

# A MÁGNESES ERŐTÉR

(Mágnességtani kísérleteiről írva...)

Sok fájdalommal és nagy költségekkel  
álmatlan éjszakák árán derítettük ki és igazoltuk.  
Élvezétek, s ha sikerül, használjátok jobb célokra.

WILLIAM GILBERT

A természetes mágnésércről (megjelent 1600-ban)

## 30.1 Bevezetés

Az előző fejezetekben a távolság négyzetével fordítottan arányos gravitációs és Coulomb-erőkről volt szó. Ezeket az erőket a tömegek vagy töltések egymáshoz viszonyított (relatív) mozgása nem befolyásolja. Most olyan erővel foglalkozunk, amely függ a töltések mozgásától is. Ha két töltés mindegyike mozog, akkor a Coulomb-erőn kívül *mágneses* erővel is hatnak egymásra. Ez a folyamat kissé bonyolult, ezért a tárgyalást két részre bontjuk: az első részben azt mutatjuk meg, hogy mozgó töltés mágneses erőteret kelt; a második részben pedig azt, hogy a mágneses erőterben mozgó töltésre erő hat. (Ezt az eljárást követtük a Coulomb-erők tárgyalásakor is: az egyik töltés az elektromos erőter forrása, amely a második töltésre erőt gyakorol.) Ebben a fejezetben a mágneses erőternek a mozgó töltésre gyakorolt hatását írjuk le, a következő fejezetben pedig a mágneses erőter eredetét elemezzük.

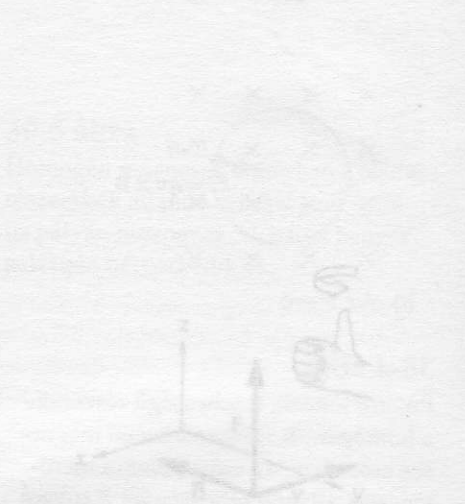
## 30.2 A mágneses erőter

A mágnességre vonatkozó első feljegyzett megfigyelés az ókori görögöktől származik, kb. 2500 évvel ezelőttről. A *mágnesség* szó a görög „magnetis lithos” kifejezésből ered, ami a Görögország északi részén található Magnesia környékén található vasoxidot (*magnetit*,  $Fe_3O_4$ ) tartalmazó ásvány neve. Ez a „természetes mágnes” hasonló ércdarabokra és vastárgyakra erőt gyakorol; továbbá, mágneses tulajdonsággal ruházza fel a hozzá érintett vasdarabot is. Elsőként valószínűleg az ősi kínaiak fedezték fel, hogy egy fonálra függesztett mágnesvasérc magától észak-déli irányba áll be. Ez arra utal, hogy a Föld óriási mágnesként viselkedik. Közismertek a vasreszelék erővonal-ábrái, amelyek azt szemléltetik, hogy milyen a mágneses erőter egy rúd-mágnes körül (30-1 ábra). Mágneses erőter jelenlétében a vasreszelék-szemcsék kicsiny mágnesekké válnak, az erőter irányába rendeződnek és egymást vonzva láncokat alkotnak. A láncok szemléltetik a mágneses erőter szerkezetét.

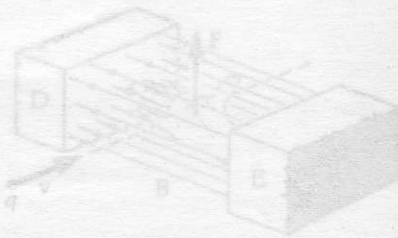
Az, hogy az iránytű a mágneses erőterben mindig egy kitüntetett irányba mutat, arra utal, hogy a mágneses erőternek vektortulajdonságai vannak. A mágneses erőter formális, mérési utasítással megadott definíciója a követ-

30-2 ábra

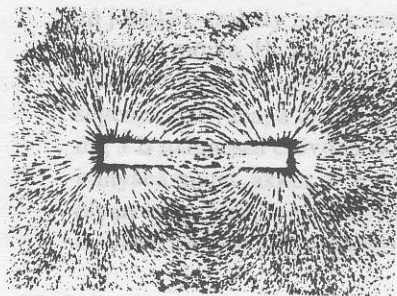
Az ábra síkjára merőleges irányú erővonalak ábrázolása



ez az  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  vektoriális szorzat jobbkéz-szabályának szokásos alkalmazása. Ha jobb kezünk ujjait abban az irányban hajlítjuk be, amilyen irányban a  $\mathbf{v}$  vektor a  $\mathbf{B}$  vektorra rá tudnánk forgatni, akkor a kinyújtott hüvelykujj éppen  $\mathbf{F}$  irányát jelöli ki.



b) A vektoriális szorzatra vonatko-



30-1 ábra

A papírlapra szórt vasreszelék a papír síkja alatt lévő rúd-mágnes mágneses erőterének megfelelően rendeződik el.

kező: Helyezzünk el a vizsgált pontban egy tetszőleges töltést. Ha a nyugalomban lévő töltésre erő hat, arra következtethetünk hogy *elektrosztatikus erőtér* van jelen. Ha ezen kívül más erőt is tapasztalunk a töltés mozgatásakor, akkor levonhatjuk azt a következtetést, hogy *mágneses erőtér* is jelen van. Ilyen kísérletek eredményeként a mágneses erőtérre vonatkozóan a következő tapasztalatokat rögzíthetjük:

*Az erő nagysága arányos a vizsgált pontban elhelyezett töltés nagyságával.*

*Az erőhatás iránya a mozgás irányára mindig merőleges.*

*Ha a töltés adott irányban mozog, az erő a sebességgel arányos; az adott sebesség esetián azonban az erő a mozgás irányától függ. (Tehát a mágneses térnek vektortérnek kell lennie.)*

Az a kísérleti tapasztalat, hogy az erő mindig merőleges a sebesség irányára, arra utal, hogy a mágneses erőtér matematikailag vektoriális szorzattal írható le. A kísérleteken alapuló következő egyenlet a **B mágneses indukcióvektort** (vagy másként a **mágneses fluxussűrűséget**<sup>1</sup>) definiálja. A tér **B** mágneses indukciójú pontjában  $v$  sebességgel haladó  $q$  töltésre ható **F** erőt az alábbi összefüggés adja meg:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (30-1)$$

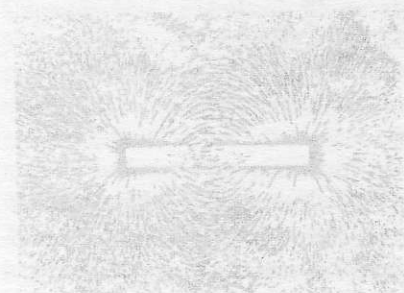
A mágneses indukció SI egysége az 1 newton-szekundum/coulomb-méter (1 Ns/Cm = 1 tesla<sup>2</sup> (T)). Minthogy **F** mindig merőleges a  $v$  és **B** vektorok által alkotott síkra, a viszonyokat gyakran háromdimenziós ábrákon kell illusztrálnunk. (Ezt az erőt szokás mágneses Lorentz erőnek, röviden *Lorentz erőnek* is nevezni, de erre a későbbiekben még visszatérünk.)

A mágneses erőteret az elektromos erőtérhez hasonlóan ábrázoljuk. Erővonalakat rajzolunk, melyek sűrűsége arányos a fluxussűrűséggel és a hozzájuk húzott érintő iránya a mágneses indukció irányába mutat az adott pontban. Éppúgy, mint az elektromos erőterek szemléltetésénél, adott mágneses indukciót jellemző erővonalak száma önkényes lehet, például adott fluxussűrűséget éppúgy jellemezhetünk 10 vonallal, mint akár 10<sup>4</sup> vonallal négyzetméterenként, ezért célszerűségi és kényelmi szempontok alapján választjuk meg az erővonalsűrűség és az indukció közötti arányossági tényezőt. A természetben erővonalak nem léteznek: ezek csak a mágneses erőtér tulajdonságainak, szerkezetének szemléltetésére szolgáló segédeszközök. A 30-1 ábrán látható vasreszelék-mintázat viszonylag jól mutatja a mágneses erőtér irányait, ám egyáltalán nem tükrözi helyesen a mágneses erőtér intenzitását a különböző helyeken.

A mágneses iránytűnek az északi irányt mutató hegyét a tű *északi pólusának*, a másik végét pedig *déli pólusnak* nevezzük. A 30-1 egyenlettel összhangban, a rúd-mágnes mágneses erőterének iránya olyan, hogy az erővonalak az északi pólusból indulnak ki, és a déli pólusba lépnek be.

<sup>1</sup> Néha, meglehetősen pongyola módon **B**-t mágneses térerősségnek nevezik. A mágneses térerősség vektor definíciója  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ , ahol  $\mu$  a mágneses erőtérben az anyag mágneses permeabilitása.

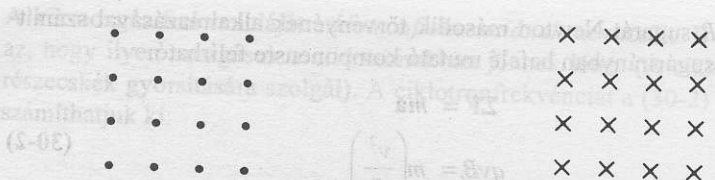
<sup>2</sup> Ezt az egységet Nikola Tesla (1856-1943) szerb származású amerikai mérnökről nevezték el, aki az elektromos energiatermelés és szállítás számos szellemes módszerét dolgozta ki, többek között ő tervezte a Niagara-vízesésen működő erőművet. Az 1 tesla meglehetősen nagy egység; a legnagyobb fluxussűrűséget (68 T) 1987 tavaszán, a Massachusetts Institute of Technology (Boston, USA) mágneses laboratóriumában érték el. Ez 5,6 ms hosszú impulzussal megvalósított 68 T indukciójú mágneses tér volt. Kisebb (CGS eredetű) fluxussűrűség-egység az 1 gauss (G); 1 G = 10<sup>-4</sup>T. A Föld mágneses fluxussűrűsége az egyenlítőnél közelítőleg 0,3 G; kis rúd-mágnes néhány száz G indukciót hozhat létre. Ennél is kisebb egység az 1 gamma (γ) melyet a geofizikusok és űrutatatók használnak: 1 γ = 10<sup>-5</sup> G = 10<sup>-9</sup>T.



30-1 ábra

A rúd-mágnes mágneses erőtérének megfelelően rendeződik el a vasreszelék a két pólus között.





- a) A papír síkjából kifelé tartó erővonalak (A pontok arra utalnak, hogy a nyilak az olvasó felé mutatnak).
- b) A papír síkjába befelé tartó erővonalak (Az x-ek arra utalnak, hogy a nyilakat hátulról látjuk).

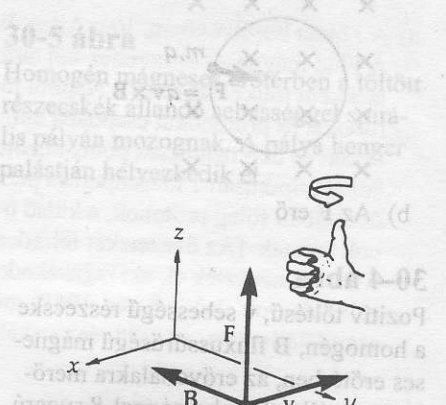
30-2 ábra

Az ábra síkjára merőleges irányú erővonalak ábrázolási módja.

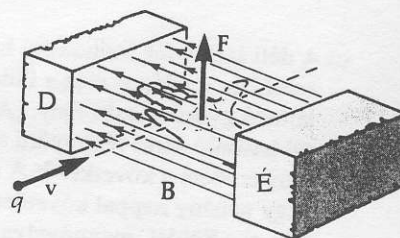
Adott síkra merőleges mágneses erőter ábrázolásának egy lehetséges módja látható a 30-2 ábrán. Az egyes vektorok irányát a háromdimenziós térben jobban el tudjuk képzelni, ha axonometrikus ábrázolás esetén az északi pólusból kiindul és a déli pólushoz tartó erővonalakkal együtt néha felüntetjük a mágneses pólusokat is (lásd pl. a 30-3b ábrát). A széleknél lévő térinhomogenitásokat ezeken a rajzokon rendszerint nem ábrázolják.

A mágneses Lorentz erő, a sebesség és a mágneses indukcióvektor közötti, a (30-1) egyenlettel jellemzett térbeli viszony, a 30-3a ábrán látható jobbkéz-szabállyal szemléltethető. E konvenció szerint, ha a jobb kéz behajlított ujjai abba az irányba mutatnak, amerre a  $v$  vektort a legkisebb szöggel forgathatnánk be a  $B$  irányába, akkor a kinyújtott hüvelykujj  $F$  irányába mutat. A jobbkéz-szabály egy másik megfogalmazását illusztrálja a 30-3b ábra: jobb tenyerünket tartjuk kinyújtva, hüvelykujjunk legyen a többi ujjal egy síkban úgy, hogy az utóbbival mutassunk a mágneses tér irányába. (Ez úgy is megjegyezhető, hogy az ujjak az erővonalak.). A hüvelykujj mutasson a töltött részecske sebességének irányába. A vektorok vektoriális szorzatának definíciója szerint az  $F = qv \times B = (qvb \sin \theta) \hat{n}$  erő az  $\hat{n}$  egységvektor irányába mutat, ahol  $\hat{n}$  a jobbkéz-szabály értelmében mind  $v$ -re, mind  $B$ -re merőleges, és  $\theta$  a hüvelykujj és a mutatóujj közötti szög. A részecskére ható erő a tenyérből kifelé mutat, tehát olyan irányú, mintha a tenyerünkkel valamit éppen megtolnánk.

Amikor a jobbkéz-szabályt alkalmazzuk, a  $q$  töltésnek mindig pozitívnak kell lenni. Ha  $q$  negatív, akkor először a pozitív töltésre ható erő irányát határozzuk meg, majd ezt az irányt ellentétesre változtatjuk. Ennek illusztrálására képzeljünk el egy, az egyenlítő mentén keleti irányban haladó negatív töltést (az egyenlítő téjékán a mágneses tér iránya északi irányú és nagyjából vízszintes). A jobbkéz-szabályt alkalmazva, a hüvelykujj kelet felé, a többi ujj észak felé mutat, a tenyér pedig felfelé, jelezve, hogy pozitív töltésre felfelé mutató erő hat. A negatív töltésre értelemszerűen lefelé mutató erő hat.



- a) Az  $F = qv \times B$  vektoriális szorzat jobbkéz-szabályának szokásos alkalmazása. Ha jobb kezünk ujjait abban az irányban hajtjuk be, amilyen irányban a  $v$  vektort a  $B$  vektorra rá tudnánk forgatni, akkor a kinyújtott hüvelykujj éppen  $F$  irányát jelöli ki.



