Felsőbb matematika vizsga – 2012-12-18

Név ______________________________ **Neptun** __________

Minden feladat 1 pontot ér, kivéve ha meg van adva a pontszám. Az összesen szerezhető 25 pontból legalább 10 pontot el kell érni. A bekeretezett részbe kell a választ beírni. Csak annyit írjunk be, amennyit a feladat kér! Részletszámításokat sehol nem kérünk. A vizsgán semmilyen segédeszköz nem használható.

1. Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ az $\mathbb{R}^n$ tér egy bázisa. Egy tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor standard bázisbeli koordinátás alakját jelölje $[\mathbf{v}]$, a $\mathcal{B}$ bázisbeli alakját $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$. Ismerjük a $[\mathbf{b}_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ és a $[\mathbf{v}]$ koordinátás alakokat. Fejezzük ki mátrixműveletekkel a $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ koordinátás alakot.

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \big[[\mathbf{b}_1] \mid [\mathbf{b}_2] \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]\big]^{-1}[\mathbf{v}]$$

2. Ismerjük egy invertálható $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását! Hogyan számítanánk ki az $\mathbf{A}^{-1}$ inverzet?

$\mathbf{LUX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I}$, $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, az utóbbi két mátrixegyenlet pedig megoldható csak helyettesítésekkel.

3. Hány dimenziós alteret feszítenek ki az $(1,1,1,0)$, $(1,3,5,0)$ és $(0,1,2,0)$ vektorok $\mathbb{R}^4$-ben? Számítsuk ki az általuk kifeszített altérre való merőleges vetítés mátrixát! *(3 pont)*

A tér 2-dimenziós.

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. A valós $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris érték szerinti $\mathbf{U\Sigma V}^T$ felbontásának ismeretében írjuk föl az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ egy bázisát és e bázis elemei közt az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés hatását!

Az $\mathbf{U}$ oszlopvektoraiból álló $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^m$ az $\mathbb{R}^m$, a $\mathbf{V}$ oszlopaiból álló $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^n$ az $\mathbb{R}^n$ bázisa, $\mathbf{Av}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$.

5. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy mátrix *(a)* diagonalizálható (a választ bázisok segítségével fejezzük ki), *(b)* diagonalizálható (a választ a geometriai multiplicitásokkal fejezzük ki), *(c)* ortogonálisan diagonalizálható, *(d)* unitéren diagonalizálható legyen? *(2 pont)*

Hogy *(a)* létezik a mátrix sajátvektoraiból álló bázis, *(b)* a geometriai multiplicitások megegyeznek az algebraiakkal, *(c)* szimmetrikus, *(d)* a mátrix normális legyen.

6. Milyen képlettel definiálhatjuk azt a fogalmat, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrix *(a) nilpotens*, *(b) primitív.*

van olyan k, hogy $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, illetve hogy $\mathbf{A}^k$ pozitív.

7. Adva van az $\mathbb{R}^4$ tér három vektora: $(1,1,1,-1)$, $(1,0,0,3)$, $(2,1,1,2)$. Adjuk meg az általuk kifeszített tér egy ortonormált bázisát a Gram–Schmidt-eljárással. *(2 pont)*

$\frac{1}{2}(1,1,1,-1)$, $\frac{1}{6}(3,1,1,5)$

8. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldását keressük. *(2 pont)*
(a) Milyen feltétel fennállása esetén kapunk egyetlen optimális megoldást? *(b)* Hogyan kaphatjuk ezt meg, ha ismerjük $\mathbf{A}$ QR-felbontását?

Az $\mathbf{A}$ legyen teljes oszloprangú. $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ és $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ esetén $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}'\mathbf{b}$.

9. Mit tudunk egy valós $\mathbf{A}$ mátrix főminorairól, ha $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, és mit tudunk vezető főminorairól, ha $\mathbf{A}$ negatív definit? *(2 pont)*

(a) minden főminor nemnegatív, *(b)* minden páros rendű vezető főminor pozitív, minden páratlan rendű negatív.

10. Mit jelent az, hogy az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek?

Azt mondjuk, hogy az $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós, hogy $\|.\|_a \leq c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \leq d\,\|.\|_a$.

11. Egy $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéshez keressünk olyan $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ bázisokat, amelyekben e lineáris leképezés mátrixa diagonális. Léteznek-e minden L-re ilyen bázisok? *(2 pont)*

Léteznek, az SVD megadja: ha az L-hez tartozó mátrix a standard bázisban $\mathbf{L}$ és $\mathbf{L} = \mathbf{U\Sigma V}^T$, akkor $\mathcal{B} = \{\mathbf{V}_{*1}, \mathbf{V}_{*2}, \ldots, \mathbf{V}_{*n}\}$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{U}_{*1}, \mathbf{U}_{*2}, \ldots, \mathbf{U}_{*m}\}$.

12. Írjuk le a Perron–Frobenius-tétel erős változatát! *(3 pont)*

Ha az $\mathbf{A}$ nemnegatív mátrix irreducibilis, és $r = \rho(A)$ jelöli a spektrálsugarát, akkor

1. $r > 0$,
2. r sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,
3. $\mathbf{A}$-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,
4. r egyszeres sajátérték.

13. Bizonyítsuk be, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek! *(4 pont)*