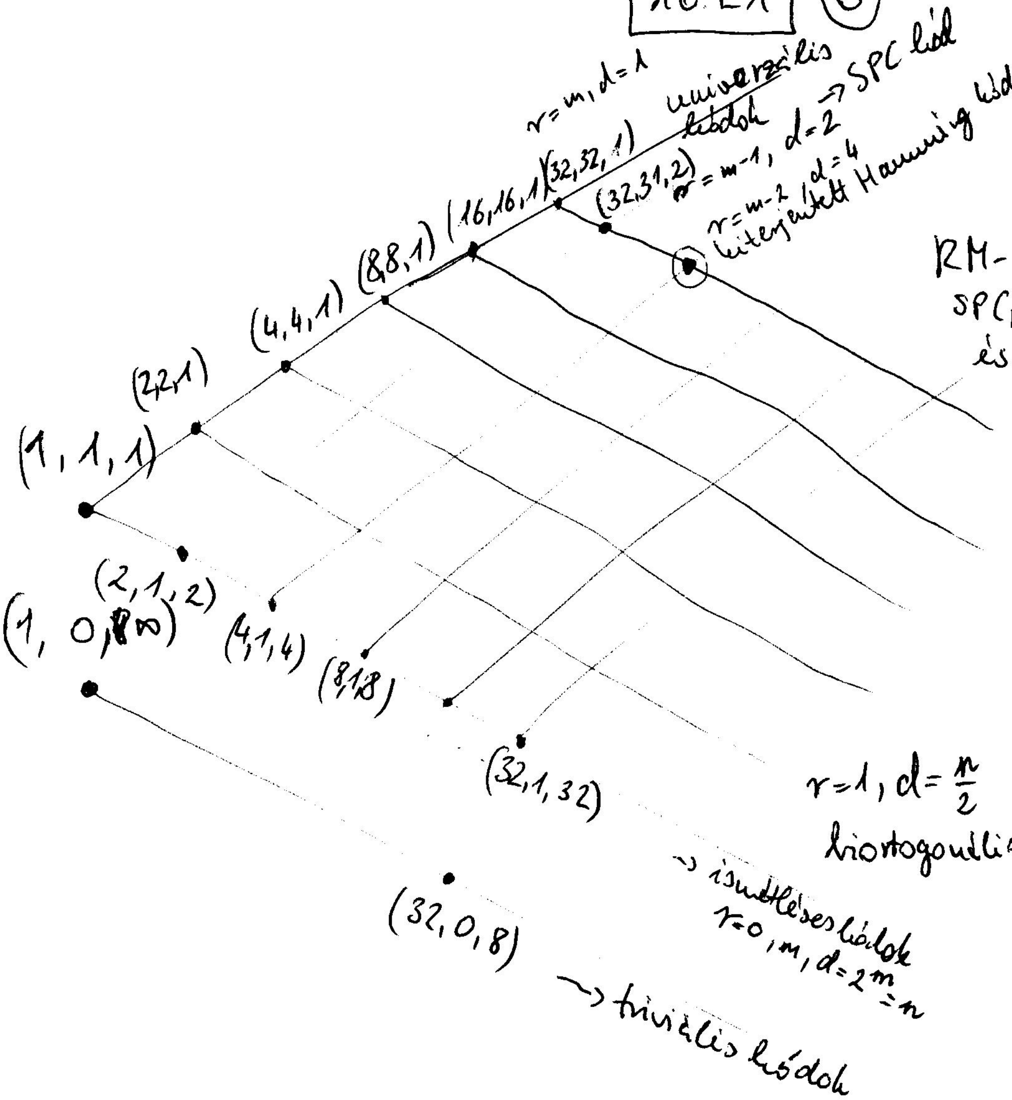
$$w_H(\underline{u}, \underline{u}+\underline{v}) = \underbrace{w_H(\underline{u})}_{2^{m-1-r}} + \underbrace{w_H(\underline{u}+\underline{v})}_{+\,2^{m-1-r}} = 2^{m-r}$$

~~$Nd = 2 \cdot \prod_{0\le j\le 2^{m-r}} \frac{2^{m-j}-1}{2^{m-r}-1}$~~

$$Nd = 2^r \cdot \prod_{0\le j\le 2^{m-r-1}} \frac{2^{m-j}-1}{2^{m-r-1}-1}$$

irodalomban!

2017.04.10.



RM-el lehet SPC, Hamming kódot és sok mást is lehet örvelni

	n	d	k	kódok szám	Nd
$m = 6$, $r = 6$	64	1	64	2^{64}	64
$r=5$	⋮	2	63		
		4	57		
⋮		8	42		
		16			
		32			
$r=0$		64	1	2	1
$r=-1$		∞	0	1	0

$r=5$ esetén k: $\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\dots\binom{6}{5}+\cancel{\binom{6}{6}}=2^6-1$

$r=4$ $\quad k=57 \quad \binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}$

$r=3$ $\quad k=42 \quad \binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}$ X

mindig eggyel kevesebb Pascal elemet ~~vonok le~~ adok össze!

Nd képlettel: $m=6$, $r=5$

$$Nd = 2^5 \cdot \prod_{0\le j\le 1} \dots = 2^5\cdot 2^{6-1} = 2016$$

ha $r=\frac{m}{2}$ nagy lesz Nd

$\boxed{16EA}$ 4

$r = m-1$; SPC ; $d = 2$

$\gamma_c = 2 \cdot \frac{k}{n}$ (3dB virtuális kódolási nyereség) $n = 2^m$ $k = 2^m - 1$
(Pascal utolsó elemét vonjuk le)

$N_d = \frac{2^m (2^m - 1)}{2} = \binom{n}{2} = \binom{2^m}{2}$

$K_{bit} = \frac{N_d}{k} = 2^{m-1}$

Perr 10^{-5} $\gamma_{eff}(A) \approx \gamma_c(A) - 0{,}2 \log_2(K_b(A))$ dB

milyen m-et (n-et) válasszak, hogy γ_{eff} optimum legyen

$$\gamma_{eff} = \frac{\gamma_c(A)}{10^{\frac{0{,}2 \log_2(K_b(A))}{10}}} = \gamma_c \cdot 10^{-0.02 \log_2 K_b(A)} = \quad \frac{d\gamma_{eff}}{dm} = ?$$

$\boxed{m_{opt} \cong 4}$, SPC esetén $\frac{k}{n}$ közelíti 2-t $\boxed{\gamma_{max} \simeq 1{,}63 \text{ dB}}$

16 hosszú

$r = m-2$ Extended Hamming-code

$N_d = \binom{n}{4}$ $m_{opt} \Rightarrow$ nem tudom zárt alakban! $\rightarrow$ ábrán látható

$m_{opt} \simeq 6$, $\gamma_{max} = 2.5$ dB

$RM(1, m)$ $n = 2^m$, $d = 2^{m-1}$, $k = 1 + m$ kódszó szám $= 2^{m+1}$

Pascal első eleme $\binom{m}{1}$

k különböző elem van!

- van olyan melyenek $\emptyset$ a Hamming súlya: $\emptyset$ $\rightarrow$ csupa '0'
- 1 olyan kódszó van, ami $w_H = 2^m$ $\rightarrow$ csupa '1'

maradék $2^{m+1} - 2$ elemre: $w_H = 2^{m-1}$ $\rightarrow$ 0-tól ugyanakkora távolságra

$\rightarrow$ biortogonális jeltér van!

ha transzformáljuk Euklideszi-térbe $\pm\alpha$ esetén!

17. EA ①

Hirkelen
2017. 04. 11.