- b) A vektoriális szorzatra vonatkozó jobbkéz-szabály másik megjegyzési módja. Ha a jobb kéz hüvelykujja a részecske  $v$  sebességének irányába, a többi ujj pedig a  $B$  mágneses erővonalak irányába mutat, akkor az  $F$  erő olyan irányú, amilyen irányban a tenyér éppen megtolna valamit.

### 30.3 Töltött részecskék mozgása mágneses erőterben

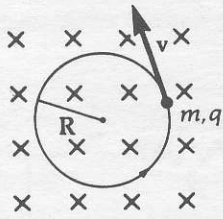
Töltött részecskék mágneses erőterben történő mozgásának fontos vonása ered onnan, hogy a Lorentz erő mindig merőleges a sebességre. Ennélfogva a mágneses Lorentz erő a részecskén munkát nem végez, a részecske sebessége állandó nagyságú marad, a sebesség iránya azonban az oldalirányú erő miatt változik.

Ha a töltött részecske  $v$  sebessége  $B$ -re merőleges, akkor a részecske állandó sebességgel körpályán mozog. A centripetális erőt, amely a  $v^2/R$  centripetális gyorsulás létrehozásához szükséges (30-4 ábra), a mágneses Lorentz erő biztosítja. Minthogy  $v$  és  $B$  egymásra merőlegesek, a mágneses erő nagysága

$$F = q|v \times B| = qvB \sin 90^\circ = qvB$$

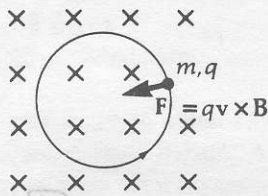
30-3 ábra

A jobbkéz-szabály megjegyzésének két módja



**B** a papír síkjába befelé mutat

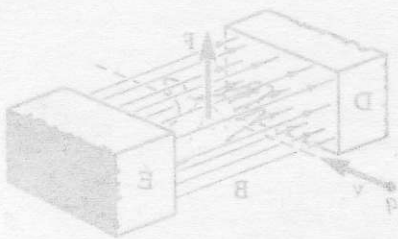
a) A  $v$  sebesség.



b) Az  $F$  erő

### 30-4 ábra

Pozitív töltésű,  $v$  sebességű részecske a homogén,  $B$  fluxussűrűségű mágneses erőtérben, az erővonalakra merőlegesen, állandó sebességgel  $R$  sugarú körpályán mozog. A körmozgás frekvenciáját ciklotronfrekvenciának nevezzük.



A körpálya  $R$  sugarát Newton második törvényének alkalmazásával számíthatjuk ki. A sugárirányban befelé mutató komponensre felírható:

$$\Sigma F = ma$$

$$qvB = m \left( \frac{v^2}{R} \right) \quad (30-2)$$

$$R = \frac{mv}{qB} \quad (30-3)$$

A részecske  $mv$  impulzusa és  $K$  mozgási energiája között az alábbi összefüggés<sup>3</sup> áll fenn:

$$mv = \sqrt{2mK} \quad (30-4)$$

Az előző két egyenlethől  $v$  kiküszöbölésével azt kapjuk, hogy:

$$R = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} \quad (30-5)$$

### 30-1 PÉLDA

Egy 500 eV kinetikus energiájú elektron 0,010 T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtérben, arra merőleges irányban mozog. Számítsuk ki a körmozgás pályájának sugarát.

### MEGOLDÁS

Először bizonyosodjunk meg arról, hogy minden mennyiség SI egységben van-e megadva<sup>4</sup>, majd helyettesítsük be azokat a (30-5) egyenletbe:

$$R = \frac{\sqrt{2mK}}{qB} = \frac{\left[ (2)(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})(500 \text{ eV}) \left( \frac{1,602 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right) \right]^{1/2}}{(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})(0,010 \text{ T})}$$

$$R = 7,54 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Az elektron energiáját az  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$  összefüggés segítségével számítottuk át SI egységűvé.

<sup>3</sup> Minthogy az elektronoknak, sőt, még a protonoknak is nagyon kicsi a tömege, ezeket a töltött részecskéket viszonylag egyszerű a fénysebességet ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ) megközelítő sebességre felgyorsítani, ami bármely objektum sebességének felső korlátja ( $v_0$ ). A „Speciális relativitáselmélet” című 41. fejezetben leírtakkal). Például, ha elektront nyugalmi helyzetéből 2500 V potenciálkülönbségen át gyorsítunk, végsebessége a fénysebességnek kb. egytizede lesz. Ilyen sebességek felett a „klasszikus” (nem-relativisztikus) egyenletek közül jónéhány, például a 30-4 összefüggés is, észrevehető mértékben torzít. Jelen céljainknak megfelelően a mozgó töltések sebességét a fénysebességnél mindig sokkal kisebbnek tekintjük; a jelenség pontosabb leírása a 41. fejezetben található.

<sup>4</sup> Egészen eddig az egyenletek mértékegység szerinti összhangját könnyen ellenőrizhettük a mértékegységek behelyettesítésével és egyszerűsítésével. Most, hogy egyre több és több olyan származtatott egységet használunk mint pl. a tesla, mind bonyolultabb mértékegységek összetételek kerülnek be az egyenletekbe, s a mértékegységek összhangjának ellenőrzése megnehezedik. Emiatt célszerű már a kezdet kezdetén minden mennyiséget SI egységben megadni, s akkor biztosak lehetünk abban, hogy a végeredményt is ebben a mértékrendszerben kapjuk. Bár a dimenzió-analízis a fizika sok területén rendkívül hasznos ellenőrzési módszer, az elektromosságtan és a mágnességtan területén többek szerint is olyan, mint a „zúzavartól zümmögő méhkas” ill. „ostoba hibák gyűjteménye”.



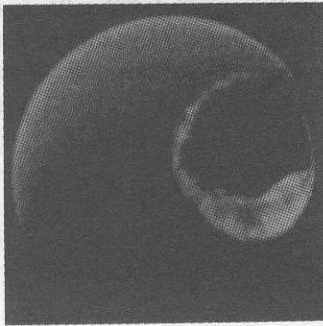




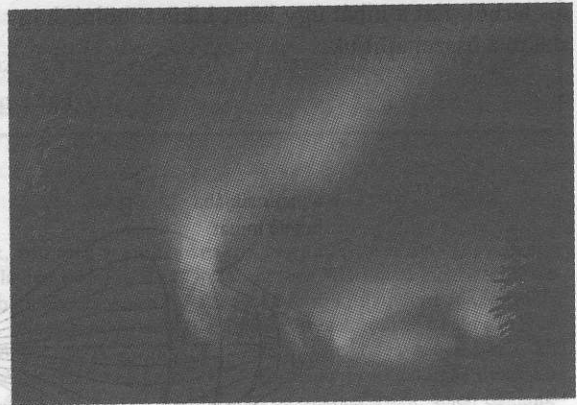
a) A Földet körülvevő ún. Van Allen övezet keresztmetszete.

A Föld mágneses erőterének két tartománya mágneses palackként működik, mely a Naptól jövő nagyenergiájú elektronokat és protonokat csapdába ejti. A töltött részecskék az északi és déli mágneses pólus között spirális pályán oszillálnak, tipikusan 1 másodperces periódusidővel. A belső övezetben főleg protonok, a külső övezetben főleg elektronok vannak. [Az övezeteket felfedezőjükről, Dr. James Van Allenről nevezték el, aki ragaszkodott ahhoz, hogy az Egyesült Államok első (sikeres, 1958) műholdján Geiger-számláló legyen, a töltött részecskék detektálására.]

b) A *napszél* a Naptól kibocsátott protonok és elektronok áramlása, amely a Föld mágneses erővonalrendszerét a Nappal ellentétes irányba „fújja el”. A részecskék mintegy 400–800 km/s sebességgel érkeznek a Föld mágneses erőterébe és görbült alakú *lökéshullámot* valamint több millió kilométer hosszú, üstökösfarokhoz hasonlítható csóvát idéznek elő. A *mágneses burok* tartományában, a lökéshullám mögötti térben, viszonylag lassan plazma áramlik. A részecskék kis része befogódik a *Van Allen-övezetbe*, a többit a mágneses erőter eltéríti. A napszél intenzitása általában meglehetősen egyenletes, de napfoltok és napkitörések idején néha komoly „viharak” lépnek fel.



c) A déli sarkvidék műholdról készült fényképe. A bal felső sarokban a világos rész a Föld napos része, a jobb oldalon látható gyűrű a sarki fény. (Az északi mágneses pólus körül hasonló sarki fénygyűrű szokott megjelenni.) A sarki fény eredete a következő: A napkitöréseket néhány órával vagy néhány nappal követően töltött részecskék hullamai érik el a Földet, megnövelve a Van Allen övezetben lévő, és a mágneses sarkok környezetében onnan kiszabaduló részecskék számát (a „mágneses palack” ott „ereszt”). A Van Allen övezet szerkezete olyan, hogy a legtöbb sarki fényjelenség a mágneses pólusokat körülvevő mintegy 2000 km-es átmérőjű tartományban képződik. A töltött részecskék a felső légkör gázmolekuláival ütközve az oxigén és nitrogén atomjait felvillanásokra készítetik. Ez okozza a sarki fénynek nevezett látványos fényjelenséget. A fénykép az ibolyántúli (elsősorban az atomos oxigéntől származó 130,4 nm hullámhosszúságú) fény eloszlását rögzíti; 12 perces expozíciós idővel készült az Iowai Egyetemen épített speciális műszerrel.



d) Sarki fény Alaszka felett.

### 30-7 ábra

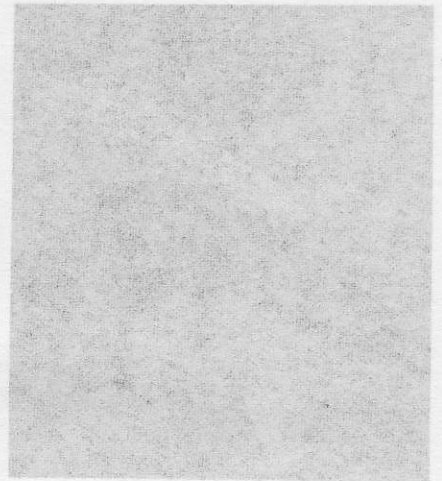
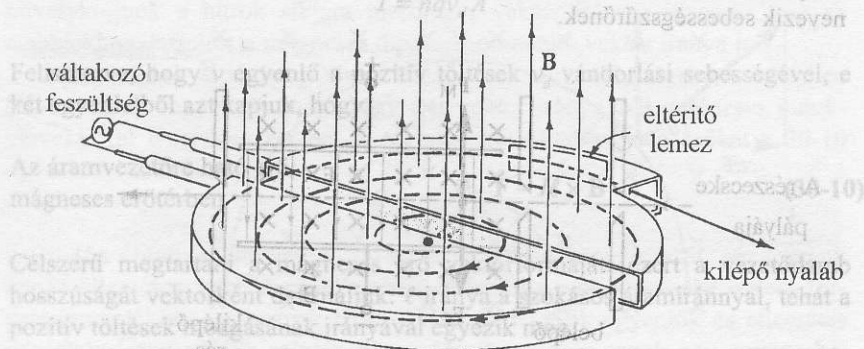
Töltött részecskék a Föld körül.



## A ciklotron

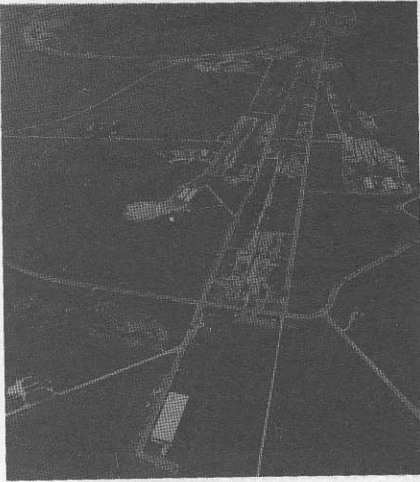
1939-ben Earnest O. Lawrence kapta a fizikai Nobel díjat, mert (S.M.Livingstonnal együtt) kifejlesztette a ciklotront, amellyel töltött részecskék gyorsíthatók a magfizikai kísérletekhez szükséges nagy energiákra. A ciklotron legfontosabb alkatrésze két részre (szektorra) osztható, rézlemezről készült hengeres lapos doboz (30-8 ábra). A két szektor vákuumkamra légüres terében van, ahol a töltött részecskék a levegő molekuláival való ütközés nélkül mozoghatnak. A szektorok síkjukra merőleges irányú homogén mágneses erőterben vannak. A két szektor közé váltakozó feszültséget kapcsolnak, ami a közöttük lévő hézagban minden félperiódusban irányt váltó elektromos erőteret létesít. A szektorok középpontjában elhelyezett ionforrás töltött részecskéket: protonokat, deuteronokat,  $\alpha$  - részecskéket bocsát ki, kis sebességet adva ezeknek a szektorok síkjában. A réz-szektorokon belül, a fémfalak árnyékoló hatása miatt az ionokra elektrosztatikus erő nem hat. A mágneses erőteret viszont a réz nem árnyékolja, tehát az ionok körpályán haladnak. Képzeljünk el egy iont, amely akkor érkezik a szektorok közötti hézaghoz, amikor az ottani elektromos erőter éppen maximális és olyan irányú, hogy az iont gyorsítsa. Ezután az ion, nagyobb sebessége miatt, nagyobb sugarú félkör-pályán mozog. Ha a feszültség előjele megfelelő ütemben változik, az ion a hézaghoz ismét akkor érkezik, amikor az elektromos térerősség megint maximális, de az előzőhöz képest ellentétes irányú, tehát az iont újra gyorsítja. Minden egyes alkalommal, amikor az ion átlépi a szektorok közötti hézagot, mozgási energiája nő, és emiatt mindaddig növekvő sugarú körpályán mozog, amíg meg nem közelíti a henger palástját. Itt egy negatív töltésű *eltérítő lemez* „kihúzza” az iont a körpályáról, és az egy szűk ablakon keresztül elhagyja a vákuumkamarát. A ciklotron működésének alapja az, hogy adott töltésű és tömegű ion minden egyes félkör-pályát azonos idő alatt fut be. A (30-6) képlet szerint a ciklotronfrekvencia független a részecske sebességétől és a pálya sugarától.

Az elérhető részecske-energiának a relativisztikus effektusok miatt felső határa van: ez protonok esetében kb. 22 millió elektronvolt (22 MeV). A részecskén az elektromos erőter a hézag minden egyes átlépésekor munkát végez. Relativisztikus effektusok miatt nagy sebességeken a sebesség már nem nő elegendően ahhoz, hogy „lépést tartson” az elektromos erőter előjelváltásaival. Ezt a problémát a *szinkrotronban* oldották meg oly módon, hogy mind a frekvencia, mind a mágneses tér intenzitása a gyorsítás ideje alatt úgy változik, hogy a részecske pályasugara nagyjából állandó maradjon. E módszer gazdaságossága abban nyilvánul meg, hogy csak a körpálya környezetében kell homogén mágneses erőteret létesíteni, nem pedig teljes körpályán.



