Méréselmélet 1. zárthelyi 2021. március 16. (120 perc)

1. Zajos megfigyelés(ek)re alapozva eldöntendő, hogy a megfigyelési csatornában az a_0 vagy egy attól eltérő a_1 jelszint van-e jelen? H_0 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_0 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.6$. H_1 jelöli azt a hipotézist, hogy az a_1 jelszint van jelen. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.4$. A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 1$. A feltételes valószínűségsűrűség függvények:

$$f\{z|H_0\} = \begin{cases} \dfrac{3z\left(1-\frac{z}{2}\right)}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases} \qquad f\{z|H_1\} = \begin{cases} \dfrac{z}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases}$$

Az elsőként megfigyelt érték $z_0 = 1.2$. Hogyan dönt (max. 3 pont)? Elvégzünk egy második mérést is, aminek eredménye $z_1 = 1.8$. Erre a mérésre alapozva hogyan dönt (max. 1 pont)? Hogyan dönt, ha mindkét megfigyelt értéket figyelembe veszi (max. 1 pont)? Mekkora lehet az a_0 jelszint várható értéke (max. 2 pont)?

Megoldás:

A megfigyelt értéket behelyettesítjük a likelihood arány függvénybe, és ha $\Lambda(z) > \eta$, akkor a döntés H_1, ha $\Lambda(z) < \eta$, akkor a döntés a H_0.

$$\eta = \frac{0.6(10-1)}{0.4(10-1)} = \frac{3}{2} = 1.5,\ \Lambda(z_0) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)} \cong \frac{0.6}{0.72} \cong 0.83 < \eta,\ \Lambda(z_1) = \frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.9}{0.27} \cong 3.33 > \eta,$$

$$\Lambda(z_0, z_1) = \frac{f(z_0|H_1)}{f(z_0|H_0)}\frac{f(z_1|H_1)}{f(z_1|H_0)} \cong \frac{0.6}{0.72}\frac{0.9}{0.27} \cong \frac{0.54}{0.1944} \cong 2.78 > \eta$$

A döntéseink rendre: H_0, H_1, H_1

$E[a_0] = 1$, mert a sűrűségfüggvény $z = 1$-re szimmetrikus.

$$E[a_0] = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f\{z|H_0\} dz = \int_0^2 \frac{3z^2\left(1-\frac{z}{2}\right)}{2} dz = \frac{z^3}{2}\Big]_0^2 + \frac{3z^4}{16}\Big]_0^2 = 4 - 3 = 1$$

2. Az $f\{a|z\} = \begin{cases} \frac{a}{2}, & 0 \le z \le 2 \\ 0\ egyébként \end{cases}$ a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 2 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) számértékét! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő varianciáját (max. 2 pont)?

Megoldás:

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a f(a|z) da = \int_0^2 \frac{a^2}{2} da = \frac{a^3}{6}\Big]_0^2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}, \qquad \hat{a}_{ABS}: \frac{x^2}{2} * \frac{1}{2} = 0.5 \to x = \sqrt{2},\ \hat{a}_{ABS} \cong 1.414$$

$\hat{a}_{MAP} = 2.$

$$var(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 f(a|z) da - \hat{a}_{MS}{}^2 = \int_0^2 a^3 \frac{1}{2} da - \hat{a}_{MS}{}^2 =$$

$$= \frac{a^4}{8}\Big]_0^2 - \hat{a}_{MS}{}^2 = 2 - \left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \cong 0{,}22$$

3. Az átlagos négyzetes hibát az $mse(\hat{a}) = E[(\hat{a} - a)^2] = var(\hat{a}) + b^2(a)$ összefüggéssel definiáltuk. Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = a + w_k,\ k = 0,1,\dots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, és valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Vezesse le a minimális varianciájú, torzítatlan becslő kifejezését erre az esetre (max. 3 pont)! Vajon az átlagos négyzetes hiba csökkenthető-e az elért minimális variancia alá, ha megengedjük, hogy $b(a) \neq 0$ legyen? A vizsgálatot úgy végezze, hogy az optimális torzítatlan becslő helyett annak α-szorosát használja becslőnek, és ezen paraméter függvényében minimalizálja $mse(\hat{a})$ kifejezését (max. 4 pont)!

Megoldás:

A csatornakarakterisztika:

$$f(\mathbf{z}|a) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - a)^2},$$

amelynek maximumhelyénél kapjuk az a paraméter Gauss-Markov becslőjét:

$$\left.\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}|a)}{\partial a}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{ML}=\hat{a}_{GM}} = \frac{N}{\sigma_n^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k - a\right] = 0,$$

ahonnan

$$\hat{a}_{ML} = \hat{a}_{GM} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,$$

azaz lineáris megfigyelési egyenlet és Gauss eloszlású csatorna zaj esetén a legjobb (Gauss-Markov) becslő az egyszerű átlagolás. Ez torzítatlan, mert $E\{\hat{a}_{ML}\}$=a, valamint minimális varianciájú, mert

$$\frac{\partial \ln f(z;a)}{\partial a} = I(a)(g(z)-a)$$

struktúrájú:

$$\hat{a}_{ML} = g(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,\;\; var\{\hat{a}_{ML}\} = I^{-1}(a) = \frac{\sigma_n^2}{N}.$$

