ANALÍZIS(2) A Műszaki Informatika szak | **VIZSGADOLGOZAT I.rész** | **2001. június 18.** Munkaidő: 90 perc

---

1) Feladat (10 pont). Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = \frac{2y+3}{(2y+7)(x^2+4x)}, \qquad y \geq 0$$

2) Feladat (15 pont).
Legyen

$$f_n(x) = \frac{\ln nx}{nx}, \qquad x > 0$$

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) =?$

b) $||f_n - f|| =?$ (Uniform norma a $(0,\infty)$ intervallumon.)
Egyenletesen konvergál-e az f_n az f-hez a $(0,\infty)$-on?

3) Feladat (20 pont).

a) Legyen g pozitív, folytonosan differenciálható egyváltozós függvény! Írjuk a g változója helyére az y/x hányadost $(g(t), t = y/x)$! Legyen

$$u(x,u) = (2x + g(y/x))^{1/2}$$

Igaz-e, hogy

$$xuu'_x + yuu'_y = x, \qquad \text{ha } x > 0.$$

b) Legyen

$$f(x,y) = (2x + \frac{y^2}{x^2})^{1/2} \qquad P(-1,2)$$

Számolja ki f-nek a P pontbeli $\underline{v} = (-2,3)$ irányú iránymenti deriváltját!

4) Feladat (13 pont).
Vezesse le az $f(x) = \arcsin x$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, annak konvergencia sugarát!
Írja fel az $f(x) = \text{arscin}\, 3x^5$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, annak konvergencia sugarát!

*** 5) Feladat (20 pont).**

a) Cserélje fel az integrálás sorrendjét és számolja ki:

$$\int_0^1 \int_{2x}^1 \frac{x\ \sin y}{y} dy dx$$

b) Mutassa meg, hogy konvergens és a gömbi koordináták bevezetésével számolja ki:

$$\int\int\int_V \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} dV =? \qquad \text{ahol } V: x^2+y^2+z^2 \leq R^2$$

Jacoby determináns $= \rho^2 \sin\vartheta$

*** 6) Feladat (12 pont).**
Számolja ki a $\omega = (\overline{z}^2)z$ valós és képzetes részét!
Hol differenciálható ez a függvény?

*** 7) Feladat (10 pont).**
Bizonyítsa be, hogy

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi i$$

A *-gal jelölt feladatokból 18 pontot el kell érni!

Pótfeladat. Csak az elégséges jegy eléréséhez javítjuk ki.
7) Feladat (10 pont).
Határozza meg az

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

függvény $x_0 = 1$ küröli Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

(pdf by eMBi)