30-9 ábra  
Az Enrico Fermi Nemzeti Gyorsító Laboratórium (Batavia, Illinois, USA) protonszinkrotronjának légfelvétele. A fő gyorsítógyűrű 2 km átmérőjű.  $1 \text{ eV} = 103 \text{ GeV} = 106 \text{ MeV}$  energiájú protonok lépnek ki belőle. A protonok a gyűrűből érintő irányban (a képen látható) távoznak a kísérletek konkrét helyére.

30-10 ábra  
A töltött részecskéket sebesség szerint szétválasztó sebességválogó egyaránt merőleges elektromos és mágneses erőteret alkalmaznak. Ha a mozgó részecskére ható  $F_m$  mágneses erő éppen kiegyenlíti az  $F_e$  elektromos erő hatását, a részecske egyes vonal mentén mozog és képes a kilépő részen át távozni. Azok a részecskék, amelyek a kritikus sebességűeknél nagyobb sebességgel mozognak, a mágneses erőter hatására a töltések a ciklotron egyes szektoraiiban félkör-pályán mozognak.



### 30-9 ábra

Az Enrico Fermi Nemzeti Gyorsító Laboratórium (Batavia, Illinois, USA) protonszinkrotronjának légifelvétele. A fő gyorsítógyűrű 2 km átmérőjű; 1 eV = 103 GeV = 106 MeV energiájú protonok lépnek ki belőle. A protonok a gyűrűből érintő irányban (a képen lefelé) távoznak a kísérletek konkrét helyéhez.

### 30-2 PÉLDA

Számítsuk ki a 0,020 T fluxussűrűségű homogén mágneses erőtérben mozgó elektron ciklotronfrekvenciáját.

### MEGOLDÁS

A (30-6) képletet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f = \frac{B}{2\pi} \left( \frac{q}{m} \right) = \frac{(2 \times 10^{-2} \text{ T})(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})}{2\pi(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 5,59 \cdot 10^8 \text{ Hz}$$

## 30.4 A Lorentz-erő

Általában a töltött részecskék az elektromos és a mágneses erőtér hatását egyszerre tapasztalják. Mínt hogy az erőtérrektől származó erők vektorként adódnak össze, a töltésre ható eredő erő az alábbi módon írható:

$$\text{Lorentz-erő} \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (30-7)$$

ahol  $\mathbf{F}$  a  $\mathbf{v}$  sebességű  $q$  töltésre ható erő, amely az  $\mathbf{E}$  elektromos térerősséggel és  $\mathbf{B}$  mágneses fluxussűrűséggel jellemezhető. Ezt az összefüggést a **Lorentz-féle erőtörvénynek** nevezzük.

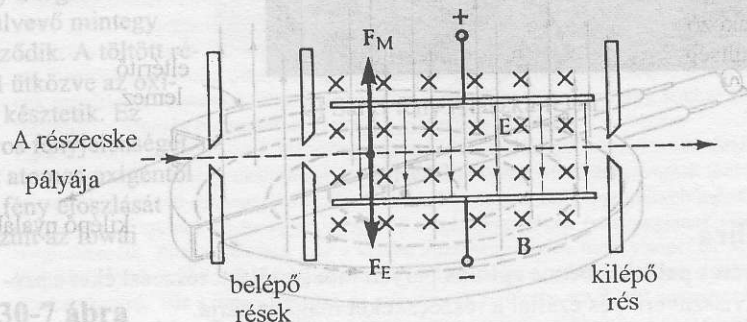
A Lorentz-féle erőtörvény felhasználható például arra, hogy töltött részecskéket sebesség szerint szétválasszunk (sebességszűrőt készítsünk). Tekintünk egy  $m$  tömegű  $q$  töltést, amely  $\mathbf{v}$  sebességgel halad egy rések (apertúrák) által megszabott egyenes pályán (30-10 ábra). A részecske akkor haladhat át a kilépő résen, ha a belépő rések és a kilépő rés közötti térben a rá ható erők eredője zérus. Ennek megvalósítására, ebben a tartományban az elektromos és mágneses erőteret úgy kell összehangolni, hogy a részecskére ható mágneses erő az elektromos erővel éppen egyenlő nagyságú és ellentétes irányú legyen. Pozitív töltések esetén az erők irányát a 30-10 ábra mutatja; negatív töltések esetében mindkét erő iránya éppen ellentétes. A 30-7 erőtörvény szerint  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , tehát zérus eredő erő akkor hat a részecskére, ha  $(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0$ . Ez akkor teljesül, ha a vektorok nagyságára teljesül a

$$v = \frac{E}{B} \quad (30-8)$$

feltétel. Csak azok a részecskék mozognak egyenes pályán (és lépnek ki a kilépő résen), amelyeknek éppen ekkora sebességük van. A berendezést ezért nevezik sebességszűrőnek.

### 30-10 ábra

A töltött részecskéket sebesség szerint szétválasszó *sebességszűrők*ben egymásra merőleges elektromos és mágneses erőteret alkalmaznak. Ha a mozgó részecskére ható  $\mathbf{F}_M$  mágneses erő éppen kiegyenlíti az  $\mathbf{F}_E$  elektromos erő hatását, a részecske egyenes vonal mentén mozog és képes a kilépő résen át távozni. Azok a részecskék, amelyek a kritikus sebéségnél lassabban vagy gyorsabban mozognak, az egyenes pályáról letérnek.



30-7 ábra

Töltött részecskék a Föld körül.



## 30-3 PÉLDA

Egy elektronnaláb sebességszűrőn halad át. Az egymásra merőleges mágneses és elektromos erőtér nagysága  $2 \times 10^{-2}$  T, illetve  $5 \times 10^4$  V/m. Számítsuk ki az elektronok mozgási energiáját (eV egységben).

## MEGOLDÁS

A sebességet a (30-8) képlet alkalmazásával számíthatjuk ki:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{5 \times 10^4 \text{ V/m}}{2 \times 10^{-2} \text{ T}} = 2,5 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A kapott számértékeket behelyettesítve, a kinetikus energia:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}) (2,5 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2$$

$$K = 2,85 \times 10^{-18} \text{ J} \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,602 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = 17,8 \text{ eV}$$

Átszámítási tényező

## 30.5 A mágneses térben levő áramvezetőre ható erő

A legtöbb gyakorlati esetben, a töltések vezetőkben mozognak. Fémhuzalokban például, a töltések elektronok, amelyek  $v_d$  vándorlási sebességgel mozognak. A továbbiakban vizsgáljuk meg, mekkora erő hat ezekre a mozgó töltésekre, ha a vezető mágneses erőtérben van.

A (30-1) összefüggés az egyetlen töltésre ható erőt adja meg:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Az  $\ell$  hosszúságú huzalszakaszban lévő töltéshordozók száma a vezetési elektronok térfogategységenkénti számának ( $n$ ), és a huzalszakasz  $A\ell$  térfogatának szorzata. Így az  $\ell$  hosszúságú huzalszakaszra ható erő:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})nA\ell \quad (30-9)$$

A 28.3 egyenlet szerint az  $I$  áram

$$I = nq v_d A$$

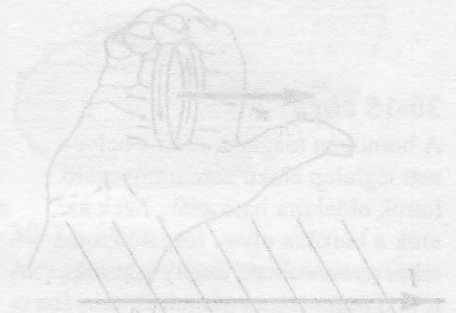
Felismerve, hogy  $v$  egyenlő a pozitív töltések  $v_d$  vándorlási sebességével, e két egyenletből azt kapjuk, hogy

Az áramvezetőre ható erő mágneses erőtérben

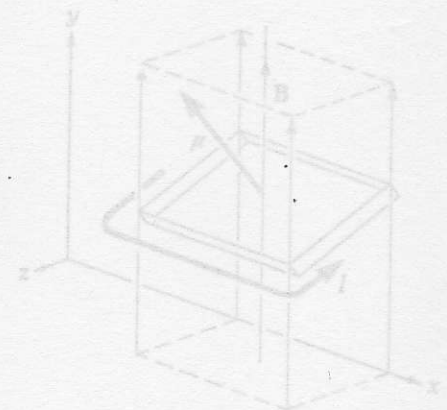
$$\mathbf{F} = I \ell \times \mathbf{B} \quad (30-10)$$

Célszerű megtartani a mágneses erő vektorformáját: ezért a vezetődarab hosszúságát vektorként definiáljuk:  $\ell$  iránya a szokásos áramiránnyal, tehát a pozitív töltések mozgásának irányával egyezik meg.

A (30-10) törvény levezetésekor feltételeztük, hogy a vezető egyenes, és a mágneses erőtér homogén. Ha a huzaldarab tetszőleges alakú, és a mág-



30-13 ábra  
Az áramvezető hurok síkjára merőleges  $\mu$  vektor irányát a következő jobbkezes-szabállyal határozzuk meg: behajlított ujjak az áramirány  $I$  mutatnak, a kinyújtott hüvelykujj  $\mu$  irányát jelzi.



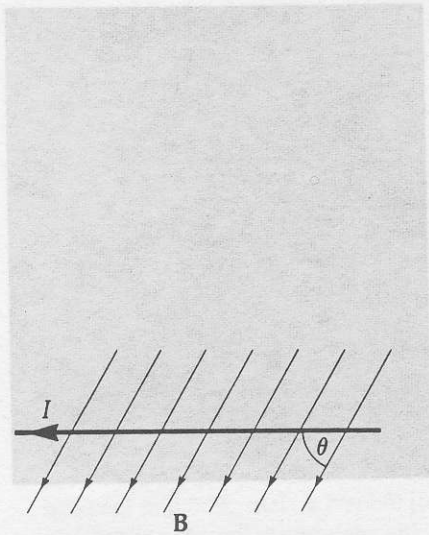
a) Perspektívikus kép



b) Oldalnézetből

## 30-14 ábra

Tégialap alakú áramvezető hurok, amely szöveget zár be a homogén, függőleges irányú mágneses erőtérrel.



30-11 ábra

A 30-4 példához.

Nemzeti Gyorsító Laboratórium (Batavia, Illinois, USA) protonszinkrotronjának légifelvétel. A fő gyorsítógyűrű 2 km átmérőjű; 1 eV = 103 GeV = 106 MeV energiájú protonok légnak ki belőle. A protonok a gyűrűből érintő irányban (a képen lefelé) távoznak a kísérletet konkrét helyéhez.

neses indukció helyről helyre változik, akkor a huzal elemi kis  $d\ell$  darabjára  $d\mathbf{F}$  erő hat:

$$d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B} \quad (30-11)$$

Az eredő erőt úgy kapjuk meg, hogy minden egyes  $d\ell$  elemhez a megfelelő  $\mathbf{B}$  értéket használva, integráljuk a huzal teljes hossza mentén.

30-4 PÉLDA

Homogén,  $3 \times 10^{-3} \text{ T}$  indukciójú mágneses erőtérbe helyezett egyenes huzalon 8 A erősségű áram folyik. A mágneses erővonalak a huzallal  $\theta = 48^\circ$ -os szöveget zárnak be (30-11 ábra). Mekkora erővel hat a mágneses erőtér az áramvezetőre?

MEGOLDÁS

A (30-10) képletet alkalmazva:

$$F = I |\ell \times \mathbf{B}| = I \ell B \sin \theta$$

Így

$$\frac{F}{\ell} = IB \sin \theta = (8 \text{ A})(3 \times 10^{-3} \text{ T})(\sin 48^\circ)$$

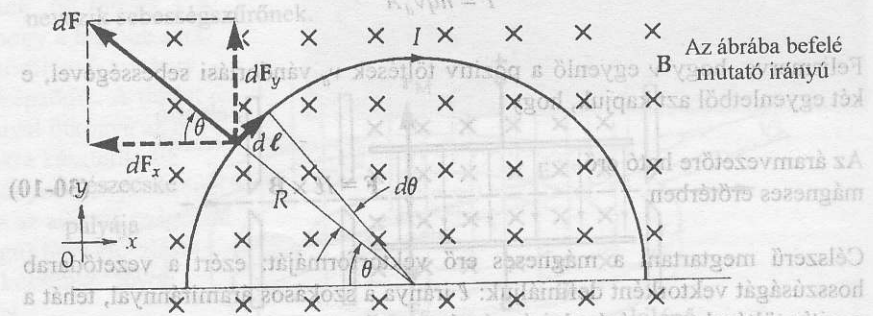
$$\frac{F}{\ell} = 1,78 \times 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad (\text{Ez az ábra síkjából kifelé mutató irányú erő})$$

30-5 PÉLDA

A 30-12 ábrán illusztrált merev,  $R$  sugarú félkörben meghajlított huzalban  $I$  áram folyik. A homogén mágneses erőtér iránya a félkör síkjára merőleges. Az  $I$  áramot a félkörhöz az ábrán nem feltüntetett, az ábra síkjára merőleges huzalok vezetnek. (Ezek tehát a homogén mágneses erőtér irányával párhuzamosak, és így rájuk mágneses erő nem hat.) Számítsuk ki a félkör alakú huzalra ható eredő erőt.

MEGOLDÁS

Mint ahogy a vezetők, amelyek a félkörhöz vezetnek az áramot, párhuzamosak a mágneses térrel, az  $\mathbf{F} = I \ell \times \mathbf{B}$  vektoriális szorzatban  $\sin 0^\circ = 0$  szerepel, tehát ezekre a vezetőkre zérus erő hat.



30-12 ábra

A 30-5 példához.

30-10 ábra

A töltött részecskéket sebesség sze- rint szétválasztó sebesség szűrőben egymásra merőleges elektromos és mágneses erőtérrel alkalmaznak. Ha a mozgó részecskére ható  $F_M$  mágneses erő éppen kiegyenlíti az  $F_E$  elektromos erő hatását, a részecske egyenes vonal mentén mozog és képes a kilépő részen át távozni. Azok a részecskék, amelyek a kritikus sebességnél lassabban vagy gyorsabban mozognak, az egyenes pályáról letérnek.