Ha $\hat{a} = \alpha * \hat{a}_{ML}$, akkor

$$mse(\hat{a}) = var(\hat{a}) + b^2(a) = \alpha^2\frac{\sigma_n^2}{N} + (\alpha-1)^2 a^2$$

Ennek minimumhelye α függvényében:

$$\frac{\partial mse}{\partial \alpha} = 2\alpha\frac{\sigma_n^2}{N} + 2(\alpha-1)a^2\Big|_{\alpha=\alpha_{mse}} = 0,$$

ahonnan

$$\alpha_{mse} = \frac{a^2}{a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}$$

. Ezt visszahelyettesítve

$$mse(\hat{a},\alpha_{mse}) = \left(\frac{a^2}{a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}\right)^2\frac{\sigma_n^2}{N} + \left(\frac{\frac{\sigma_n^2}{N}}{a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}}\right)^2 a^2 = \frac{\sigma_n^2}{N}\frac{a^2\left(a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}\right)}{\left(a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}\right)^2} = \frac{\sigma_n^2}{N}\frac{a^2}{a^2+\frac{\sigma_n^2}{N}} \le \frac{\sigma_n^2}{N},$$

azaz az mse (és ezzel $var(\hat{a})$) csökkenhet torzított mérés esetén! Azonban ez általában nem „realizálható", tehát csak elvi megfontolás, hiszen α_{mse} az ismeretlen a paraméter függvénye! Ugyanakkor próbálkozni lehet!

4. Additív, Gauss eloszlású zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = A + w_k$, $k = 0,1,\dots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, várható értéke nulla, de a szórása ismeretlen. Torzítatlan-e a következő becslés? (max. 4 pont)

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix}\hat{A}\\ \widehat{\sigma^2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k\\ \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z_k-\hat{A}\right)^2\end{bmatrix}$$

Megoldás:

Mivel $E\{z_k\} = A$, ezért a A paraméter becslése torzítatlan. Mivel

$$E\left\{\widehat{\sigma^2}\right\} = \frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} E\left(z_k - A - \hat{A} - A\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{k=0}^{N-1} E\{(z_k-A)^2\} - 2\sum_{k=0}^{N-1} E\left\{(z_k-A)\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(z_j-A)\right\} + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}(z_i-A)\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}(z_j-A)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[N\sigma^2 - 2\sigma^2 + \sigma^2\right] = \sigma^2,$$

tehát a σ^2 paraméter becslése torzítatlan. Itt felhasználtuk, hogy $E\{(z_k - A)^2\} = \sigma^2$, és $E\{(z_k - A)(z_j - A)\} = 0$, ha $j \neq k$.

5. Távolságot mérünk radarral: $R = \tau\frac{c}{2}$, ahol τ a reflektálódott elektromágneses hullám terjedési ideje, c a fénysebesség. A terjedési idő megfigyelésére van lehetőségünk, összesen négy megfigyelést végzünk. A megfigyelési egyenlet: $z_k = \tau + w_k$, ahol w_k nulla várható értékű, $C_w = \sigma_w^2 I$ kovariancia mátrixú, Gauss eloszlású zaj. Azt is tudjuk, hogy R μ_R várható értékű, és σ_R^2 varianciájú valószínűségi változóként modellezhető. Válasszon olyan mérési módszert, amely minden elérhető információt hasznosít! Vezesse le a becslő és varianciájának kifejezését (max. 4 pont)! Adja meg a numerikus értékeket is, ha $z_0 = 95\mu s, z_1 = 105\mu s, z_2 = 97\mu s, z_3 = 103\mu s$, $\sigma_w = 4\mu s$, $\mu_R = 15km$, $\sigma_R = 300m$ ($c = 3\cdot 10^5\frac{km}{s}$) (max. 2 pont)! Ezt követően határozza meg a távolság értékét és szórását (max. 1 pont)!

Megoldás:

Használjuk a Bayes becslést, és a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját!

$$\left.\frac{\partial f(a|\mathbf{z})}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0, \quad \left.\frac{\partial \ln f(\mathbf{z}|a)}{\partial a} + \frac{\partial \ln f(a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}} = 0.$$

Most $f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R}e^{-\frac{(R-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}}$, illetve $f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\tau}e^{-\frac{(\tau-\mu_\tau)^2}{2\sigma_\tau^2}}$ $f(\mathbf{z}|\tau) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-\tau)^2}$, amiből

$$\frac{\partial \ln f(\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\tau-\mu_\tau}{\sigma_\tau^2}, \quad \frac{\partial \ln f(\mathbf{Z}|\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - \tau). \quad \left.\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - \tau) - \frac{\tau-\mu_\tau}{\sigma_\tau^2}\right|_{\tau_{MAP}} = 0$$

$$\tau_{MAP} = \frac{\mu_\tau + \frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1} z_k}{1+N\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_w^2}}, \quad var\{\tilde{\tau}\} = \frac{\sigma_\tau^2}{1+N\frac{\sigma_\tau^2}{\sigma_w^2}}$$