Reed-Müller kódok:

$\boxed{RM(1,m)}$, $n = 2^m$, $d = 2^{m-r} = 2^{m-1}$

$k = m+1$ (Pascal Δ, $\binom{m}{0} + \binom{m}{1}$)

$r_C = \frac{k \cdot d}{n} = \frac{(m+1)\, 2^{m-1}}{2^m} = \frac{m+1}{2}$.

- 1 db w_H 0
- 1 db 2^m

$2^{m+1} - 2$ darab $\Rightarrow w_H\ 2^{m-1}$

darab	w_H
1	0
1	$2^m = n$
$2^{m+1} - 2$	2^{m-1}

- $s(\underline{x})$ térbe átvive, ez egy biortogonális jelkészlet

- $RM(1,m) = \{\underline{u} + \underline{u} + \underline{v} \mid \underline{u} \in RM(1, m-1),\ \underline{v} \in RM(0, m-1)$

$RM(0, m-1) = (\underline{1}, \underline{0})$ (k^{m-1} komin csak 1, csak $\emptyset$)

$RM(1,1) = \{00, 01, 10, 11\}$

$(\underline{u}, \underline{u} + \underline{1})$; $(\underline{u}, \underline{u} + \underline{0})$ u, vagy u inverz kerül bele, ezért lesz biortogonális jelkészlet! (van maga + inverze a térben)

$\langle s(\underline{u}, \underline{u}),\ s(\underline{u}, \underline{u}+1) \rangle = \langle s(\underline{u}), s(\underline{u}) \rangle + \langle s(\underline{u}), s(\underline{u}+1) \rangle =$

s(u) inverze! ezért ez $\emptyset$!

~~s(u), s(u)~~, $\langle s(\underline{u}, \underline{u}),\ s(\underline{u}', \underline{u}') \rangle = \langle s(\underline{u}), s(\underline{u}') \rangle + \langle s(\underline{u}), s(\underline{u}') \rangle = 2 \cdot \langle s(\underline{u}), s(\underline{u}') \rangle$

ha $u \perp u' \Rightarrow \emptyset$
$u \not\perp u' \Rightarrow -u'$ inverz!

$RM(1,m)$, C

C': $n = 2^m$, $k = 1 + m - 1 = m$, $d_{min} = 2^{m-r} = 2^{m-1}$ (adott helyiértéken legyen $\emptyset$)

ez egy ortogonális jelkészlet, kidobtuk mindenkinek az inverzét!

C'': $n = 2^m - 1$, $k = m$, $d_{min} = 2^{m-1}$

csak a helyiértéket dobtuk ki

van közös $\emptyset$ az oszlopokban, minden kódszóból 1 elemet kidobunk, a közös 0-kat kidobjuk

ezeknek a kódoknak az átlaga $= \emptyset$

itt mindegyik α, mind α

átlag α

$w(1) = \alpha$

17. EA ②

Hideghen
2017. 04. 11.

RM kódok tulajdonságai:

$\varrho, \gamma_c, N_d, K_{bit}, \gamma_{eff}$ — Táblázatban ismertetett!

≤ 2 akár 7dB

pl. $(64,22,16) \rightsquigarrow 6\ dB$

Dekódolás

bináris világ!

Kemény, lágy döntés

Maximális megbízhatóság: legjobb döntés az euklid. táv alapján

$\underline{r}, s(\underline{x})$

$\|\underline{r} - s(\underline{x})\|^2$ minimális (Euklideszi értelemben)

$\|s(x)\|^2$ rögzített: mindig $n \cdot \alpha^2$

felbontás: $\boxed{\langle \underline{r}, s(\underline{x}) \rangle \text{ optimalizálására kell törekedni!}}$

$$\langle \underline{r}, s(\underline{x}) \rangle = \sum_k r_k\, s(x_k) \rightarrow \text{ezt kell optimalizálni!}$$

$$= \alpha \cdot \sum_k r_k \cdot (-1)^{x_k} = \alpha \cdot \sum \overbrace{|r_k| \cdot \mathrm{sgn}(r_k)}^{\text{ez } r_k} (-1)^{x_k}$$

bejövő jelvektor értéke, k. helyen

ez maga a kemény döntés rész!

reliability: $rel(\underline{x} | \underline{r}) = \sum_k |r_k| (-1)^{err(x_k, r_k)}$

err: ha $\mathrm{sgn}\ s(x_k) = \mathrm{sgn}\ r_k \Rightarrow err = 0$
else $err = 1$

ha $|r_k|$ kicsi → nem lesz megbízható
$|r_k|$ nagy → megbízható lesz (kevés az esély, hogy a zaj miatt nagy a jelem)

Wagner-dekódoló:

$(n, n-1, 2) \rightsquigarrow$ ez az SPC kód! (páros számú 1-esek vannak)

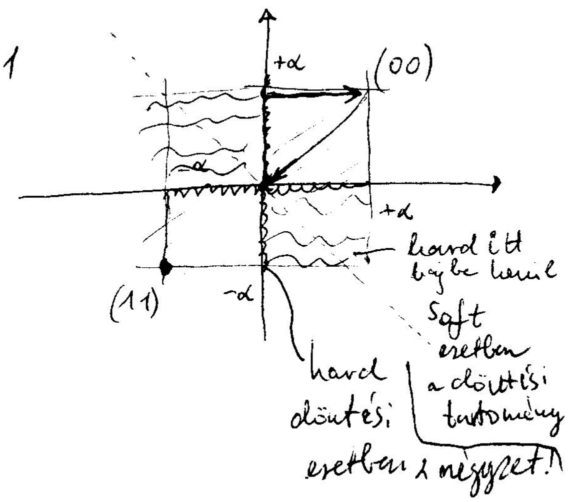
- legyen egy kemény döntés először: $\hat{\underline{x}}_k$ → ha kódszó elfogadom
  → ha nem legkisebb $|r_k|$-et invertálom!
  ↓
  ez biztos az optimum, ML-döntést adja!

17. FA ③

Hichelm
2017. 04. 11.

Példa

$n=2,\ d=2,\ k=1$
$(2,1;2)$
$=\{00,11\}$



Zajkomponensek mérete!
$v_{max} = \sqrt{2}\cdot\alpha$
hiba max soft döntés esetén

$Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2N_0}}\right)$ $d_{min}^2 \sim 2\alpha^2$

Soft: $d_{min}^2 \sim 2\alpha^2$
hard: $d_{min}^2 \sim \alpha^2$

3 dB-t nyerünk a soft decision!

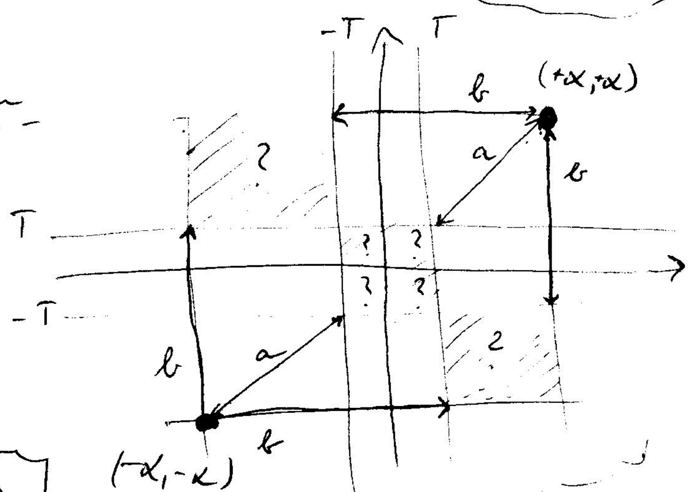
Törléses döntés:

Törlési küszöb beállítása optimálisan

legyen $a^2 = b^2$ a két hiba egyenrangú

$T = a\,\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow a = b = 1{,}37\cdot\alpha^2$

ez a soft és hard között van!