A  $dF$  erő, amely a félkör elemi  $dl$  hosszúságú szakaszára hat, a 30-11 egyenlettel számítható:  $dF = Idl \times B$ . Minthogy  $B$  a félkör minden pontjában merőleges  $dl$ -re, a  $dF$  erő minden pontban sugárirányú, kifelé mutat, és nagysága

$$dF = IBdl$$

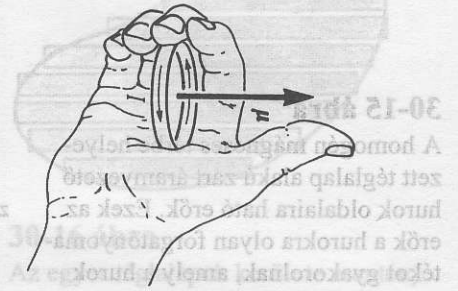
A rendszer szimmetriája miatt, a félkör bal oldalának minden egyes  $dl$  szakaszára ható  $dF$  erőhöz találunk egy, a rendszer jobb oldalán egy megfelelő szakaszra ható olyan másik erőt, amelynek  $x$  komponense egyenlő, de ellentétes előjelű, így összegük zérus. Az  $y$  komponensek viszont azonos irányúak. Tehát, az egész félkörre ható erők összegzését leegyszerűsítjük az erők  $y$  irányú komponensének összegzésére:

$$dF_y = -IBR \sin\theta \, d\theta$$

Az integrálással azt kapjuk, hogy

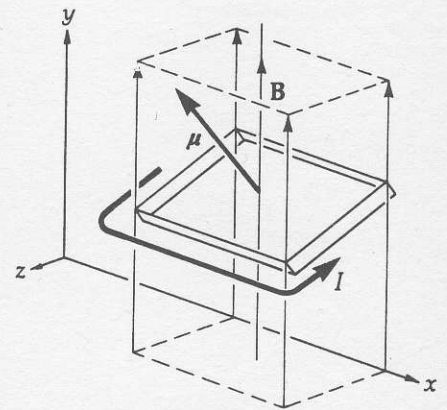
$$F_y = \int dF_y = IBR \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = IBR(-\cos\theta) \Big|_0^\pi = 2IBR \quad (\text{pozitív } y \text{ irányban})$$

Megjegyzendő, hogy ez az erő éppen ugyanakkora, mint amekkora a félkör átmérőjével azonos hosszúságú egyenes vezetőre hatna, vagyis a huzal alakja ebből a szempontból nem lényeges. Ebben a példában azt mutattuk meg, hogy tetszés szerinti alakú, a mágneses térre merőleges síkban lévő huzaldarabra ható erő csak az árambevezetések közötti távolságtól függ. A példa alapján az a következtetés is levonható, hogy a homogén mágneses térbe helyezett, tetszés szerinti alakú, zárt áramvezető hurokra ható erő zérus (noha az egyes szegmensekre zérustól különböző erő hat, eredőjük zérus).

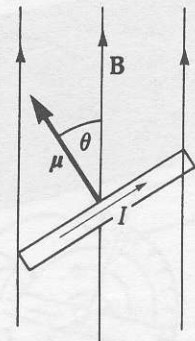


30-13 ábra

Az áramvezető hurok síkjára merőleges  $\mu$  vektor irányát a következő jobbkéz-szabállyal határozzuk meg: a behajlított ujjak az áram irányába mutatnak, a kinyújtott hüvelykujj  $\mu$  irányát jelzi.



a) Perspektivikus kép



b) Oldalnézetből

## 30.6 Mágneses dipólusok

Noha a homogén mágneses erőterbe helyezett áramvezető hurokra ható eredő erő zérus, a forgatónyomaték zérustól különbözik. A jelenség hasonlít a homogén elektromos erőterbe helyezett elektromos dipólus esetére. Tulajdonképpen az analógia közöttük olyan közeli, hogy az áramvezető hurkot mágneses dipólusnak tekintjük.

A mágneses dipólus tárgyalását kezdjük egy, az áramvezető hurok síkjára merőleges vektor meghatározásával. Ezt a 30-13 ábrán illusztrált jobbkéz-szabállyal mutatjuk be: hajlítsuk be jobbkézünk ujjait a hurok mentén úgy, hogy az ujjaink az áramiránnyal azonos irányba mutassanak. Kinyújtott hüvelykujjunk a hurok síkjára merőleges vektor irányát; ugyanez lesz az alábbiakban definiált  $\mu$  mágneses dipólusmomentum vektor irányát is.

Képzeljünk el téglalap alakú áramvezető hurkot a mágneses erőterben (30-14 ábra). Jegyezzük meg, hogy a  $\mu$  vektor iránya a  $B$  mágneses indukcióvektorral  $\theta$  szöveget zár be. A téglalap két oldalára ható erőket a 30-10 egyenlettel számíthatjuk ki:

$$F = Il \times B$$

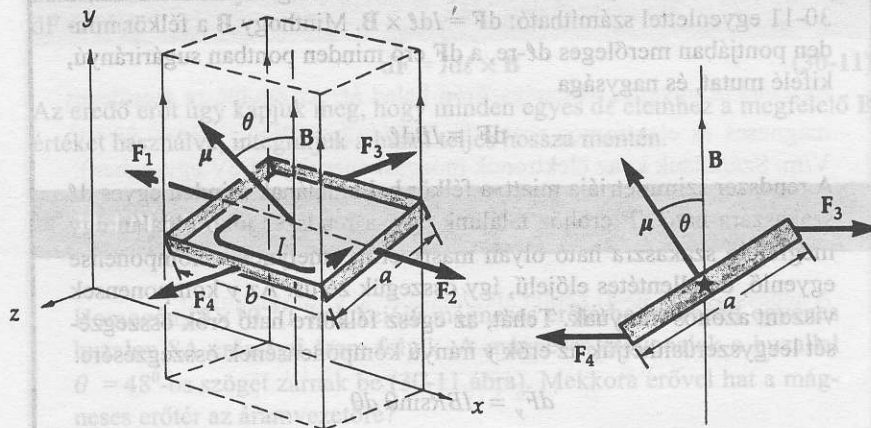
A 30-15a ábrán feltüntetett  $F_1$  és  $F_2$  erők egyenlők egymással, ám irányuk éppen ellentétes, tehát eredőjük zérus. Minthogy egy egyenesbe esnek, forgatónyomatéket sem hoznak létre. Az  $F_3$  és  $F_4$  erők egyenlők és ellentétes irányúak, így eredőjük szintén zérus. Minthogy nem esnek egy egyenesbe, erőpárt képeznek (13-15b ábra) és így a (\*)-gal jelölt tengely körül forgató-

30-14 ábra

Téglalap alakú áramvezető hurok, amely szöveget zár be a homogén, függőleges irányú mágneses erőterrel.

**30-15 ábra**

A homogén mágneses térbe helyezett téglalap alakú zárt áramvezető hurok oldalaira ható erők. Ezek az erők a hurokra olyan forgatónyomatékot gyakorolnak, amely a hurok  $\mu$  mágneses momentumát  $\mathbf{B}$  irányába igyekszik forgatni.



a) Perspektivikus kép

b) Oldalnézetből

nyomaték jön létre. Ha  $\mathbf{B}$  és a hurokra merőleges  $\mu$  vektor közötti szög  $\theta$ , a (\*) tengelyre vonatkozó forgatónyomaték

$$M = F_3 \left( \frac{a}{2} \right) \sin \theta + F_4 \left( \frac{a}{2} \right) \sin \theta$$

Mint hogy  $F_3 = F_4$ ,  $M = F_3 a \sin \theta$  (vagy  $F_4 a \sin \theta$ ) (30-12)

Mivel a 3. és 4. oldalak  $\mathbf{B}$  irányára merőlegesek, az  $\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}$  egyenletből

$$F_3 = I b B$$

Ezt az kifejezést a (30-12) egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$M = I a b B \sin \theta \quad (30-13)$$

Jelöljük az  $ab$  területet  $A$ -val. Az  $IA$  szorzatot a  $\mu$  mágneses dipólusmomentum nagyságának nevezzük.  $\mu$  irányát az előbbiekből a jobbkézsabállyal már definiáltuk. Az ( $A$  nagyságú) felület normálvektorát  $\mathbf{A}$ -val jelölve:

A mágneses dipólusmomentum  $\mu = IA$  ( $\mu$  iránya a jobbkézsabálynak megfelelően merőleges az  $A$  területű hurokra) (30-14)

$N$  menetű hurkok (tekercsek) esetén:  $\mu = NIA$

$\mu$  mértékegysége amper-m<sup>2</sup> (Am<sup>2</sup>).

Vektor-jelöléseket alkalmazva a (30-13) egyenletet az alábbi alakba írhatjuk át:

A mágneses erőterbe helyezett mágneses dipólusra ható forgatónyomaték:  $\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B}$  (30-15)

Vegyük észre, hogy ez az összefüggés nagyon hasonlít az elektromos erőterbe helyezett  $\mathbf{p}$  elektromos dipólusra ható forgatónyomaték

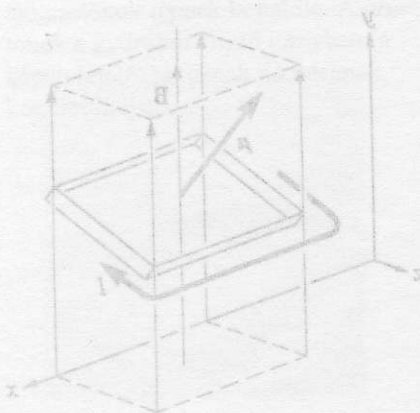
$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

kifejezésére, ahol  $\mathbf{E}$  a térerősség.

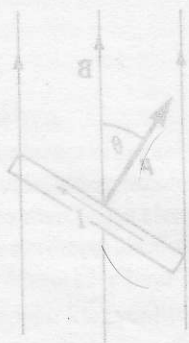
Noha a fenti levezetésben téglalap alakú áramvezető hurkot tételeztünk fel, az eredmény tulajdonképpen bármilyen alakú sík hurokra érvényes, azaz

$$\mu = (I) (a \text{ hurok által bezárt terület}) \quad (30-16)$$

A 30-16 ábrán az e következtetés alapjául szolgáló példát illusztráltuk: Tetszés szerinti sík áramvezető hurok úgy tekinthető, mint egymáshoz illeszkedő téglalap alakú áramvezető hurkok együttese. (A téglalap alakú hurkok



a) Perspektivikus kép



b) Oldalnézetből

30-16 ábra

Téglalap alakú áramvezető hurok, amely szöget zár be a homogén, függőleges irányú mágneses erőterrel.



együttese annál jobban megközelíti a teljes hurkot, minél nagyobb a téglalapok száma.) Az egyes téglalapok körül az áram az óramutatóval megegyező irányban folyik; így a szomszédos téglalapok egymással érintkező oldalán az áramok eredője zérus. Ily módon csak a hurok mentén folyó áram nem válik zérussá. A téglalap alakú áramvezető hurok esetére vonatkozó levezetést a fentiek alapján tetszés szerinti alakú sík hurok esetére általánosíthatjuk.

A mágneses erőterbe helyezett áramvezető hurokra ható forgatónyomaték megjelenéséből az következik, hogy a huroknak a mágneses erőterhez viszonyított helyzetétől függő potenciális energia rendelhető hozzá. Hasonlóan az elektromos dipólus potenciális energiájának kiszámításakor (24.6 alpont) követett eljáráshoz, először a potenciális energia általános definícióját alkalmazzuk a hurok elfordulásának esetére:

$$U_{\theta} - U_{\theta_0} = - \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

Mint ahogy  $\theta$  az óramutató járásával ellentétes irányú forgatásakor növekszik (30-14b ábra),  $\mathbf{M}$  és  $d\boldsymbol{\theta}$  ellentétes irányúak. Ennélfogva,  $\cos 180^\circ = -1$  és

$$U_{\theta} - U_{\theta_0} = - \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{M} d\theta$$

$\mathbf{M}$ -nek a (30-13) és (30-14) összefüggéssel megadott kifejezését behelyettesítve, majd integrálva azt kapjuk, hogy

$$U_{\theta} - U_{\theta_0} = - \int_{\theta_0}^{\theta} \mu B \sin \theta d\theta = - \mu B (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Legyen a potenciális energia viszonyítási pontja  $\theta = 90^\circ$ , amikor  $U_{\theta_0} \equiv 0$ . Ekkor a legutóbbi képlet

$$U = - \mu B \cos \theta \quad (30-17)$$

alakú lesz ill. a skaláris szorzat definíciójának felhasználásával az alábbi alakot ölti:

A mágneses dipólus  $U$  potenciális energiája mágneses térben  $U = - (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$  (30-18) ( $U \equiv 0$ , amikor  $\boldsymbol{\mu}$  és  $\mathbf{B}$  merőlegesek egymásra)

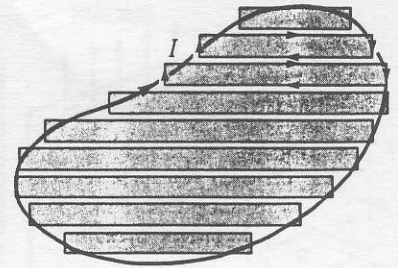
Vegyük észre, hogy a dipólus potenciális energiája akkor a legnagyobb, amikor  $\boldsymbol{\mu}$  és  $\mathbf{B}$  egymással ellentétes irányúak, és akkor a legkisebb, amikor azonos irányúak. (Az  $U$  zéruspontja e kettő között van, amikor  $\boldsymbol{\mu}$  és  $\mathbf{B}$  egymásra merőlegesek.) A (30-18) formula teljesen analóg az elektromos térbe helyezett elektromos dipólus potenciális energiáját megadó (24-19) képlettel:

$$U = - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$$

Mivel a fizikai rendszerek olyan irányban változnak, hogy potenciális energiájuk minimális legyen, a mágneses dipólusok a mágneses erőterrel párhuzamosan állnak be.

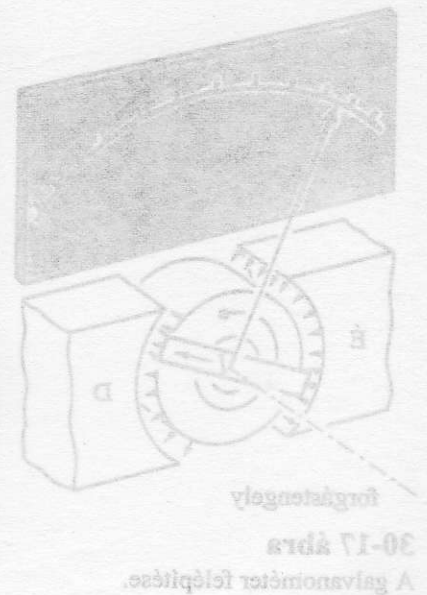
### 30-6 PÉLDA

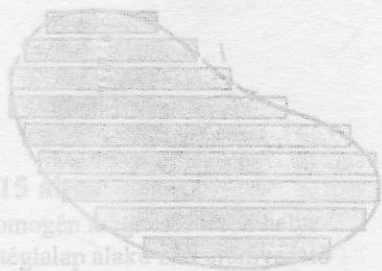
Huzalból 10 cm átmérőjű kör alakú hurkot formálunk és  $3 \times 10^{-3}$  T fluxussűrűségű mágneses erőterbe helyezük. A hurkon 5 A erősségű áram halad át. Számítsuk ki a) az áramvezető hurokra ható maximális



### 30-16 ábra

Az egyes téglalapok kerülete mentén, az óramutató járásával megegyező irányban folyó áramok eredője közelítőleg azonos a hurok mentén haladó  $I$  árammal. Ez azért van így, mert az áramerősségek a szomszédos téglalapok közös oldalán éppen ellentétes előjelűek, és összegük (végtelenül vékony téglalapok esetében a hurok belsejében mindenütt) zérus.





forogatónyomatékokat és b) a potenciális energia legnagyobb és legkisebb értéke közötti különbséget.