Tehát:

$$\hat{\tau}_{MAP} = \frac{100 + \frac{1}{4}400}{1 + 4\frac{1}{4}}\mu s = 100\mu s, \sqrt{var(\hat{\tau}_{MAP})} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}\mu s$$

A távolság értéke és szórása:

$$\hat{R}_{MAP} = \hat{\tau}_{MAP}\frac{c}{2} = 100\mu s * \frac{3\cdot 10^5}{2}\frac{km}{s} = 15km,$$

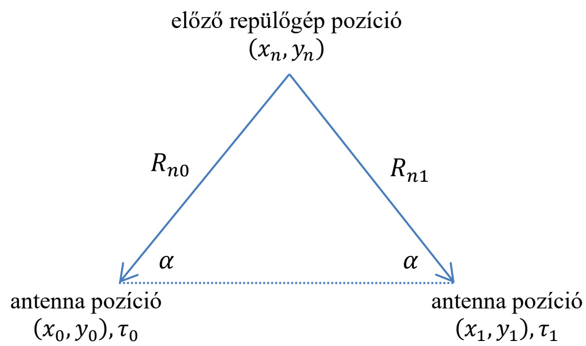
$$\sqrt{var(\hat{R}_{MAP})} = \frac{c}{2}\sqrt{var(\hat{\tau}_{MAP})} = \frac{3\cdot 10^5}{2}\frac{km}{s}\sqrt{2}\cdot 10^{-6}\mu s \approx 212.13m$$

6. Repülőgépet követünk két földi mérőállomással. A robotpilóta fixen tartja a tengerszint feletti magasságot, tehát csak a vízszintes eltérés becslését kell megoldanunk. A probléma megoldásához az előadáson megismert összefüggések a következők:

$$R_k(x_s, y_s) = \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_k}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1,$$

ahol t_k a vételi időpont, T_0 az üzenetküldés időpontja, c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, melynek mintái korrelálatlanok. $\boldsymbol{a} = [x_s \;\; y_s]^T$.



Feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, az ismeretlenhez közeleső pozíció x_n, y_n és $R_{nk}, k = 0,1,\cdots,N-1$, adatai.

$$R_k \cong R_{nk} + \left.\frac{\partial R_k}{\partial x_s}\right|_{x_s=x_n} \delta x_s + \left.\frac{\partial R_k}{\partial y_s}\right|_{y_s=y_n} \delta y_s = R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s,$$

$$t_k = T_0 + \frac{R_{nk} + cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban is mert konstans, ezért a továbbiakban bevezethetjük:

$$\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Egy további transzformációval azonban T_0 kiiktatható: ez az érkezési idők különbsége (time difference of arrivals: TDOA) módszer. Képezzük a következő különbségeket:

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[cos(\alpha_k) - cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s + [sin(\alpha_k) - sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}],$$

$$k = 1,\cdots,N-1.$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} cos(\alpha_1) - cos(\alpha_0) & sin(\alpha_1) - sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ cos(\alpha_{N-1}) - cos(\alpha_{N-2}) & sin(\alpha_{N-1}) - sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} + \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{w}',$$

$$\boldsymbol{w}' = \begin{bmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_{N-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}'} = E[\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{A}^T] = \sigma_w^2[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T].$$

$$\widehat{\boldsymbol{a}}' = \begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} = [\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{z}, \ \boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = \sigma_w^2[\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}.$$

Aktualizálja a fenti összefüggéseket az ábra szerinti esetre, és becsülje meg a vízszintes irányú elmozdulás értékét és szórását, ha $\sigma_w = 0.1\mu s$, $z_1 = -1\mu s$ és $\alpha = 60°$ (max. 4 pont)! Milyen további információra van szükségünk ahhoz, hogy a repülőgép sebességét is meg tudjuk határozni? (max. 1 pont)

Megoldás: $\boldsymbol{U} = \frac{1}{c}[cos(120°) - cos(60°)] = -\frac{1}{c}$, $\boldsymbol{A} = [-1 \quad 1]$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = 2$, $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{w}'} = 2\sigma_w^2$, $\hat{a}' = \widehat{\delta x_s} = -cz_1 = 300m$
$\boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = 2c^2\sigma_w^2$, $\sqrt{var(\hat{a}')} = 30 * \sqrt{2} \cong 42{,}43m.$

7. Egységnyi szórású fehér-zaj minta-sorozatból színes-zaj mintasorozatot szeretnénk előállítani. Vezesse le, hogy milyen tulajdonságú mátrixszal kell transzformálni a fehér-zaj mintasorozatot, hogy a színes zaj kovariancia-mátrixa $\boldsymbol{C}$ legyen (max. 1 pont)! Határozza meg a transzformáció mátrixának elemeit, ha $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ (max. 3 pont)!

Megoldás: $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}'\boldsymbol{D}^T\} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}'\}\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^T = \boldsymbol{C}$.
Egy lehetséges választás: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 + c^2 \end{bmatrix}$. Innen $a = \pm 1$, $b = \frac{\rho}{a} = \pm\rho$, $c = \pm\sqrt{1-\rho^2}$.