END

új fejezet

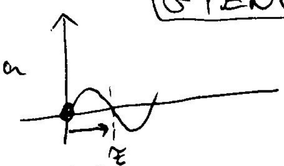
A modulált jelek spektrális vizsgálata:

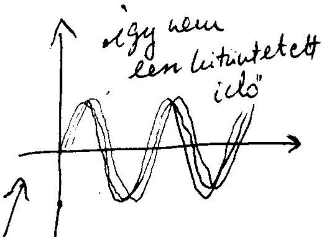
$x(t)$, $\mathbb{E}(x(t))$ létezik, legyen $\mathbb{E}(x(t))$ konstans

$R(\tau) = \mathbb{E}(x(t), x(t-\tau)) \rightarrow$ az autokorr. fv. csak τ-tól függ.

$\boxed{\text{GYENGE stacionaritás}}$

pl: baj van a





$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,e^{-j\omega 2\pi f\tau}\,d\tau \rightsquigarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$

$s(t) = \sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t)$ $P=1$ $\rightarrow$ ez egy determinisztikus fv ~~és~~ nem sztochasztikus folyamat

ha unmod carrier van $\rightarrow \sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ véletlen egyenletes eloszlás

sima vivőnek: nincs sűrűség fv-e

véletlen fázisú vivő

18 EA (1)

Kirkelem
2017.04.18.

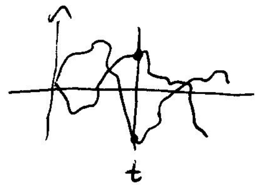
Modulált jelek spektruma:

$\mathbb{E}\{x(t)\}$ = konstans $\quad x(t)$: sztochasztikus folyamat

→ minden realizációnak van esélye

$\overbrace{s(t), s(t+\tau)}$

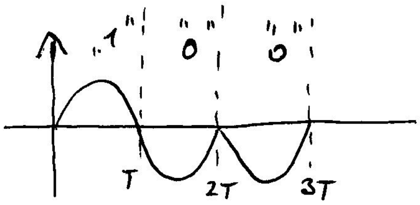
és $\mathbb{E}\{x(t), x(t+\tau)\} = R(\tau)$



minden real. súlyozva a valséggel → ennek a várható értéke

$R(\tau) \Rightarrow$ Fourier $\Rightarrow S(f), S(\omega)$

$$\boxed{\underset{\text{mod. jel}}{s(t)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \xi_{ki}\, g(t - i\cdot T)}$$



adott jelnek 8 realizációja

lehet $\Pi_{apriori}$ is benne!

akkor a mod. jelnek nincs spektruma?

ha $\Pi_{(1)} = 1 \rightarrow$ periodikus jel

ennek nincs csak 1 realizációja

def: ciklostacionaritás.

$$\mathbb{E}\{s(t)\} = \mathbb{E}\{s(t+kT)\}$$

$$\mathbb{E}\{s(t), s(t+\tau)\} = \mathbb{E}\{s(t+kT), s(t+k\cdot T+\tau)\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

akkor ciklostacioner a jel!

$$t' \rightarrow s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \xi_{ki}\, g(t+t'-i\cdot T) \quad ; \quad t' \in [0, T)$$

véletlen $(\{\pi_k\})$

→ azaz feltételezem, hogy nem ismerem a nulláról szinkront!

$$R(\tau) = \mathbb{E}_{t'}\left\{\mathbb{E}_{\xi_{ki} \text{ szerint}}\{s(t), s(t+\tau)\}\right\} =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_{\xi_{ki}}\{s(t), s(t+\tau)\}\, dt'$$

így már nem csak 8 féle realizáció lehet, hanem ∞, mert t'-vel eltolhatom

$s(t) = \sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t)$ ez biztosan nem stacioner!

$s(t) = \sqrt{2}\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)$ ahol $\varphi \in [\emptyset, 2\pi]$ $\quad \in [0, 2\pi]$

$$\mathbb{E}_{\varphi}\{s(t)\} = \mathbb{E}\{\sqrt{2}(\cos\omega_0 t\cdot\cos\varphi + \sin\omega_0 t\cdot\sin\varphi)\} = 0$$

$$\mathbb{E}_{\varphi}[s(t)\cdot s(t+\tau)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2[\cos(\omega_0 t+\varphi)\cos(\omega_0 t+\tau+\varphi)]\, d\varphi =$$

$\boxed{18\ \text{EA}}$ ②

Hidelem
2017.04.18.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{=\emptyset}{\cos(2\omega_0 t+\tau+2\varphi)} + \cos \omega_0 t)\, d\varphi = \cos(\omega_0 t)$$

$R(\tau) = \cos(\omega_0 t)$ korrel. fv.

$$R(\tau) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{1}{4\pi}\cdot\int e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\delta(\omega+\omega_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega = 1$$

egy véletlen fázisú vivőnek van teljesítmény sűrűsége!
ez már stacionárius jel!

Alapsávi PAM jelek spektruma:

$$\boxed{s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \xi_{ki}\; g_T(t+t'-iT)}$$

feltételes várható érték

$$R(\tau) = \mathbb{E}_{t'}\{\mathbb{E}_{\xi_{ki}}\{s(t),\, s(t+\tau)\}\} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_{\xi_{ki}}\{s(t),\, s(t+\tau)\}\, dt' =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_{\xi_{ki}}\Big(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \xi_{ki}\, g_T(t+t'-iT)\Big)\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_{kj}\, g_T(t+t'+\tau-jT)\Big)\, dt' =$$ dt' helyett t szerint integrálok!

$$= \frac{1}{T}\cdot\int_0^T \sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[\underbrace{\xi_{ki},\xi_{kj}}_{\text{szimbólumok korrelációja}}]\, g_T(t+iT)\, g_T(t-jT+\tau)\, dt =$$

erősen befolyásolja a spektrumot

Példa: $\mathbb{E}\{\xi_{ki}\}_* = \mathbb{E}\{\xi_{kj}\} = 0 \rightarrow$ gyakorlati szempontból jó (nem ugrálunk ki DC-t!) nem lenne info tartalma

$$\mathbb{E}\{\xi_{ki}\}\{\xi_{kj}\} = \begin{cases} \mathbb{E}(\xi)^2 & \text{ha } i=j \\ \emptyset & \text{ha } i\neq j \end{cases}$$ ha $i=j$! mindenhol ugyanaz $\mathbb{E}(\xi)^2$!

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(t-iT)\, g(t+\tau-iT)\, dt = \mathbb{E}(\xi^2)\cdot\frac{1}{T}\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{-iT}^{T-iT} g(t-iT)\, g(t+\tau-iT)\, dt =$$

$\mathbb{E}(\xi_k)^2$

$$\mathbb{E}(\xi^2)\cdot\frac{1}{T}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g_T(t)\, g_T(t+\tau)\, dt \rightarrow S(\omega) = \frac{\mathbb{E}(\xi^2)}{T\cdot 2\pi}\, G_T(\omega)\, G_T^*(\omega) =$$

$$\frac{\mathbb{E}(\xi^2)}{}\cdot |G_T(\omega)|^2$$

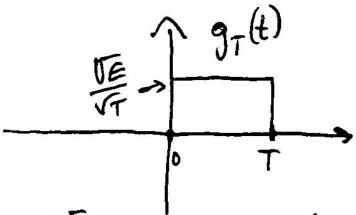
18 EA. 3

Hirhelm
2017.04.18.