### MEGOLDÁS

Az áramvezető hurok mágneses dipólusmomentumát a (30-16) képletből számíthatjuk ki:

$$\mu = (I) \cdot (a \text{ hurok által bezárt terület})$$

A számértékeket behelyettesítve:

$$\mu = (5 \text{ A}) \cdot (0,05 \text{ m})^2 \pi = 3,93 \cdot 10^{-2} \text{ Am}^2$$

a) A homogén mágneses erőterbe helyezett mágneses dipólusra ható forgatónyomatékokat a (30-15) egyenlettel számíthatjuk ki:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Az  $\mathbf{M}$  akkor a legnagyobb, amikor a mágneses indukcióvektor és a dipólusmomentum vektor egymásra merőleges, azaz, amikor a hurok síkja a mágneses erőterrel éppen párhuzamos. Ilyenkor  $\mathbf{M}$  nagysága

$$M = \mu B$$

Behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy:

$$M = (3,93 \cdot 10^{-2} \text{ Am}^2)(3 \cdot 10^{-3} \text{ T}) = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$$

b) A mágneses térbe helyezett mágneses dipólus potenciális energiáját a (30-18) képletből számíthatjuk ki:

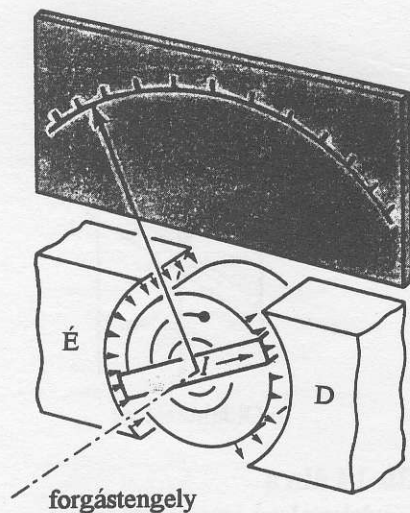
$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

A potenciális energia akkor a legnagyobb, ha a dipólusmomentum és a mágneses indukcióvektor egymással éppen ellentétes irányúak; akkor a legkisebb, amikor azonos irányúak. Különbségük:

$$\Delta U = U_{\max} - U_{\min} = -\mu B \cos \pi - (-\mu B \cos 0^\circ) = 2\mu B$$

$\mu$  és  $B$  tényleges értékét behelyettesítve:

$$\Delta U = 2(3,93 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2)(3 \cdot 10^{-3} \text{ T}) = 2,36 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$



30-17 ábra

A galvanométer felépítése.

## 30.7 Alkalmazások

### Galvanométer

A 29. fejezetben tárgyaltuk a voltmérő és az ampermérő felépítését. Ezek legfontosabb eleme az érzékeny árammérő eszköz, a *galvanométer*. Az alábbiakban a galvanométer működésének alapelveit vizsgáljuk.

A galvanométer mágneses erőterben mozgó áramvezető tekercset tartalmaz (30-17 ábra). A tekercs az álló tengely körül elfordulhat; a tekercshez az áramot a csapágyakon keresztül vezetékek szállítják. A tekercs egyik kivezetése spirálrugó, amely az áram bevezetésén kívül arra is szolgál, hogy a tekercsre, annak kitérésekor, megfelelő forgatónyomatékokat gyakoroljon, és ezáltal a tekercset az egyensúlyi helyzetbe visszaállítsa. Ahogyan a hurok forog, a hurok oldalai mágneses erőterben mozognak el, amely mindenütt konstans nagyságú és mindenütt merőleges a tekercs  $\boldsymbol{\mu}$  mágneses dipólusmomentum vektorára. Ez azért van így, mert a tekercs, a speciális geometriájú mágnes pólusai és egy rögzített vashenger közötti vékony résben mozog



(30-17 ábra). Így a tekercsre ható forgatónyomaték csak az áramerősségtől és nem a tekercs pillanatnyi helyzetétől függ. A tekercs akkor kerül egyensúlyi helyzetbe, amikor a mágneses forgatónyomaték éppen ellentétesen egyenlő a rugó által kifejített forgatónyomatékkal, mely utóbbi a Hooke-törvénnyel írható le:

$$M_{\text{rugó}} = -\kappa\theta$$

A tekercsre ható forgatónyomatékat a (30-15) képlet adja meg:  $M_{\text{tekercs}} = \mu \times B$ . Míthogy  $\mu$  és  $B$  mindenütt merőlegesek egymásra,

$$M_{\text{tekercs}} = \mu B$$

A tekercs akkor van statikus egyensúlyban, amikor

$$M_{\text{tekercs}} = M_{\text{rugó}}$$

vagy  $\kappa\theta = \mu B$

Az elfordulás szögét az áramerősség függvényeként kifejezve:

$$\theta = \left( \frac{AB}{\kappa} \right) I \quad (30-19)$$

ahol  $A$  a tekercs egy menete által körbezárt terület. Ha a tekercs  $N$  menetű, a hurok mágneses momentuma, tehát az elfordulás szöge is  $N$ -szeresére nő, vagyis:

$$\theta = \left( \frac{NAB}{\kappa} \right) I \quad (30-20)$$

A  $\theta$  szöget a tekercshez erősített mutató segítségével mérhetjük meg.  $A$  tekercs kitérésének  $\theta$  szöge egyenesen arányos a tekercsben folyó áram erősségével, így a skála, amely előtt a mutató mozog, lineáris.

### 30-7 PÉLDA

Tipikus galvanométerre jellemző adatok és paraméterek a következők: a tekercs területe  $1 \text{ cm}^2$ , a menetek száma 100, a spirálrugó rugóállandója  $3 \cdot 10^{-7} \text{ Nm/rad}$  és  $50 \mu\text{A}$  áramerősség idéz elő  $\pi/2$  szögnyi kitérést (végkitérést). Számítsuk ki a mágneses erőtér fluxussűrűségét, melyben a tekercs mozog.

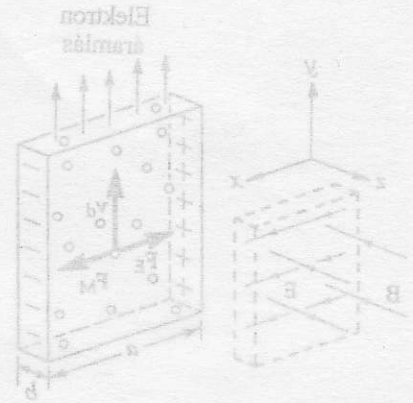
### MEGOLDÁS

A (30-20) képlet alapján 
$$B = \frac{\kappa\theta}{NAI}$$

A megfelelő számértékeket (SI egységekben kifejezve) behelyettesítve

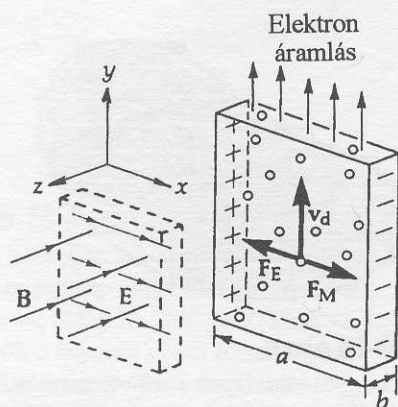
$$B = \frac{(3 \cdot 10^{-7} \text{ Nm/rad})(\pi/2 \text{ rad})}{(100 \text{ menet})(10^{-4} \text{ m}^2)(50 \cdot 10^{-6} \text{ A/menet})} = 0,942 \text{ T}$$

Az érzékeny galvanométerek (mint a fenti adatokkal rendelkező is) nagyon finom eszközök, mert nagyon kicsiny az a forgatónyomaték, amit közönséges mágnesekkel és tekercsekkel el lehet érni. A forgást gyakran olyan drágákó csapágyak biztosítják, mint amilyeneket az órákba építenek be; a néhány menetű spirálrugó nagyon finom rugóacélból készült.



30-18 ábra

A Hall effektus. A  $x$  tengely negatív irányába mutató mágneses erőtér hatására az elektronok a vezető hasábján jobbra oldalra fordulnak el, így az  $x$  tengely negatív irányába mutató elektronos erőtér keletkezik. Egyensúlyban az  $F_H$  mágneses erőtér ellentétes előjelű egyenlő az  $F_e$  elektronos erőtérrel.



30-18 ábra

A Hall effektus. A  $z$  tengely negatív irányába mutató mágneses erőtér hatására az elektronok a vezető hasáb jobb oldalára felé mozdulnak el, így az  $x$  tengely negatív irányába mutató elektromos erőtér keletkezik. Egyensúlyban az  $F_M$  mágneses erő ellenenkező előjellel egyenlő az  $F_E$  elektromos erővel.

## A Hall-effektus

E. H. Hall 1879-ben a róla elnevezett effektust arra dolgozta ki, hogy vezető anyagok töltéshordozóinak előjelét megállapítsa; manapság ezt a hatást kiterjedten alkalmazzák áramerősség és mágneses erőtér mérésére. *Hall-effektusnak* nevezzük azt a potenciálkülönbséget, amely egy mágneses erőtérbe helyezett, áramvezető oldalai között jelenik meg. A potenciálkülönbség kialakulásának megértésére, tekintsünk egy ideális vezetőt, amelyben a töltéshordozók a szabad elektronok<sup>5</sup>.

Tekintsünk egy téglalap keresztmetszetű ideális vezetőt, amelyet gondolatban  $B$  fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezünk (30-18 ábra). Egy elektronra  $F_M$  mágneses Lorentz-erő hat:

$$F_M = (-e)v_d \times B, \quad (30-21)$$

ahol  $-e$  és  $v_d$  az elektron töltése, illetve vándorlási sebessége. Kezdetben, a mágneses erő következtében az elektronok a vezető jobb oldalára felé vándorolnak; időközben a töltések felhalmozódása miatt a vezetőn belül egy  $E$  térerősségű elektromos tér alakul ki, ami a további oldalirányú töltésvándorlást megakadályozza. Egyensúlyban az  $F_E$  elektromos erő éppen kiegyenlíti az  $F_M$  mágneses erőt:

$$|F_E| = |F_M|.$$

A Lorentz-féle erőtvényt alkalmazva, az erők egyensúlyban vannak, ha

$$eE = ev_d B$$

vagy

$$E = v_d B. \quad (30-22)$$

A  $v_d$  vándorlási sebességet az áramerősségből és a vezetőre jellemző paraméterekből számíthatjuk, az áramerősség definíciója alapján:

$$I = nev_d A, \quad (30-23)$$

ahol  $n$  a térfogategységre jutó töltéshordozók száma és  $A$  a vezető keresztmetszete, ebben az esetben  $A = ab$ . Behelyettesítve, és  $v_d$ -t kifejezve, azt kapjuk, hogy

$$v_d = \frac{I}{neab}. \quad (30-24)$$

A (30-22) képletbe történő további behelyettesítéssel az adódik, hogy

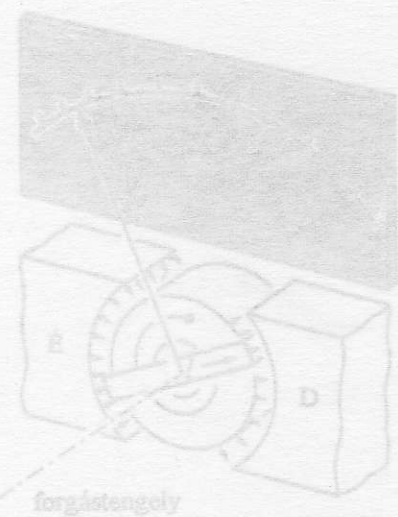
$$Ea = \frac{BI}{neb}. \quad (30-25)$$

Az elektromos térerősség és a minta szélességének szorzata,  $Ea$ , a minta két oldala közötti  $V$  potenciálkülönbséggel egyenlő, melyet a továbbiakban Hall-feszültségnek nevezünk, és  $V_H$ -val jelölünk.

$$\text{Hall-feszültség: } V_H = \frac{BI}{neb} \quad (30-26)$$

Mint hogy a Hall-feszültség a  $BI$  szorzattól függ, ha például ismerjük a mintán áthaladó áramerősséget, akkor meg tudjuk határozni  $B$  értékét a Hall-feszültség mérésével. A Hall-effektust mérő szondákat gyakran használjuk a mágneses tér erősségének mérésére. A Hall-effektus másik lényeges tulajdonsága az, hogy ha a töltéshordozók nem a negatív elektronok, hanem pozitív

<sup>5</sup> Az egyvegyértékű fémek, pl. a réz és az ezüst a Hall-effektus szempontjából majdnem ideális áramvezetőként viselkednek. A Hall-effektus tárgyalása mágneses anyagokban, mint pl. vasban, továbbá félvezetőkben kvantumeffektusok fellépése miatt bonyolultabb.



30-17 ábra

A galvanométer felépítése.



tív töltések, akkor a Hall-feszültség előjele, azonos irányú mágneses tér és áram-erősség esetében ellentétes lesz. Így adott  $B$  fluxussűrűség esetén a Hall-effektus a töltéshordozók számának és előjélének meghatározására is alkalmazható.

### 30-8 PÉLDA

Tételezzük fel, hogy a 30-18 ábrán látható vezető rézből készült, és  $0,5\text{ T}$  mágneses térben  $10\text{ A}$  erősségű áram halad át rajta. A vezető  $d$  szélessége  $1\text{ cm}$ , vastagsága  $1\text{ mm}$ . Számítsuk ki a vezető két oldala között fellépő Hall-feszültséget.

### MEGOLDÁS

A Hall-feszültség a (30-26) egyenlettel számítható ki:

$$V_H = \frac{BI}{neb}$$

A réz sűrűsége  $8,92 \times 10^6\text{ g/m}^3$ , atomsúlya  $63,546\text{ g/mol}$ . Feltételezve hogy atomonként egy elektron vesz részt a vezetésben, az egységnyi térfogatban a vezetési elektronok száma

$$n = \frac{\rho N_A}{(\text{atomsúly})}$$

ahol  $N_A$  az Avogadro szám ( $6,022 \times 10^{23}$  atom/mol). A megfelelő értékeket behelyettesítve

$$n = \frac{\left(8,92 \times 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}\right) \left(6,022 \times 10^{23} \frac{\text{elektron}}{\text{mól}}\right)}{\left(63,546 \frac{\text{g}}{\text{mól}}\right)}$$

$$n = 8,45 \times 10^{28} \frac{\text{elektron}}{\text{m}^3}$$

Ezt és a többi számértéket a (30-26) képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

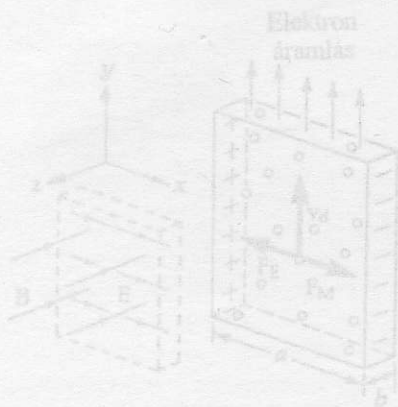
$$V_H = \frac{BI}{neb} = \frac{(0,5\text{ T})(10\text{ A})}{\left(8,45 \times 10^{28} \frac{\text{elektron}}{\text{m}^3}\right) \left(1,6022 \times 10^{-19} \frac{\text{C}}{\text{elektron}}\right) (1 \times 10^{-3}\text{ m})}$$

$$V_H = 3,69 \times 10^{-7}\text{ V}$$

A Hall-feszültség tehát igen kicsiny a fémes vezetők esetében; félvezetőknél a fenti értéknél sokkal nagyobb [vö. a (30-26) képlettel; félvezetőkben  $n$  sokkal kisebb, mint fémekben.] Ez az oka annak, hogy a Hall effektuson alapuló mágneses erőter mérésénél a szondák félvezetőkkel készíthetők.

