1. Hozza a legegyszerűbb alakra : $A := \left(\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} - \dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \right) \cdot \dfrac{b\cdot(\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2})}{4} = \ ?$

$$A = \frac{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2-(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\cdot(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}\cdot\frac{b\cdot(|a|-|b|)}{4} = \frac{-4\cdot\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}}{(a+b)-(a-b)}\cdot\frac{b\cdot(|a|-|b|)}{4} = (|b|-|a|)\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2} .$$

A következő feladatnál vagy az **A** vagy a **B** feladatot kell megoldania. Eldöntheti, hogy melyiket választja, de ha mindkettőt megoldja, természetesen plusz pontot kaphat.

2. A. Egy (a_n) számtani sorozatban $a_1 = \sqrt{2}$. Az a_1, a_2, a_4 ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három tagja. Adja meg a számtani sorozat és a mértani sorozat első négy tagját, valamint a mértani sorozat első 10 tagjának összegét !

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_4}{a_2} \Rightarrow q = \frac{\sqrt{2}+d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+3d}{\sqrt{2}+d} \Rightarrow (\sqrt{2}+d)^2 = \sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}+3d) \Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot d + d^2 = 3\cdot\sqrt{2}\cdot d \Rightarrow d\cdot(\sqrt{2}-d) = 0 .$$

I. $d = 0$, ekkor a számtani sorozat konstans sorozat, minden tag $\sqrt{2}$, $q = 1$, a számtani sorozat egyben mértani sorozat is .

II. $d = \sqrt{2}$, $q = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$. A számtani sorozat : $\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ldots$. A mértani sorozat : $\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2},\ 8\sqrt{2},\ldots$.

A mértani sorozat első 10 tagjának összege : **I.** $S_{10} = 10\cdot\sqrt{2}$ **II.** $S_{10} = a_1\cdot\dfrac{q^{10}-1}{q-1} = \sqrt{2}\cdot\dfrac{2^{10}-1}{2-1} = 1023\cdot\sqrt{2}$

2. B. $B := \displaystyle\sum_{n=0}^{10} \frac{9^{\frac{n}{2}+1}+(\sqrt{3})^{2n+2}}{(\sqrt{16})^{n+1}+2^{2n-1}} = \ ?$ $\quad B = \displaystyle\sum_{n=0}^{10}\frac{9\cdot 3^n+3^{n+1}}{4^{n+1}+4^n\cdot 2^{-1}} = \sum_{n=0}^{10}\frac{9\cdot 3^n+3\cdot 3^n}{4\cdot 4^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n} =$

$$= \sum_{n=0}^{10}\frac{12\cdot 3^n}{\frac{9}{2}\cdot 4^n} = \frac{12\cdot 2}{9}\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{8}{3}\cdot\frac{(\frac{3}{4})^{11}-1}{\frac{3}{4}-1} = \frac{32}{3}\cdot\left(1-(\tfrac{3}{4})^{11}\right)$$

3. $$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x^2}+\frac{2\lambda}{x^3}=0\\ &\frac{1}{y^2}-\frac{2\lambda}{y^3}=0\\ &\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=1\end{aligned}\right\}\ \lambda\neq 0,\ (x,y)=\ ? \qquad \left.\begin{aligned} x+2\lambda=0\\ y-2\lambda=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y=0\\ \frac{2}{x^2}=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} .$$

Megoldások : $x_1 = \sqrt{2},\ y_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2},\ y_2 = \sqrt{2}$.

4. $\ln(x^2+x-6) = \ln(x-2) - \ln(x+3)$, $x = ?$

$$\ln((x-2)\cdot(x+3)) = \ln(x-2) - \ln(x+3) \Rightarrow \ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln(x-2) - \ln(x+3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow + \ln(x+3) = -\ln(x+3) \Rightarrow \ln(x+3) = 0 \Rightarrow x+3 = 1 \Rightarrow x = -2$ nem lehetséges, **nincs megoldás**.

5. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(-1, 2)$ ponton és merőleges a $2x - y - 1 = 0$ egyenesre !

Az egyenes egy irányvektora $\mathbf{v} = (2, -1)$, normálvektora $\mathbf{n} = (1, 2)$, így egyenlete : $x + 2y = 1\cdot(-1) + 2\cdot 2$, azaz $x + 2y - 3 = 0$.