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\cdot\tau}\, d\omega$$

$R(0)$ = jel teljesítménye! $\rightarrow \mathbb{E}(\xi^2)$

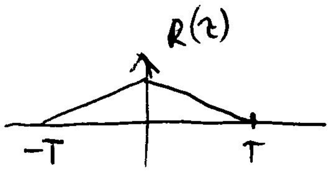
Példák:



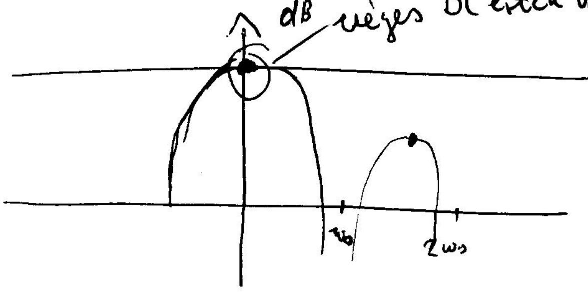
$$g_T(t)=\begin{cases}\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{T}} \rightarrow 0\leq t\leq T\\ 0 \quad \text{máshol!}\end{cases}$$

NRZ komponens!

$$R(\tau)=\begin{cases}\frac{E}{T}\cdot\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right) & 0\leq t\leq T\\ \emptyset\end{cases}$$

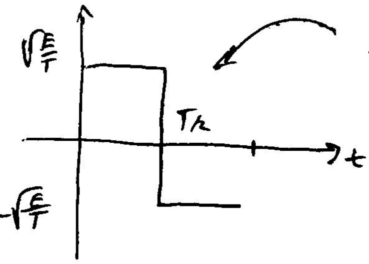


$$S(\omega)=\frac{E}{2\pi}\cdot\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2$$



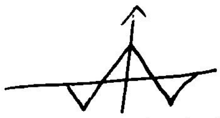
$S(\omega)$

DC limitált csatornán nem lehet átvinni!

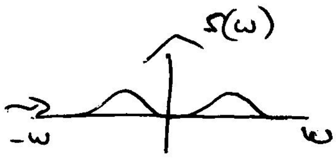


Manchester kód: DC-ben az $S(\omega)$ mindig $\emptyset$ lesz!

$\hookrightarrow$ $R(\tau)$:



$$S(\omega)=\frac{E}{2\pi}\cdot\frac{\sin^4\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$$



nagyobb a sávszélesség!
gyorsabban változik a jel!

Az optimális PAM rendszer vizsgálata:

19. EA (1)

Hidehu
2017. 04. 25.

Teljesítmény sűrűség fv.:

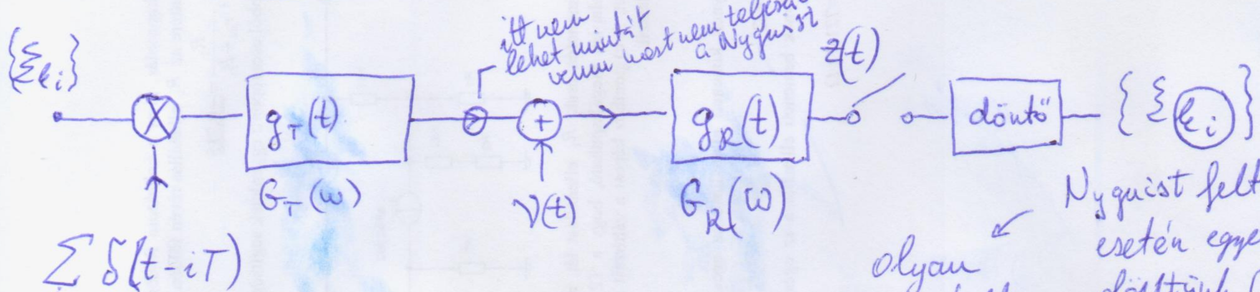
- Gyenge stacionaritás ! $R(\tau)$
- PAM $\{\xi_{k_i}\}$ legyen korrelálatlan és várható érték $= \emptyset$, $g_T(t)$

üzenet időés

$$S(\omega) = \frac{\mathbb{E}\{\xi_k^2\}}{2\pi \cdot T} \cdot |G_T(\omega)|^2$$

telj! sűrűség fv

szabad lehetőségek: amivel $S(\omega)$-t befolyásolhatjuk és ez csak a PAM
1) függő symbol sorozat!
2) elemi jelek megválasztása



Nyquist feltétel esetén egyetlen k-ire döntünk (a végtelen térből)

olyan g_T, g_R kell

$$s(t) = \sum_i \xi_{k_i} \, g_T(t - iT)$$

legyen $g_R(t) = g_T(-t)$ → illesztett szűrő (korrelációs vevő) zajtól megszabadulás

$$z(t) = \sum_i \xi_{k_i} \, g(t - iT)$$

a Nyquist feltétel $z(t)$ pontban legyen érvényes

$$g(t) = g_T(t) * \underbrace{g_T(-t)}_{g_R(t)}$$

és $\mathcal{F}\{g(t)\} = |G_T(\omega)|^2$

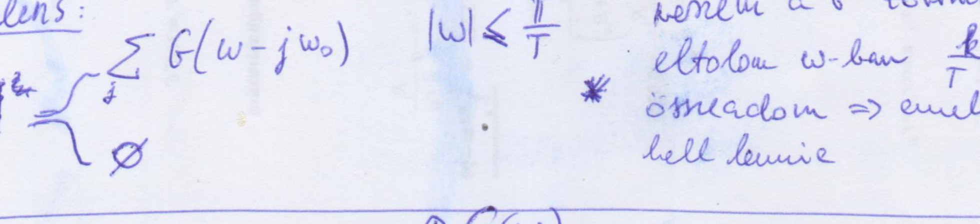
egyszerre meghatározzuk $S(\omega)$-t és a Nyquist-et teljesítjük

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Nyquist-ekvivalens:

$$\{G_{ekv}(\omega)\}^{\ell_r} = \begin{cases} \sum_j G(\omega - j\omega_0) & |\omega| \le \frac{\pi}{T} \\ \emptyset \end{cases}$$

* veszem a G Fourier trafóját és eltolom ω-ban $\frac{k}{T}$-kkel és összeadom ⇒ ennek konstansnak kell lennie



egy $G(\omega)$ Nyquist ekvivalense → *

19 EA (2)

Hirkelin
2017.04.25.

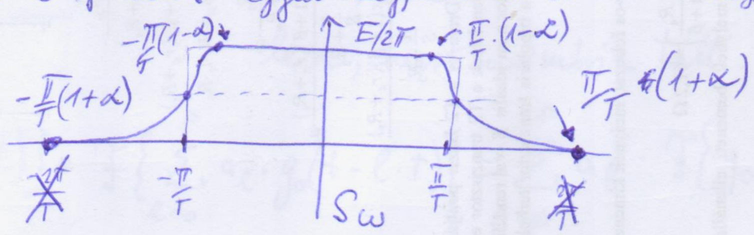
Ez kell az ISI mentességhez!

G-re ISI mentességet akarok ($z(t)$ helyen) ezzel definiálom a vevőszűrő átviteli fv-ét és a spektrális teljesítménysűrűséget is! Tudunk tervezni ilyet!