A Hall-effektus elemzésével a mágneses erőterbe helyezett vezetőre ható erő világosabban érthető: A vezetőre tulajdonképpen a Hall-térerősségtől származó erő hat. Vegyük észre, hogy a 30-18 ábrán a mozgó töltésre ható eredő oldalirányú erő zérus:

$$\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_M = 0$$



30-18 ábra

A Hall effektus. A  $z$  tengely negatív irányába mutató mágneses erőter hatására az elektronok a vezető jobb oldalára felé mozdulnak el, így az  $x$  tengely negatív irányába mutató elektromos erőter keletkezik. Egyensúlyban az  $F_M$  mágneses erő ellenkező előjelű egyenlő az  $F_E$  elektromos erőve.

Az  $F_M$  mágneses erőt a külső mágneses tér hozza létre, míg az  $F_E$  elektromos erő a Hall effektus következtében a vezető belsejében keletkezik. A vezetőre ható erő (Newton 3. törvénye következményeként) ellentétesen egyenlő a töltéshordozókra ható elektromos erővel. Tehát az áramot vezető anyagra ható mágneses erő tulajdonképpen olyan tulajdonságú, mint az elektromos erő.

### Lineáris tömegspektrométer

A töltött részecskéket tömeg/töltés hányadosuk ( $q/m$ ) szerint, a 30-19 ábrán bemutatott berendezéssel szét lehet válogatni. Az elemezni kívánt anyagmintát olyan magas hőmérsékletűre hevítjük, hogy elpárologjon. A keletkezett gőz egy erre alkalmas egységben ionizálódik. Innen az ionok viszonylag kis sebességgel jutnak ki, majd meghatározott feszültség hatására egy rés felé haladva felgyorsulnak. A réshez lényegében azonos irányú sebességgel érkeznek. A rés arra szolgál, hogy az oda érkező részecskéknél csak keskeny, nagyjából párhuzamos nyalábját engedje be a rés utáni mágneses térbe. A nyaláb azonban mégsem tökéletesen párhuzamos, a részecskék sebességének van az  $x$  tengely pozitív irányára merőleges komponense is. A rés után a részecskék longitudinális ( $x$  irányú) mágneses erőterbe lépnek be, aminek hatására spirális pályán mozognak. Minthogy az azonos  $q/m$  mennyiséggel jellemezhető részecskék ciklotron-frekvenciája ugyanakkora, az összes ilyen részecske a spirálison megtett teljes fordulat után a tengely ugyanazon a pontján halad át. (Feltéve, hogy  $x$  irányú sebességkomponensük pontosan ugyanakkora).

Fejezzük ki a  $q/m$  hányadost a többi paraméter függvényében. A rést elhagyó részecskék  $v_x$  sebességét a mozgási és elektromos energiák egyenlőségét kifejező egyenletből kaphatjuk meg:

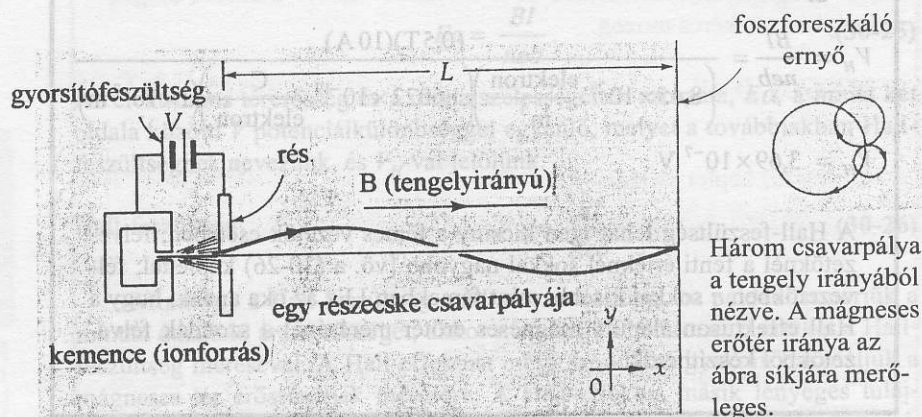
$$qV = \frac{1}{2}mv_x^2.$$

$v_x^2$ -et kifejezve azt kapjuk, hogy

$$v_x^2 = 2V \left( \frac{q}{m} \right). \quad (30-27)$$

A  $v_x$ -re vonatkozó másik összefüggés:

$$v_x = \frac{L}{T},$$



30-19 ábra

A lineáris tömegspektrométer. Az összes, azonos  $q/m$  hányadossal jellemezhető töltött részecske azonos ciklotron-frekvenciával csavarpályán mozog; így pályájuk egy periódus után a spektrométer tengelyén lévő pontban keresztezi egymást.



ahol  $T$  az az idő, amely alatt a részecske a spirális pályán egy fordulatot végez.  $T$  egyenlő a részecske (30-6) egyenlet által megadott ciklotron-frekvenciájának reciprokával:

$$f = \frac{1}{2\pi} B \left( \frac{q}{m} \right).$$

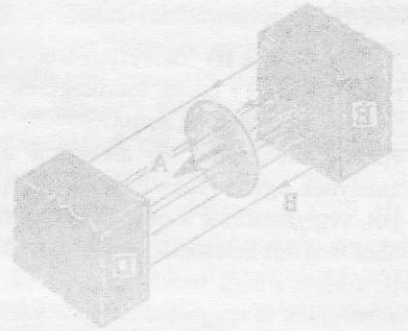
Innen

$$v_x = \frac{1}{2\pi} BL \left( \frac{q}{m} \right).$$

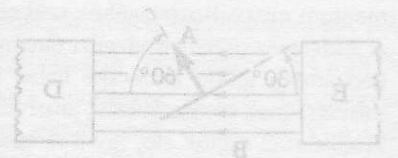
Ezt a kifejezést a (30-27) képletbe behelyettesítve, és onnan a  $q/m$  hányadost kifejezve a (30-28) képletet kapjuk

$$\frac{q}{m} = \frac{8\pi^2 V}{B^2 L^2}. \quad (30-28)$$

A  $q/m$  hányados gyakorlati meghatározásának egyik lehetséges módja az, hogy a tengely egy pontjára kisméretű, a részecskék érkezését detektáló szerkezetet helyezünk és a  $V$  gyorsítófeszültséget addig változtatjuk, amíg maximális számú részecskét nem detektálunk. A  $q/m$  hányados ezután a (30-28) egyenlettel számítható.



(a) A részecske pályája a két elektród között.



(b) A részecske pályája a két elektród között, a 30°-os szöghez tartozó deflektálás.

### 30-9 PÉLDA

Az elektronmikroszkóp elektronnyalábbal fényképezőlemezre képezi le a vizsgált objektumot. Az elektronnyalábot mágneses tér fókuszálja. (Hasonlóan ahhoz, mint ahogyan a lineáris tömegspektrométerben az ionok pályája egy ponton halad át.) a) Számítsuk ki a mágneses fluxussűrűség minimális értékét, ami ahhoz szükséges, hogy a 10 keV-os elektronok „fókuszpontja” az elektronforrástól 10 cm-nyire legyen. b) Számítsuk ki, hogy még milyen más mágneses fluxussűrűségeknél lesz ugyanitt a fókuszpont.

### MEGOLDÁS

a) Az elektronsugarak fókuszálása és a lineáris tömegspektrométerben az ionok pályájának kiszámítása analóg problémák. Ennélfogva alkalmazható a (30-28) összefüggés:

$$\frac{q}{m} = \frac{8\pi^2 V}{B^2 L^2}$$

A mágneses indukcióvektor nagyságát kifejezve:

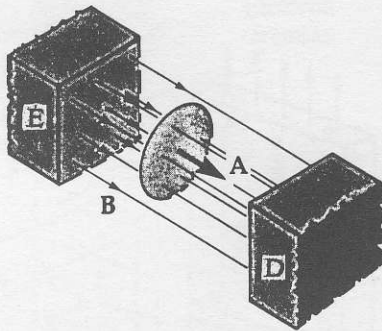
$$B = \frac{\pi}{L} \left( \frac{8Vm}{q} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{0,1\text{m}} \left[ \frac{(8)(10^4 \text{ V})(9,11 \times 10^{-31} \text{ kg})}{(1,602 \times 10^{-19} \text{ C})} \right]^{1/2}$$

$$B = 2,12 \times 10^{-2} \text{ T}$$

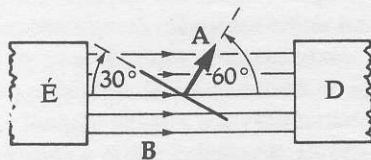
b) Ez a minimális nagyságú mágneses indukcióvektor, aminél az elektronok egyet fordulnak a csavarpályán. Ha  $B$  nagyságát megkétszerezennék, ugyanakkora  $L$  hosszúságot befutva az elektron a spirálison két menetnyit fordulna, és ugyanabban a pontban fókuszálna. Tehát akkor is ugyanebbe a pontba fókuszálna, ha a mágneses indukcióvektor nagysága

$$B = 4,24 \times 10^{-2} \text{ T}$$

lenne.



- a) A hurok síkja merőleges az erővonalakra.



- b) A hurok síkja  $30^\circ$ -os szöget zár be az erővonalakkal. Következésképpen a felület  $A$  vektora és  $B$   $60^\circ$ -os szöget zárnak be egymással.

### 30-20 ábra

A 30-10 példához.

## 30.8 A $\Phi_B$ mágneses fluxus

Az elektromos erőtér tárgyalásakor a 25.2 fejezetben a  $\Phi_E$  elektromos fluxust az adott  $A$  felületen áthaladó elektromos térerősségvonalak számával definiáltuk:

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

Az elektromos fluxus definíciójával teljesen analóg módon definiáljuk a  $\Phi_B$  mágneses fluxust:

$$\text{A } \Phi_B \text{ mágneses fluxus: } \Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (30-29)$$

ahol  $d\mathbf{A}$  egy (irányított) felületelem; az integrálást a teljes  $A$  felületre kell elvégezni. A mágneses fluxus SI egysége az 1 tesla-méter<sup>2</sup> ( $\text{Tm}^2$ ), amelyet régebben 1 webernek is neveztek<sup>6</sup>. Ha  $A$ , a  $B$  homogén mágneses erőtérben lévő sík felület felszíne, akkor a fluxus kifejezése egyszerűen:

$$\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA \cos \theta$$

ahol  $\theta$  a sík  $A$  normálvektora és  $B$  által bezárt szög.

### 30-10 PÉLDA

Egy 3 cm sugarú, kör alakú vezető hurok a síkjára merőleges  $B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T}$  mágneses indukcióvektorú mágneses erőtérben van. a) Számítsuk ki a  $\Phi_B$  mágneses fluxust a hurok felületére. b) Számítsuk ki a mágneses fluxust, ha a hurkot megdöntjük úgy, hogy síkja  $30^\circ$ -os szöget zárjon be a mágneses tér irányával.

### MEGOLDÁS

- a) Miként az a 30-20 ábrán látható, a felület  $A$  vektora párhuzamos a homogén mágneses tér  $B$  vektorával. A (30-29) képlet így leegyszerűsödik, tehát

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = BA \cos \theta \\ &= (2 \times 10^{-3} \text{ T})(\pi)(0,03)^2 (1) = 5,65 \times 10^{-6} \text{ Wb} \end{aligned}$$

- b) Ha a hurok síkja és a tér iránya  $30^\circ$ -os szöget zárnak be egymással, az  $A$  vektor (amely a felületre merőleges)  $60^\circ$ -os szöget zár be  $B$ -vel. Ennélfogva:

$$\Phi_B = BA \cos \theta = (2 \times 10^{-3} \text{ T})(\pi)(0,03)^2 (\cos 60^\circ) = 2,83 \times 10^{-6} \text{ Wb}$$

<sup>6</sup> Ezt az egységet Wilhelm Weber (1814-1891) német fizikus tiszteletére nevezték el. Weber a mágnesesség elméletével és azzal kapcsolatos kísérletekkel foglalkozott. A weber egység régebbi, mint a tesla; ennél fogva számos helyen a mágneses fluxussűrűséget tesla helyett weber/m<sup>2</sup> egységben adják meg.



## 30.9 Néhány megjegyzés a mértékegységekről

Az elektromosság és mágnesség tárgyalása és a feladatok megoldása során nehézséget okoz az, hogy egyes mennyiségeknek speciális (múlt századi, vagy még régebbi tudósok nevéből származó) nevük van; az ilyen név elfedi, hogy az illető egység az alapegységek (méter, kilogramm, másodperc és coulomb) milyen kombinációja, emiatt az egységek összhangját nehézkes ellenőrizni. Tovább nehezíti ezt, hogy ugyanazt a mértékegységet több különböző, a konkrét problémától függő módon lehet megadni. Ennek illusztrálására egy (korántsem teljes) listát készítettünk az elektromos és mágneses erők terériségét jellemző **E** és **B** mennyiségekről:

**E** elektromos térerősség

**B** mágneses indukcióvektor

$$\left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right] = \left[ \frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = \left[ \frac{\text{Tm}}{\text{s}} \right]$$

$$[\text{T}] = \left[ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{N}}{\text{Am}} \right] = \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} \right] =$$

$$= \left[ \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{HA}}{\text{m}^2} \right] = \left[ \frac{\text{WH}}{\text{m}^2} \right]$$

(H a henry rövidítése. A következő fejezetben definiáljuk.)

A mértékegységek eme változatossága miatt ismételten hangsúlyozzuk, hogy mindig győződjünk meg arról, hogy az összes számértéket SI egységben helyettesítjük-e be az egyenletekbe. Ekkor ugyanis a mértékegységek különösebb ellenőrzése nélkül is bízhatunk abban, hogy a számítások során kapott mennyiség is SI mértékegységű, amit már a céljainknak legjobban megfelelő alakban adhatunk meg.

### Összefoglalás

A **B** mágneses indukcióvektort vagy mágneses fluxus-sűrűséget az alábbi összefüggésből származtatjuk:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

ahol **F** a mágneses erőterben **v** sebességgel haladó **q** töltésre ható erő. **B** egysége az 1 tesla [T].

