Valószínűségszámítás pótzárthelyi megoldások

2009. április 29.

1. *Egy szabályos dobókockával addig dobok, amíg ötöst nem kapok. Jelölje X a dobássorozat közben dobott egyesek számát! Mennyi X várható értéke?* $\mathbf{P}(X=0)$ *=?*

Megoldás. Jelölje Y a dobásszámot. Ekkor

$$\mathbf{P}(X=k|Y=n)=\frac{\binom{n-1}{k}4^{n-1-k}}{5^{n-1}},\quad k=0,1,\ldots,n-1,$$

azaz X feltételes eloszlása az $Y=n$ feltétel mellett binomiális, konkrétan $B(n-1,\frac{1}{5})$. Ezt felhasználva a keresett várható érték a következő:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X&=\sum_{k=0}^{\infty}k\mathbf{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\sum_{n=k+1}^{\infty}\mathbf{P}(X=k|Y=n)\mathbf{P}(Y=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}k\mathbf{P}(X=k|Y=n)\mathbf{P}(Y=n)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(Y=n)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}k\mathbf{P}(X=k|Y=n)}_{(n-1)\frac{1}{5}}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\\
&=\frac{1}{36}\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2}=1
\end{aligned}$$

A $\mathbf{P}(X=0)$ valószínűség szintén a teljes valószínűség tételének felhasználásával kapható:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=0)&=\sum_{n=1}^{\infty}P(X=0|Y=n)P(Y=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^{k}=\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{4}{6}}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. *Legyenek az A és B független események, C pedig mindkettőjüket kizáró esemény.* $\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(C)=\frac{1}{3}$. $\mathbf{P}(\bar{A}\cdot B+C)$ =?

Megoldás.

$$\mathbf{P}(\bar{A}\cdot B+C)=\mathbf{P}(\bar{A}\cdot B)+\mathbf{P}(C)=\mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(\cdot B)+\mathbf{P}(C)=\frac{2}{3}\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

3. *Egy dobozban 1 piros 2 fehér és 3 zöld színű golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg mindhárom színből nincs már legalább egy golyónk. Jelölje X a szükséges húzások számát! Adja meg X eloszlását, várható értékét és szórását!*

Megoldás. A keresett valószínűségek a következőképp kaphatók meg:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=3) &= \mathbf{P}(pfz) = 6\frac{1}{6}\frac{2}{5}\frac{3}{4} = \frac{3}{10} = \frac{18}{60} \\
\mathbf{P}(X=4) &= \mathbf{P}(ffpz \vee ffzp \vee fzzp \vee pzzf) \\
&= 3\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{1}{4}\frac{3}{3} + 3\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3} + 3\frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3} + 3\frac{1}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3} = \frac{3}{10} = \frac{18}{60} \\
\mathbf{P}(X=5) &= \mathbf{P}(ffzzp \vee zzzfp \vee zzzpf) \\
&= 6\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} + 4\frac{2}{6}\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{2} + 4\frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3}\frac{2}{2} = \frac{14}{60} \\
\mathbf{P}(X=6) &= \mathbf{P}(ffzzzp) = 10\frac{2}{6}\frac{1}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{1} = \frac{10}{60}
\end{aligned}$$

A várható érték, a második momentum és a szórás az alábbi módon számolhatók:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \frac{1}{60}\left(3\cdot 18 + 4\cdot 18 + 5\cdot 14 + 6\cdot 10\right) = \frac{64}{15} \\
\mathbf{E}X^2 &= \frac{1}{60}\left(9\cdot 18 + 16\cdot 18 + 25\cdot 14 + 36\cdot 10\right) = \frac{1169}{60} \\
\sigma^2 X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{1151}{900} \\
\sigma X &\approx 1.13
\end{aligned}$$

4. *Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a(x^2+3xy+y^2) & \text{, ha } 0 < x, y < 1 \\ 0 & \text{, egyébként} \end{cases}$$

Mennyi az a értéke? Függetlenek-e X és Y?

Megoldás. Az egységre normáltsági feltételből számítható a értéke:

$$\begin{aligned}
1 &= a\int_0^1\int_0^1 x^2+3xy+y^2 dxdy = a\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2y+xy^2\right]_0^1 dy \\
&= a\int_0^1 \frac{1}{3}+\frac{3}{2}y+y^2 dy = a\left[\frac{1}{3}y+\frac{3}{4}y^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = a\frac{17}{12}
\end{aligned}$$

A fentiek alapján tehát $a = \frac{12}{17}$. A sűrűségfüggvények az alábbiak lesznek:

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{12}{17}\int_0^1 x^2+3xy+y^2 dy = \frac{12}{17}\left[x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}\right]$$

Mivel $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, X és Y nem függetlenek.

5. *X és Y független valószínűségi változók. Számolja ki az $f_X(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0,2]$ és az $f_Y(y) = \frac{2y}{5}$, $y \in [2,3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!*

Megoldás. A keresett sűrűségfüggvény értelmezési tartománya $R_{X+Y} = [2,5]$, a függvény maga pedig a következő képlettel kapható:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(t-u)du = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{t-u}{5}du,$$

ahol az integrálási határok változása miatt a következő két esetet különböztetjük meg:

$$\begin{aligned}
t \in [2,3]: \quad f_{X+Y}(t) &= \int_0^{t-2}\frac{t-u}{5}du = \frac{1}{5}\left[tu-\frac{u^2}{2}\right]_0^{t-2} = \frac{t^2-4}{10} \\
t \in [3,5]: \quad f_{X+Y}(t) &= \int_{t-3}^{3}\frac{t-u}{5}du = \frac{1}{5}\left[tu-\frac{u^2}{2}\right]_{t-3}^{3} = \frac{(6-t)t}{10}
\end{aligned}$$