Emelt koszinusz jel alkalmazása:

jó volna a kockacukor szűrő ↓

– ne legyen ugrás a fv-ben! legyen megfelelően sima → legyen emelt cos!



$$\int S(\omega)\,d\omega = \frac{E}{2\pi}\cdot 2\pi = E$$

$$G(\omega) = \begin{cases} E\cdot T & \to |\omega| < \frac{\pi}{T}(1-\alpha) \\ E\cdot T\cdot\frac{1}{2}\cdot 1-\sin\left(\frac{T}{2\alpha}\left(|\omega|-\frac{\pi}{T}\right)\right) & \to \frac{\pi}{T}(1-\alpha) < |\omega| \leq \frac{\pi}{T}(1+\alpha) \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{T}(1+\alpha) \end{cases}$$

Ha $\xi_{k_i} = \pm 1 \Rightarrow E\{\xi_{k_i}^2\} = 1 \Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi\cdot T}G(\omega)$

Részleges válaszfv. PAM rendszerek:

$$z(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}(\xi_{k_j})\cdot g(t-jT)$$

speciális választás $g(t) \Leftrightarrow g_0(t) \Rightarrow \boxed{g_0(k\cdot T)\begin{cases} g_0(0) & k=0 \\ 0 & k\neq 0\end{cases}}$

$g_0(t)$: ez teljesíti a Nyquistet

legyen

$$g(t) := a_0\cdot g_0(t) + a_1\cdot g_0(t-T) + a_2\ldots + a_p\cdot g_0(t-p\cdot T) =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{p} a_\ell\cdot g_0(t-\ell\cdot T)$$

$$z(n\cdot T) \Rightarrow z(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\xi_{k_j}\, g(t-j\cdot T) = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\xi_{k_j}\sum_{\ell=0}^{p} a_\ell\cdot g_0(t-\ell\cdot T-jT)$$

$$\hookrightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{p}\xi_{k_j}\, a_\ell\cdot g_0\underbrace{(nT-\ell\cdot T-jT)}_{\text{ez csak (0) ban nem zérus}}$$

2017.04.25

$= g_0(0)$-al arányos!

$$= g_0(0)\left[a_0 \cdot \xi_{k_j} + a_1 \cdot \xi_{k_{n-1}} + \dots + a_p \cdot \xi_{n-p}\right] =$$

$j = n$

$n = j + l$

$l = 0$

$$= g_0(0) \sum_{l=0}^{p} a_l \cdot \xi_{k(n-l)}$$

a minták lineáris kombinációja a szomszédos mintáknak → nehezebb dekódolás lesz, mert memória kell. Mire jó ez?

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{l=0}^{p} a_l \cdot g_0(t - l \cdot T)\right\} = \sum_{l=\emptyset}^{p} a_l \cdot \mathcal{F}\{g_0(t - l \cdot T)\} =$$

a választott teljes átviteli fv.

$$= \sum_{l=\emptyset}^{p} a_l \cdot G_0(\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot l \cdot T}$$

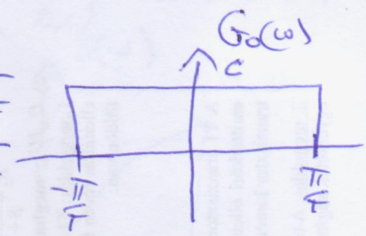
Duobináris rendszerek

$\xi \in \{\pm 1\}$ $E\{\xi^2\} = 1$

$p = 1$ a_0 és a_1 kell

$a_0 = 1$ $a_1 = 1$

$$G_0(\omega) = \begin{cases} c & |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| \not\leq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$



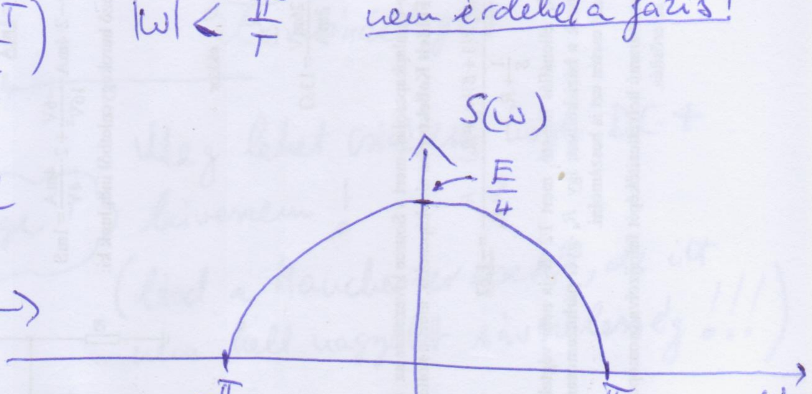
$$G(\omega) = \begin{cases} c \cdot (1 + e^{-j\omega \cdot 1 \cdot T}) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & |\omega| \not< \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$$G(\omega) = 2 \cdot c \cdot e^{-j\frac{\omega T}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad |\omega| < \frac{\pi}{T}$$

nem érdekel a fázis!

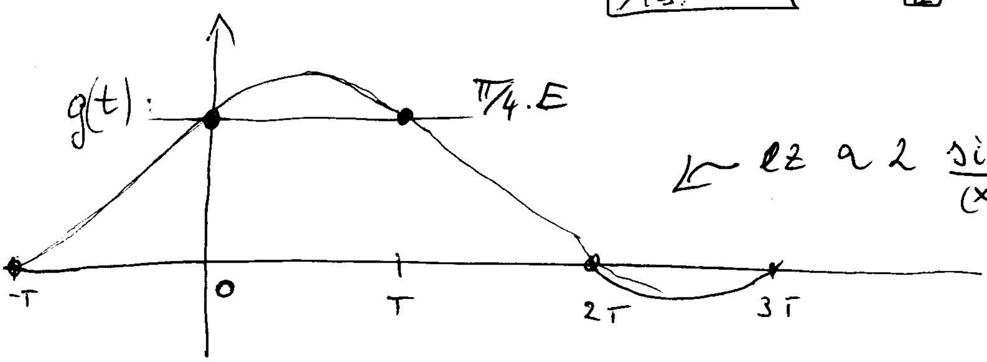
$$G(\omega) = \begin{cases} 2 \cdot \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ \emptyset & \text{máshol} \end{cases}$$

$$G_T(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ \emptyset & \end{cases} \longrightarrow$$



[19. EA] (4)

2017.04.25.



← ez a 2 $\frac{\sin(x)}{(x)}$ összege a duobináris rendszernél.

eltolt $\frac{\sin(x)}{(x)}$-eket adok össze

a spektrum lazán limitált lesz, de elég sima, így könnyebb a realizáció. A sáv szélét kevésbé veszi igénybe!

Az adatsebesség nem változott!