A Lorentz-féle erőtvény az egyidejűleg létező **E** térerősség és **B** mágneses indukcióvektor által a töltésre ható erőt adja meg:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Mágneses erőterben az  $\ell$  hosszúságú áramvezetőre ható erő:

$$\mathbf{F} = I(\ell \times \mathbf{B})$$

A  $d\ell$  hosszúságú áramvezetőre ható erő:

$$d\mathbf{F} = I(d\ell \times \mathbf{B})$$

Az  $A$  felületű áramvezető hurok mágneses dipólusmomentuma:

$$\boldsymbol{\mu} = IA \quad (\text{Am}^2 \text{ egységekben})$$

ahol  $\boldsymbol{\mu}$  iránya a jobbkéz-szabállyal állapítandó meg: ha a jobbkéz ujjai az áramirányba hajlanak, akkor a kinyújtott hüvelykujj  $\boldsymbol{\mu}$  irányába mutat. Az **A** felületvektor a hurok síkjára merőleges.

Mágneses erőterben a mágneses dipólusra ható **M** forgatónyomatékat az alábbi egyenlet adja meg:

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Megjegyzendő az elektromos dipólussal mutatkozó hasonlóság.

Az elektromos dipólusra ható forgatónyomaték ugyanis:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

A mágneses erőterben lévő mágneses dipólus  $U$  potenciális energiája:

$$U = -(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{ahol } U \equiv 0, \text{ ha } \boldsymbol{\mu} \text{ és } \mathbf{B} \text{ merőleges egymásra})$$

Az elektromos dipólus potenciális energiája hasonlóképpen:  $U = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$

A  $\Phi_B$  mágneses fluxust az alábbi módon definiáljuk:

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{Vm}^2 \text{ egységekben})$$

Megjegyzendő az elektromos tér esetével mutatkozó hasonlóság; az elektromos fluxus:  $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ .

## Kérdések

1. Az  $F = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  összefüggésben szereplő vektorok közül mely párok merőlegesek szükségszerűen egymásra és melyek nem?
2. Az oszcilloszkópok fő alkatrésze a katódsugárcső, amelynek egyik végén elektronok lépnek ki a katód-ból, végighaladnak a csövön, majd ernyőbe ütköznek, ahol fényfolt keletkezik. A csövet különböző irányokba forgatva és a fényfoltot figyelve, hogyan lehetne elektromos és mágneses erőtérrel jelenlétére következtetni? Hogyan lehetne megkülönböztetni őket?
3. Egy elektron a mágnes pólusai között halad át és eközben impulzusmomentuma megváltozik. Honnan származik az az erő, amely az impulzusmomentum megváltoztatásához szükséges?
4. A ködkamra túltelített vízgőzt tartalmazó tartály. Ha a ködkamrán töltött részecske halad át, akkor pályája mentén ionok sorozatát kelti, amelyek kicsi vízcseppek keletkezését segítik elő; így a részecske pályája láthatóvá válik. A kamrát gyakran homogén mágneses térben helyezik el, így a részecske töltésének előjele, valamint energiája meghatározható. Az elektronok pályája gyakran körpálya helyett spirális. Vajon miért?
5. Csak egyszerű eszközöket alkalmazva, hogyan könnyebb egy elektronnalábót eltéríteni: elektromos vagy mágneses erőtérrel?
6. Elektromos erőtérben mozgó töltött részecske sebességének nagysága vagy megváltozik, vagy nem, míg a mágneses erőtérben mozgó töltött részecskéé sohasem. Miért?
7. Egy elektron, amelynek mozgási energiája nagyobb, mint a nyugalmi energiája, mágneses térben körpályán mozog. Vajon a pályasugár nagyobb-e vagy kisebb-e annál, mint amit a nemrelativisztikus egyenletekkel kiszámíthatunk? Miért? (Lásd még a 41. fejezetet is.)
8. Egy áramvezető hurok az asztal lapján fekszik. Hirtelen függőleges irányú mágneses erőtér alakul ki a hurok környezetében. Hogyan változnak meg a hurokra ható külső erők?
9. A definíció szerinti áramirány egy vezetőben az elektronok mozgásával ellentétes. Vajon ugyanakkora-e a vezetőre ható mágneses erő, ha elektronáramlást, azaz áramirányba folyó áramot vagy a kettő valamilyen kombinációját tételezzük fel?
10. Mágneses dipólust a mágneses erőtér egy bizonyos irányba állít be; így a dipólus az erőtérben egyensúlyban van. A munka, amely a dipólus megfordításához szükséges,  $2\mu_B$ . Függ-e ez a munka a dipólus kezdeti irányától?
11. Mágneses dipólus mágneses momentuma a mágneses erőtérrel ellentétes irányú. Hat-e forgatónyomaték a dipólusra? Vajon a dipólus stabil vagy instabil egyensúlyban van-e, avagy egyáltalán nincs is statikus egyensúlyban?
12. Az elektromos térerősség pontos méréséhez tesztöléses töltésre ható (rendszerint igen kicsiny) erő mérését kell megoldani. A mágneses erőtér intenzitásának pontos mérését vajon kicsiny mágneses dipólusra ható forgatónyomaték mérésével kell megoldani?
13. Az  $n$  típusú félvezetőkben a többségi töltéshordozók az elektronok, míg a  $p$  típusú félvezetőkben az áram pozitív töltésként viselkedő lyukak mozgásával terjed. Hogyan lehet a Hall effektus segítségével eldönteni, hogy egy félvezető  $n$  vagy  $p$  típusú?
14. Hogyan lehet iránytűt szerkeszteni vas vagy más mágneses anyag felhasználása nélkül?
15. A galvanométert ismerve, hogyan lehet villanymotort tervezni?
16. Miért előnyös az, ha a galvanométer forgótekerécsének a huzala igen sok menetből áll?
17. Az ionizált atomok vizsgálatára tervezett lineáris tömegspektrométert miért nem lehet elektronok illetve negatív töltésű ionok analizálására használni?
18. Miért nagyobb a Hall-feszültség félvezetők, mint vezetők esetében?
19. Meg lehet-e mérni a töltéshordozók vándorlási sebességét a Hall-effektus alkalmazásával? Ha igen, hogyan?
20. Miért kevés a mágneses fluxus jellemzésére egyetlen (*weber* egységben megadott) szám? A  $\Phi_B$  mágneses fluxus miért nem vektormennyiség?
21. Ha megfeszített tekercsrugón áram halad át, a rugó által kifejtett erő nő, csökken, vagy változatlan marad? Miért?
22. A párhuzamos áramvezetők kölcsönösen hatnak egymásra. Hogyan hatnak egymásra az egymásra merőleges vezetők?

## Feladatok

## 30.2 A mágneses erőtér

**30A-1** A Föld mágneses erőtérének vízszintes komponense valamely pontban északi irányú, nagysága  $30 \mu\text{T}$ . Egy elektron akkora sebességgel mozog nyugati irányban, hogy a rá ható mágneses erő éppen kiegyenlíti a gravitációs erőt. Számítsuk ki az elektron sebességét. (A válaszból kiderül, miért nehéz az elektron súlyát lemérni.)

**30B-2** Adott időpillanatban  $q$  töltésű részecske a  $\mathbf{B} = B_x \hat{x}$  fluxussűrűségű mágneses erőtérben  $\mathbf{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y}$  sebességgel halad. Határozzuk meg, hogy mekkora és milyen irányú erő hat a részecskére.

**30B-3** Egy elektron mágneses térben  $3 \times 10^6 \text{ m/s}$  sebességgel halad az  $x$  tengely mentén, pozitív  $x$  irányban. Számít-



suk ki az elektronra ható erőt, ha a mágneses fluxussűrűséget tesla egységekben a  $\mathbf{B} = 0,4\hat{x} + 0,7\hat{y} + 0,3\hat{z}$  összefüggés adja meg.

**30.3 Töltött részecskék mozgása mágneses erőterben**

**30A-4** A  $^{14}\text{C}$  atommag bomlásakor keletkező 0,15 MeV energiájú  $\beta$ -részecske (elektron) a mozgás irányára merőleges 0,04 T fluxussűrűségű mágneses erőterbe lép be. Számítsuk ki a részecske pályájának görbületi sugarát.

**30A-5** Egy proton 0,5T fluxussűrűségű mágneses erőterben 1,00 cm sugarú körpályán mozog. Mekkora a kinetikus energiája (eV egységekben kifejezve)?

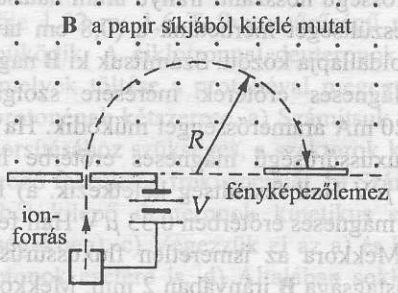
**30A-6** A  $^{238}\text{U}$  atommag bomlásakor keletkező 4,2 MeV energiájú alfa-részecske (két protonból és két neutronból álló hélium-atommag) a mozgás irányára merőleges 0,04T fluxussűrűségű mágneses erőterbe lép be. Számítsuk ki a részecske pályájának görbületi sugarát.

**30A-7** A magnetron a radar-oszcillátorok egy típusa. A radar által kisugárzott mikrohullám frekvenciáját a magnetron mágneses erőterében keringő elektronok ciklotron-frekvenciája szabja meg. Becsüljük meg, milyen mágneses fluxussűrűség szükséges 3 cm-es hullámhosszúságú mikrohullámok előállításához.

**30B-8** Egy 1,5 keV energiájú elektron  $\mathbf{B}$  fluxussűrűségű homogén mágneses erőterben 1 cm sugarú körpályán mozog. a) Számítsuk ki  $\mathbf{B}$  nagyságát. b) Egy proton ugyanebben a mágneses térben ugyanúgy 1cm sugarú körpályán mozog. Számítsuk ki a proton energiáját (eV egységekben).

**30B-9** Az  $m_e$  tömegű,  $-e$  töltésű elektron, az  $1836m_e$  tömegű,  $+e$  töltésű proton, valamint egy  $4 \cdot 1836m_e$  tömegű,  $+2e$  töltésű alfa-részecske homogén mágneses térben körpályán mozognak; mozgási energiájuk azonos. Fejezzük ki a proton és az alfa-részecske pályasugarát az elektron pályája  $R$  sugarának függvényeként.

**30B-10** A 30-21 ábrán bemutatott tömegspektrométerben egyszerűen ionizált, 6 és 7 atomtömegű ( $6 \times 1,66 \times 10^{-27}$ , illetve  $7 \times 1,66 \times 10^{-27}$  kg) lítium ionokat 900V feszültség gyorsít, mielőtt belépnek a  $B = 0,04\text{T}$  fluxussűrűségű homogén mágneses térbe. Itt egy félkört megtéve fényképezőlemezbe csapódnak, és egymástól  $x$  távolságra lévő két foltot idéznek elő. Mekkora ez az  $x$  távolság?



**30-21 ábra**

A 30B-10 és a 30B-11 feladatokhoz

**30B-11** A tömegspektrométerek egy típusában (30-21 ábra)  $m$  tömegű,  $q$  töltésű töltött részecskék nyugalmi helyzetből  $V$  feszültség hatására gyorsulnak; majd az ábra síkjára merőleges homogén mágneses erőterbe lépnek be. Newton második törvényéből kiindulva vezessük le a részecskék  $R$  pályasugarát  $m$ ,  $q$ ,  $V$  és  $B$  fluxussűrűség függvényeként.

**30B-12** Egy 2 keV energiájú elektron a Föld 50  $\mu\text{T}$  fluxussűrűségű mágneses terében körpályán mozog. a) Számítsuk ki a pályasugarat. b) Számítsuk ki, mennyi idő alatt tesz meg az elektron egy teljes kört. c) Mutassuk meg, hogy a b) kérdésre adott válasz a részecske ciklotron-frekvenciájának megfelelő periódusidő.

**30.4 A Lorentz-erő**

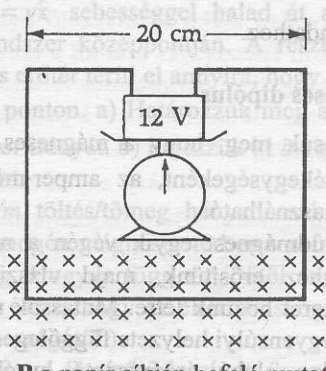
**30A-13** Egy sebességszűrőben (az elektronokat sebességük szerint szétválasztó eszközben)  $1,4 \times 10^4$  V/m elektromos és erre merőleges 18 mT fluxussűrűségű mágneses erőteret alkalmaznak. Számítsuk ki a szűrőn áthaladó elektronok sebességét.

**30B-14** Az Egyenlítőnél, a földfelszín közelében a mágneses fluxussűrűség iránya északi, nagysága kb. 50  $\mu\text{T}$ ; az elektromos térerősség iránya lefelé mutat, nagysága kb. 100 N/C. Számítsuk ki, hogy ebben a pontban egy 100 eV-os, kelet felé egyenes vonalban haladó elektronra mekkora gravitációs, elektromos és mágneses erők hatnak.

**30B-15** Egy sebességszűrőben alkalmazott elektromos és mágneses erőteret az alábbi egyenletekkel adhatjuk meg:  $\mathbf{E} = E\hat{z}$ , ill.  $\mathbf{B} = B\hat{y}$ . Ha  $B = 0,015$  T, számítsuk ki, mekkora  $E$  térerősséget kell alkalmazni, hogy az  $x$  tengely pozitív irányában haladó 750 eV energiájú elektron pályája egyenes maradjon.

**30.5 Az áramvezetőre ható erő a mágneses térben**

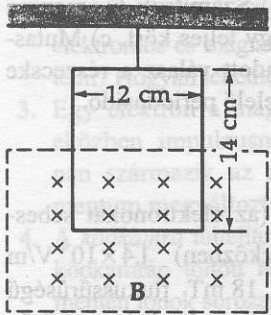
**30A-16** Egy 12 V-os telepet mérlegre helyezünk; a telep pólusaihoz téglalap alakú dróthurkot erősítünk úgy, hogy a téglalap alsó része  $B = 0,10$  T fluxussűrűségű mágneses térben haladjon át (30-22 ábra). A telep és a hurok együttes tömege 100 g. Mekkora legyen a huzal ellenállása, hogy a mérleg éppen zérust mutasson? Melyik a telep pozitív pólusa?



**30-22 ábra**

A 30A-16 feladathoz.

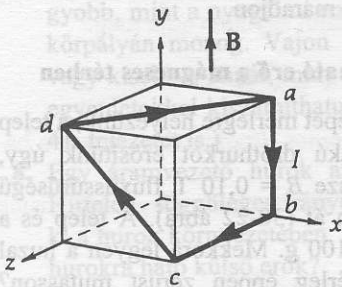
**30B-17** Téglalap alakú,  $0,200 \text{ N}$  súlyú áramvezető hurok úgy van felfüggesztve, hogy a 30-23 ábrán vázolt módon félmagasságig vízszintes irányú,  $\mathbf{B}$  indukcióvektorú homogén mágneses térbe merül. Ha  $2 \text{ A}$  erősségű áram folyik a hurokon keresztül, a felfüggesztő zsinórra  $0,370 \text{ N}$  erő hat. a) Milyen irányú a hurokban az áram? b) Számítsuk ki  $\mathbf{B}$  nagyságát.



### 30-23 ábra

A 30A-17 feladathoz.