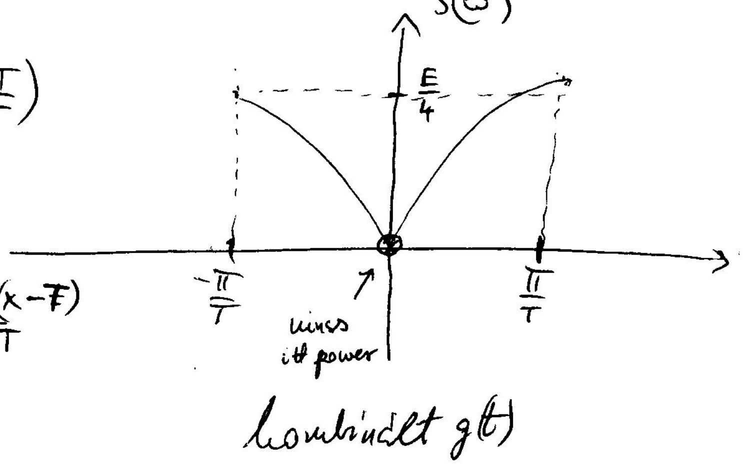
$a_0 = 1$ $\quad \xi \in \{\pm 1\}$

$a_1 = -1$

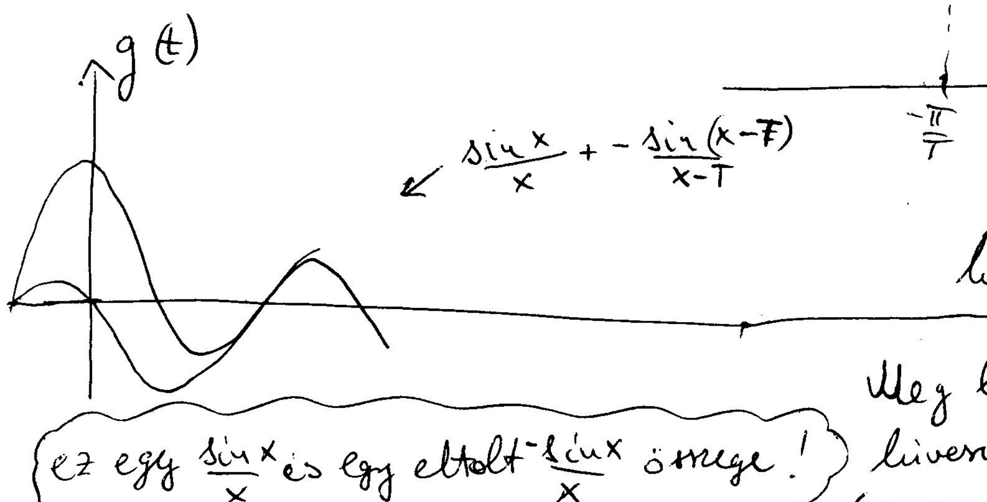
$$G_0(\omega) = \begin{cases} c & |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{máshol} \end{cases}$$

$$G(\omega) = \begin{cases} c \cdot (1 - e^{-j\omega T}) \\ 0 \end{cases} = 2 \cdot j \cdot c \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \text{ ha } |\omega| < \frac{\pi}{T}$$

$$|G(\omega)| = 2 \cdot c \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad \left(|\omega| < \frac{\pi}{T}\right)$$



kombinált g(t)



$\frac{\sin x}{x} + -\frac{\sin(x-T)}{x-T}$

ez egy $\frac{\sin x}{x}$ és egy eltolt $-\frac{\sin x}{x}$ összege!

Meg lehet csinálni hogy DC-t kiveszem!
(lásd a Manchester esetén, de itt nem kell nagyobb sávszélesség!!!)

PAM

20. EA ①

Hérvelen
2017.05.02

$$s(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} X_{k_i}(t-i\cdot T)$$ k - a vel. változó

$\{X_k(t)\}$: $k=1\ldots M$

$$X_k(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} X_k(t)\, e^{-j\omega t}\,dt \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$R(\tau)=\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T}_{\text{randomitás miatt!}} \mathbb{E}\left[s(t),\, s(t+\tau)\right]dt$$

$$s(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} x_{k_i}(t-i\cdot T)=$$; Π_k : apriori valség halmaz!
k-dik elemi jel kiválasztásának valsége

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty} X'_{k_i}(t-it)+\bar{x}(t-iT)$$

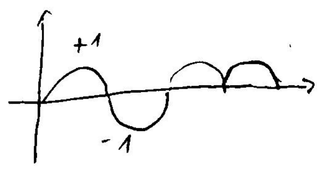
$$\bar{x}(t)=\mathbb{E}\{x_k(t)\}=\sum_{k=1}^{M}\Pi_k\cdot x_k(t)$$ - kivesem a várható értéket a belőle

$X_{k_i}(t)=x'_{k_i}(t)+\bar{x}(t)$ - nem függ a k-indextől, nincs információs tartalma!

$$\boxed{s_1(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} x'_{k_i}(t-iT)}$$

$$\boxed{s_2(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\bar{x}(t-iT)}$$ → ez egy periodikus jel → nincs teljesítmény sűrűsége
→ ha véletlen a fázis → vonalas spektrum lesz!, energia pazarlás! → vonalas spektrumoktól irtózunk!
de a szinkronizálás miatt kell a vonalas spektrum!

pl:



nem tudok szimbólum szinkront vinni! → ha $()^2$-re emelem a jelet NL-torzítás → van vonalas spektrum, periodikus, lehet szinkronizálni!

Periodikus jel spektruma:

$$s_2(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l\, e^{j\omega_0\cdot l\cdot t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$C_l=\frac{1}{T}\int_0^T s_2(t)\cdot e^{-j\omega_0 l\cdot t}\,dt$$

$$C_l=\frac{1}{T}\int_0^T\sum_{i=-\infty}^{\infty}\bar{x}(t-iT)\,e^{-j\omega_0 l\cdot t}\,dt=$$

$$\frac{1}{T}\cdot\underset{\text{Fourier}(\bar{x})}{\bar{X}}(l\cdot\omega_0)=\frac{1}{T}\cdot\sum_{k=1}^{M}\Pi_k\cdot\bar{X}_k(l\cdot\omega_0)$$

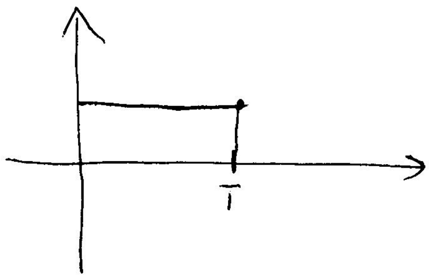
20 EA ②

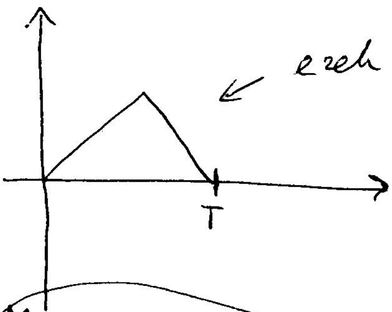
Hirkelm 2017.05.02

$$R_{s_2(t)}(\tau) = \overbrace{\frac{1}{T}\int_0^T}^{\mathbb{E}} s_2(t)\cdot s_2(t+\tau)\,dt =$$ véletlen eltolásokat rakok bele! végtelen sok realizációt hozok létre!

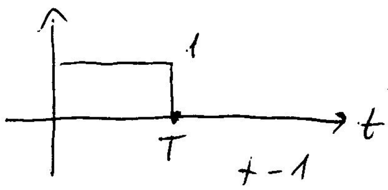
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} K_l \cdot e^{j\omega_0 l \tau}$$

$$S_{s(t)}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |K_l|\,\delta(\omega - l\cdot\omega_0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{M}\pi_k X_k(l\omega_0)\right|^2\delta(\omega - l\cdot\omega_0)$$





ezek nem jó elemi jelek! ennek van DC-komponense!



$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\xi_{k_i}\, g_T(t-iT)$$ ezt választjuk

+ -1
+ -3
+ -5

$E\{x'_{k_i}\}=\emptyset$ átlag

$$s_1(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x'_{k_i}(t-iT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{k_i}(t-iT) - \bar{x}(t-iT)$$

ez biztosan nem periodikus!

kell

$$R_{s_1(t)}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left[s_1(t)\cdot s_1(t+\tau)\right] =$$

k_i a véletlen változó!

véletlen időkésleltetés!

kettős végtelen szumma sorozatát kell bevenni!

k_i sorozat független legyen!

Szimbólumok közti kapcsolat teremtéssel a teljesítménysűrűség spektrumot tudom befolyásolni + ne változzon a sebesség!

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left[\underbrace{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x'_{k_i}(t-iT)}_{s_1(t)}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} x'_{k_j}(t+\tau-j\cdot T)\right)\right]$$

X'_k várható értéke $= \emptyset$

2 ftlen val. vált. szorzatának a várható értéke $\mu_1\cdot\mu_2$

$$R_{s_1(t)}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left\{\sum_i\sum_j x'_{k_i}(t-iT)\, x'_{k_j}(t+\tau-jT)\right\}dt$$ ha $i \neq j \rightarrow \emptyset$ lesz! ezért $i,j \rightarrow i$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} x'_{k_i}(t-iT)\cdot x'_{k_i}(t+\tau-iT)\right\}dt$$

Hidelen 2017.05.02

Csak i-n fut végig a (Σ)

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}\left[X_{k_i}'(t-iT)\cdot X_{k_i}'(t+\tau-iT)\right]dt =$$

csúszó ablakos integrálás! T-szakaszokat integrálok!

(iT) szakaszok!

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{E}\left[X_{k_i}'(t)\cdot X_{k_i}'(t+\tau)\right] = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=1}^{M}\Pi_k\cdot X_k'(t)\cdot X_k'(t+\tau)\,dt =$$

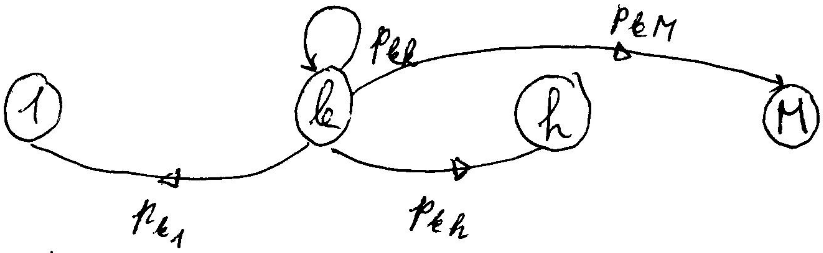
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{M}\Pi_k}_{\text{apriori súlyozás}}\cdot\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}X_k'(t)\cdot X_k'(t+\tau)\,d\tau}_{\text{elemi fv. korrelációs fv-nye!}} \Rightarrow \boxed{S(\omega)=\frac{1}{2\pi T}\cdot\sum_{k=1}^{M}\Pi_k\cdot\left|X_k'(\omega)\right|^2}$$

súlyozva elemi jelek Fourier trafójának a $|\,|^2$-e az apriori valséggel

---

Nem független sorozatok ⊕ $\boxed{k_i}$ „ha" $k, h \in [1 \dots M]$

Markov-lánc: $P_{kh} = P(k_{i+1} = h \mid k_i = k)$ állapotátmenet diagram

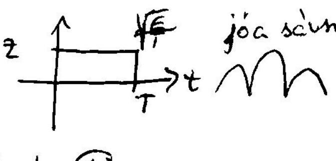


(1) $\sum_{k=1}^{M} p_{kh} = 1$ ez biztos!

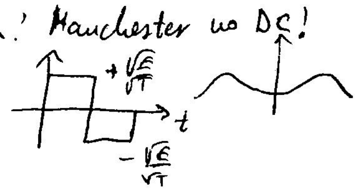
$\underline{\Pi}_i = \underline{\Pi}_{i-1}\cdot\underline{\underline{\Pi}} = \Pi_0\cdot\underline{\underline{\Pi}}^i$ ← ugró mátrix, 1 lépéses átmenet mátrix!

$\underline{\Pi} = [\Pi_1 \dots \Pi_M]$ vektor $\quad \underline{\Pi} = \Pi_0\cdot\Pi^{\infty} \rightarrow$ apriori valségekhez konvergál!

A Miller-kód: NRZ



jó a sávnál, de DC-je van! Manchester no DC!



legyen NRZ (±) és Manchester (±)

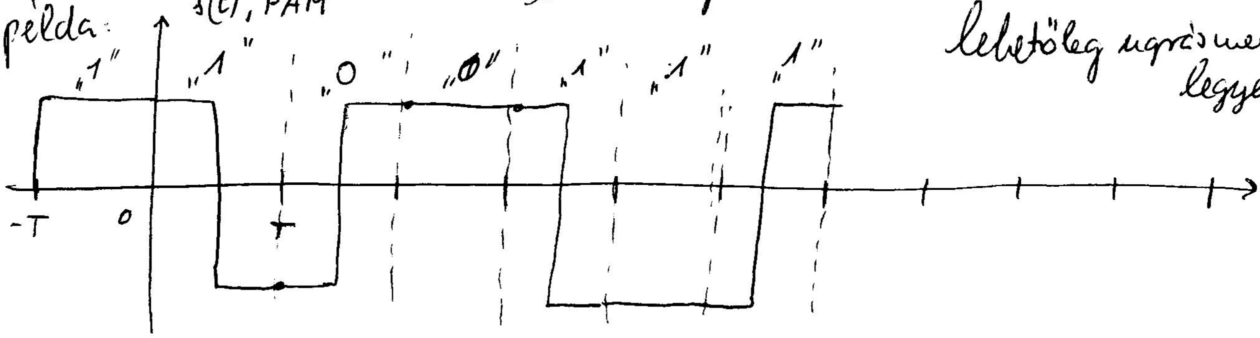
$X_1(t), X_4(t) \quad X_2(t), X_3(t)$

mágneses csatornához illesztünk! de nincs DC

[20 EA] 4

Hikelin
2017.05.02

Mágneses-csatorna!

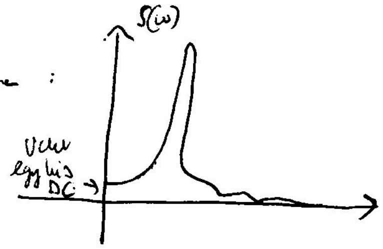


sorrend alapú!

lehetőleg ugrásmentesen legyen

állapot átmenet mx.-al is leírható $\underline{\underline{\Pi}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ennek a spektruma:



2017.05.08.
21. ÓRA

(1)

HE1 E

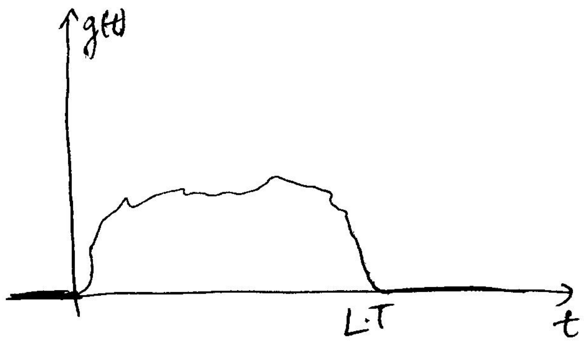
Folytonos fázisú FM jelek spektruma
/GSM/
↳ GMSK

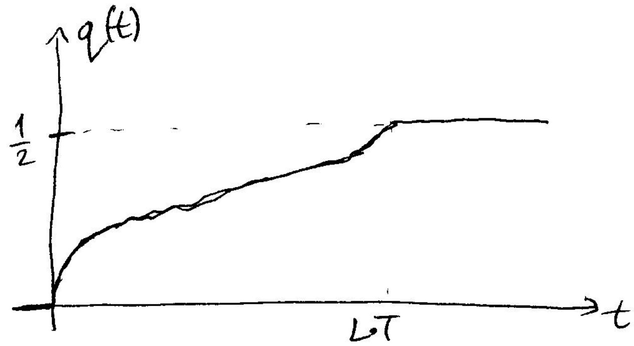
Adó: elég jó hatásfokú & nemlineáris

Sávszélesség: kézben kell tartani

- ξ_{k_i} ; $\xi_{k_i} \in [-(M-1), \ldots -3, -1, 1, 3, \ldots M-1]$, M páros /eldöntött/
- $\Pi_k = \Pr\{\xi_{k_i} = \xi_k\}$
- $q(t) = \int_{-\infty}^{t} g(\sigma)\, d\sigma$ elemi fázisfv.

  $g(t)$ elemi frekvenciafv., tartója $[0, L\cdot T)$
- $q(L\cdot T) = \frac{1}{2}$ normalizálás





$\boxed{s(t) = \sqrt{2P}\cos(\omega_0 t + \phi(t, \xi) + \rho)}$; $\phi(t, \xi)$ a modulált jel fázisfüggvénye

ρ egyenletes ov. $[0, 2\pi)$-n + véletlen időzítés is van

$$\boxed{r(\tau) = \mathbb{E}_{\rho}\left[\mathbb{E}_{t}\left[\mathbb{E}_{\xi}\left[s(t)\, s(t+\tau)\right]\right]\right]}$$

$$\mathbb{E}_{\rho}(\cdot) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cdot)\, d\rho; \quad \mathbb{E}_{t} = \frac{1}{T}\int_0^{T} (\cdot)\, dt$$

$$r(\tau)=2P\cdot \mathbb{E}_{\rho,t,\xi}\left[\cos(\omega_0 t+\phi(t,\underline{\xi})+\rho)\cdot\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi(t+\tau,\underline{\xi})+\rho)\right] = \nearrow (*)$$

$$=P\cdot\mathbb{E}_{t,\xi}\left[\cos(\omega_0\tau+\phi(t+\tau,\underline{\xi})-\phi(t,\underline{\xi}))\right] = P\cdot \mathbb{E}_{t,\xi}\left[\mathrm{Re}\left\{e^{j\omega_0\tau}\cdot e^{j[\phi(t+\tau,\underline{\xi})-\phi(t,\underline{\xi})]}\right\}\right]$$

felcserélhetők vivővel kapcsolatos tag

(*) az összeges tagban 2ρ van, ennek a ρ szerinti várható értéke 0;
a kül. tagban nincs ρ

$\cancel{R(\tau)=\mathbb{E}_{t,\xi}[e^{j\omega_0\tau}}$

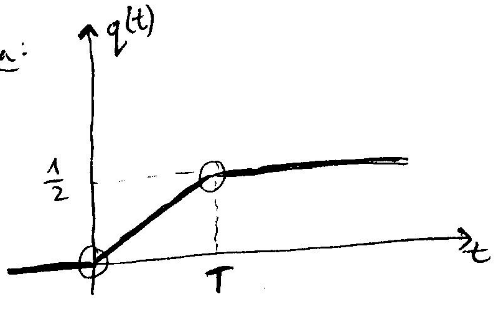
$$\boxed{R(\tau)=\mathbb{E}_{t,\xi}\left[e^{j[\phi(t+\tau,\underline{\xi})-\phi(t,\underline{\xi})]}\right]}$$

$$R(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_{\xi}\left[e^{j[\phi(t+\tau,\underline{\xi})-\phi(t,\underline{\xi})]}\right]dt$$

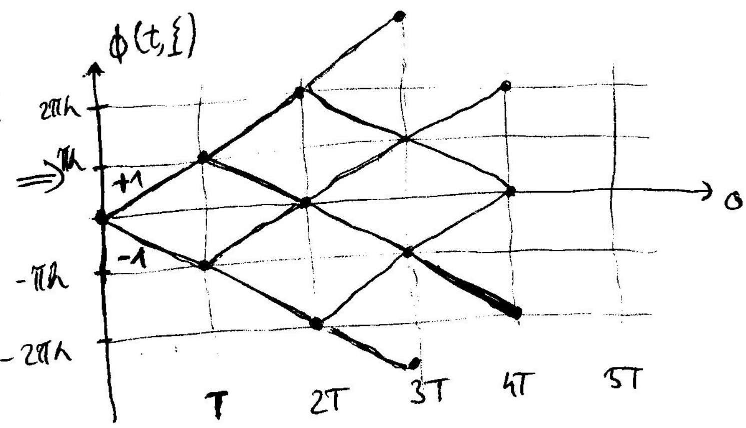
/levezetés pontosan: jegyzet/

$$\phi(t,\underline{\xi})=2\pi h\sum_{i=-\infty}^{\infty}\xi_{ki}\, q(t-iT)$$ (def. szerint)

Példa:
MSK



$\{\xi\}=\pm 1$



Nagy mellékhullámokkal rendelkező spektruma van.

L=1 túl rövid; ugrik a frekvencia

Lehetőségek q(t)-re pl.: emelt koszinusz (L=3, L=4); Gauss-jel integrálja → GSM-ben
⇓
q(t) Gauss

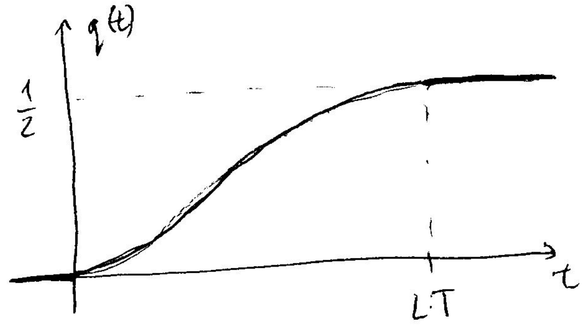
„Szabály": spektrum legyen -70 dBc alatt ω_0-tól $\frac{1}{T}$-re

2017.05.08.
21. ÓRA

3

HE1 E

Vonalas spektrum feltétel



$$R(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_\xi\left[e^{j2\pi h\left(\sum \xi_{ki}\, q(t+\tau-iT)-\sum \xi_{ki}\, q(t-iT)\right)}\right]dt =$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_\xi\left[e^{j2\pi h\left[\sum \xi_{ki}\left(q(t+\tau-iT)-q(t-iT)\right)\right]}\right]dt =$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}_\xi\left[\prod_{i=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi h \xi_{ki}\left[q(t+\tau-iT)-q(t-iT)\right]}\right]dt$$

$\tau := mT+\tau'$, $m>L$ (τ „nagy") $\rightarrow$ a produktum csak véges számú tagot fog tartalmazni, ami nem 1 értékű

$[2L+(m-L)$ összesen$]$

$$\sum_{k=-(M-1)}^{M-1} \pi_k \cdot e^{j2\pi h k q(LT)}$$ $\rightarrow$ várható érték ξ szerint, $(m-L)$ db tag alakja

$q(LT)=\frac{1}{2} \Rightarrow$ $$\| \quad \underbrace{\sum_{k=-(M-1)}^{M-1} \pi_k \cdot e^{j\pi h k}}_{C_\xi}$$ $\rightsquigarrow$ produktumban:

$$\left(\sum_{k=-(M-1)}^{M-1} \pi_k e^{j\pi h k}\right)^{m-L} = C_\xi^{m-L}$$

$|C_\xi| \leq 1$ $\rightarrow$ ha <1: $C_\xi^{m-L} \rightarrow 0$, nincs periodikus összetevő

$\rightarrow$ ha $=1$: $\pi h k = b \mod 2\pi$

$\pi h(k+2) = b \mod 2\pi$

$2\pi h = 0 \mod 2\pi$ $\rightarrow$ ha $h \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ vannak periodikus komponensek, vonalas spektrum

Gyakorlatban: $h=\frac{1}{2}$ (a jel négyzetre emelésével lesz periodikus összetevő, lehet szinkronizálni)