**30B-18** A 30-24 ábrán bemutatott kocka  $40 \text{ cm}$  élhosszúságú. A négy egyenes szakaszból ( $ab, bc, cd$  és  $da$ ) álló dróthurkon  $I = 5 \text{ A}$  erősségű áram folyik. Az  $y$  tengely pozitív irányában  $B = 0,02 \text{ T}$  fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat. Készítsünk táblázatot, melyben a fenti sorrendben az egyes huzalszakaszokra ható erők nagyságát és irányát foglaljuk össze.



### 30-24 ábra

A 30B-18 feladathoz.

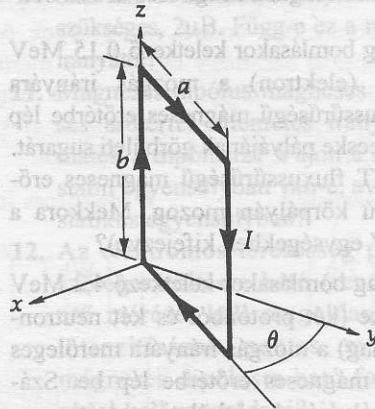
### 30.6 A mágneses dipólus

**30A-19** Mutassuk meg, hogy a mágneses dipólusmomentum mértékegységeként, az amper-méter<sup>2</sup> helyett joule/tesla is használható.

**30B-20** Egy rúd-mágneset egyik végén a mennyezetről lelógó zsineghez erősítünk, majd vízszintes irányú mágneses erőtérrel hozunk létre. Mutassuk meg, hogy a zsineg végső egyensúlyi helyzete függőleges.

**30B-21** Téglalap alakú áramvezető hurok mágneses erőtérben a 30-25 ábrán vázolt módon helyezkedik el. A  $\mathbf{B} = 0,15 \hat{x}$  fluxussűrűségű (tesla egységben megadott

nagyságú) mágneses erőtér a hurokra forgatónyomaté-  
kot gyakorol. Mekkora a forgatónyomaték, ha  $a = 8 \text{ cm}$ ,  
 $b = 12 \text{ cm}$ ,  $\theta = 30^\circ$  és  $I = 2 \text{ A}$ .



### 30-25 ábra

A 30A-21, 30B-22 és 30B-23 feladatokhoz.

**30B-22** Számítsuk ki a 30B-21 feladatban szereplő áramvezető hurok potenciális energiáját.

**30B-23** Számítsuk ki a 30-25 ábrán vázolt áramvezető hurok mágneses dipólusmomentumát.

### 30.7 Alkalmazások

**30A-24** Egy  $4 \text{ cm}$  széles,  $0,1 \text{ mm}$  vékony ezüsből készült szalagon  $5 \text{ A}$  erősségű áram halad át. A szalag síkjára merőlegesen  $0,15 \text{ T}$  fluxussűrűségű mágneses erőtérrel alkalmazunk. Számítsuk ki a szalag szélei között kialakuló Hall-feszültség nagyságát. Tételezzük fel, hogy minden egyes ezüstatom átlagosan egy elektronnal járul hozzá a vezetéshez. Az ezüst sűrűsége  $10,5 \text{ g/cm}^3$ , atomsúlya  $107,87 \text{ g/mol}$ .

**30A-25** Egy galvanométer végkitéréséhez  $50 \mu\text{A}$  erősségű áram szükséges. Hányszorosára kell a galvanométer forgórészében lévő rugó  $\kappa$  rugóállandóját változtatni, hogy  $10 \mu\text{A}$  erősségű áram idézzon elő végkitérést?

**30A-26** Egy Hall-szonda  $10^{20}/\text{m}^3$  töltéshordozó-sűrűségű félvezetéből készült. A szonda  $0,8 \text{ cm}$  széles,  $0,4 \text{ mm}$  vastag és  $1 \text{ cm}$  hosszú. Ha a szondát (megfelelő irányban)  $\mathbf{B}$  fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezzük,  $0,9 \text{ mA}$  erősségű hosszanti irányú áram hatására  $4 \text{ mV}$ -os Hall-feszültséget mérhetünk a ( $0,8 \text{ cm}$  távolságban lévő) két oldallapja között. Számítsuk ki  $\mathbf{B}$  nagyságát.

**30B-27** Mágneses erőtér mérésére szolgáló Hall-szonda  $120 \text{ mA}$  áramerősséggel működik. Ha a szondát  $0,08 \text{ T}$  fluxussűrűségű mágneses erőtérbe helyezzük, akkor  $0,7 \mu\text{V}$  Hall feszültség keletkezik. a) Ismeretlen nagyságú mágneses erőtérben  $0,33 \mu\text{V}$  Hall feszültséget mérünk. Mekkora az ismeretlen fluxussűrűség? b) A szonda vastagsága  $\mathbf{B}$  irányában  $2 \text{ mm}$ . Mekkora a szondában a töltéshordozók sűrűsége, ha mindegyik töltése egyenlő az elektronnal.



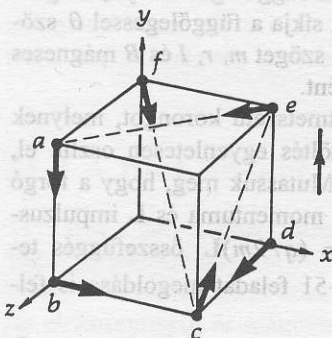
**30.8 A mágneses fluxus**

**30B-28** Határozzuk meg az  $xz$  síkban fekvő  $D$  átmérőjű körlapon a homogén mágneses erőtér  $\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$  mágneses indukcióvektorát, ha  $B_x = 2B_y$ .

**30A-29** Michigan államban egy helyen a Föld mágneses erőtérének mágneses indukcióvektora  $5,80 \times 10^{-5} \text{ T}$ , iránya északi, a vízszintessel  $74^\circ$ -os szöget zár be. (Ezt a szöveget *inklinációnak* nevezzük.) Számítsuk ki a  $\Phi_B$  mágneses fluxust lapos, vízszintesen elhelyezett  $10 \text{ cm}$  átmérőjű hurok belsejében. (Megjegyzés: a déli félteke legnagyobb részén  $\mathbf{B}$  függőleges komponense felfelé mutat; ott az inklinációs szöveget negatívnak tekintjük.)

**További feladatok**

**30C-30** Kocka minden egyes csúcán  $q$  töltés van, melyek  $v$  sebességének irányát a 30-26 ábrán feltüntetett nyilak jelzik. A kockán belül és környezetében az  $y$  tengely pozitív irányába mutató  $\mathbf{B}$  fluxussűrűségű homogén mágneses tér hat. a) Színes nyilakkal jelölve rajzoljuk fel az egyes töltésekre ható mágneses Lorentz-erő vektorát (a Coulomb-erők elhanyagolhatók). b) Készítsünk táblázatot, melyben az egyes erővektorok nagyságát és irányát tüntetjük fel.

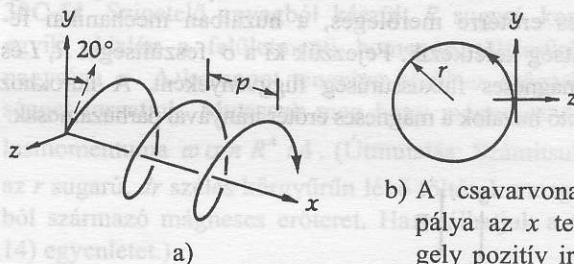


**30-26 ábra**

A 30C-30 feladathoz.

**30C-31** A Kaliforniai Egyetem (Berkeley) ciklotronjának átmérője  $1,52 \text{ m}$ ;  $1,6 \text{ T}$  fluxussűrűségű mágneses erőtérrel működik. A ciklotronnal deuteronok is gyorsíthatók, amelyek töltése a protonéval megegyezik, de tömege a protonéval kétszerese. a) Számítsuk ki a deuteronok gyorsításához szükséges, a szektorok közé kapcsolt váltakozó feszültség frekvenciáját. b) Számítsuk ki a gyorsítóból kilépő deuteronok kinetikus energiáját (MeV egységekben). c) Végezzük el az a) és b) számításokat protonok esetére is. d) Általában sokkal nehezebb a ciklotron frekvenciáját megváltoztatni, mint a mágneses indukcióvektort, ezért protonok gyorsításakor a  $B$  fluxussűrűséget csökkentik és nem a frekvenciát

változtatják. Mekkora ilyenkor a protonok kinetikus energiája? e) Az eredeti frekvenciát alkalmazva, mekkora mágneses erőtér szükséges alfa részecskék (tömeg  $= 4m_p$ , töltés  $= 2e$ ) gyorsításához? f) Mekkora az alfa részecskék kinetikus energiája ekkor? g) Ha a szektorok közötti gyorsítófeszültséget megemelnénk, a fenti válaszok közül melyek módosulnának?



b) A csavarvonal-pálya az  $x$  tengely pozitív irányából nézve.

**30-27 ábra**

A 30C-32 feladathoz

**30C-32** Az  $x$  tengely mindkét irányával párhuzamosan  $B = 27 \text{ mT}$  fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér hat. A koordinátarendszer középpontjából a 30-27 ábrán vázolt módon  $3 \times 10^6 \text{ m/s}$  sebességű elektron indul el; sebességének kezdeti iránya az  $xy$  síkban a pozitív  $y$  tengellyel  $20^\circ$ -os szöget zár be. Ezután az elektron a pozitív  $x$  tengellyel párhuzamos tengelyű csavarpályán halad. Adjuk meg a)  $\mathbf{B}$  irányát; b) a csavarpálya  $r$  sugarát és c) a csavarpálya  $p$  menetemelkedését.

**30C-33** A színes televíziók képminősége, a színek tisztasága döntően azon múlik, hogy az elektronsugár a képernyő adott pontját egy milliméternél kisebb eltéréssel érje el. Mutassuk meg, hogy a Föld mágneses erőtérének az elektronsugárra merőleges, kb.  $10 \mu \text{ T}$  nagyságú fluxussűrűsége elegendő nagyságú ahhoz, hogy a  $20 \text{ keV}$ -os elektronnyalábot annyira eltérítse, hogy az a színhűséget befolyásolja. (Megjegyzés: a csavarpályának megfelelő eltérés az  $E$  függelékben tárgyalt ún. *sagitta képlettel* becsülhető meg). Az elektronágyú és a képernyő közötti távolságot becsüljük meg.

**30C-34** A  $q/m$  töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske  $v = v \hat{x}$  sebességgel halad át a derékszögű koordinátarendszer középpontján. A részecskét homogén mágneses erőtér téríti el annyira, hogy áthaladjon az  $r = a \hat{x} + b \hat{y}$  ponton. a) Határozzuk meg a  $\mathbf{B}$  mágneses indukcióvektor irányát. b) Fejezzük ki  $b$ -t  $a$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $B$  és  $v$  függvényeként.

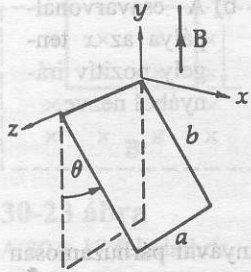
**30C-35** A  $q/m$  töltés/tömeg hányadossal jellemezhető részecske homogén mágneses térben  $v$  sebességgel körpályán mozog. Hogyan függ a  $t$  időtől az eltérés szöge? (Vegyük észre, hogy az eltérés szöge független a részecske sebességétől.)

**30C-36** Egy  $8 \text{ cm}$  átmérőjű leszívott üvegcsőben, a cső tengelyével párhuzamosan  $5 \times 10^{-5} \text{ T}$  fluxussűrűségű homogén mágneses tér van. A csőbe, tengelyének egy

pontján  $2 \times 10^6$  m/s sebességű elektronokat vezetünk.

a) Számítsuk ki azt a legnagyobb  $\theta$  szöget, amelyet az elektronok sebességvektora bezárhat a cső tengelyével, hogy az elektronok csavarpályája ne ütközzön a cső falába. b) A bevezetés pontjától milyen távolságban haladnak át az elektronok újra a tengelyen?

**30C-37** Egy  $R$  sugarú, kör alakú dróthurkon  $I$  erősségű áram halad keresztül. Ha a hurok síkja a homogén mágneses erőtérre merőleges, a huzalban mechanikai feszültség keletkezik. Fejezzük ki a  $\sigma$  feszültséget  $R$ ,  $I$  és  $B$  mágneses fluxussűrűség függvényeként. A hurokhoz vezető huzalok a mágneses erőtér irányával párhuzamosak.



### 30-28 ábra

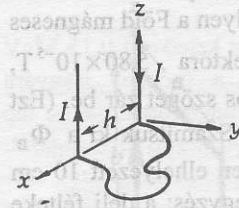
A 30C-38 feladathoz.

**30C-38** Egy merev téglalap alakú huzalhurkot vízszintes  $a$  oldala körül forgatunk (30-28 ábra). A hurok tömege  $m$ ,  $I$  áram folyik át rajta. Az  $y$  tengely pozitív irányába mutat a homogén mágneses tér fluxussűrűsége  $B$ . a) Adjuk meg, mekkora  $B$  esetén zár be a hurok az  $yz$  síkkal  $\theta$  szöget. b) Milyen irányú az áram a hurok alsó ágában? c) Tételezzük fel, hogy a hurok a függőleges  $b$  oldala (a  $z$  tengely) mentén fordulhat el. Az a) kérdésre adott válasz módosulna-e vajon? Miért?

**30C-39** Egy  $m$  tömegű és  $R$  sugarú merev huzalhurok olyan vízszintes felületen fekszik, ahol a mágneses indukcióvektort a  $\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$  egyenlet adja meg és  $\hat{y}$  függőlegesen felfelé mutat. Számítsuk ki a hurokban folyó minimális  $I$  áramerősséget, mely ahhoz szükséges, hogy a hurok egyik ága felemelkedjen a felületről.

**30C-40** A  $\mathbf{B} = B\hat{z}$  fluxussűrűségű homogén mágneses térben szabálytalan alakú áramvezető huzal (nyílt hurok) az  $xy$  síkon fekszik. Az áramot a hurokhoz, illetve onnan el a  $z$  tengellyel párhuzamos huzalok vezeték. (A csátkozások az  $x = 0$  illetve az  $x = h$  pontokban vannak). Mutassuk meg, hogy a hurokra ható eredő erő független a hurok alakjától, és az  $\mathbf{F} = -BhI\hat{y}$  egyenlettel adható meg.

**30C-41** A hidrogénatom Bohr-modellje szerint az elektron körpályán mozog a proton körül. A körmozgás fenntartásához szükséges centripetális erő a Coulomb-kölcsönhatásból ered. A legalacsonyabb energiaszinten a pálya sugara  $52,9$  pm ( $1$  pm =  $10^{-12}$  m). a) Számítsuk ki az elektron mozgásának megfelelő áramerősséget. b) Számítsuk ki ennek az áramhuroknak a mágneses dipólusmomentumát (amit Bohr-magnetonnak neveznek).



### 30-29 ábra

A 30C-40 feladathoz.

**30C-42** A téglalap alakú áramvezető hurokra mágneses erőtérben ható forgatónyomaték a téglalap oldalainak arányától függ. Mutassuk meg, hogy adott hosszúságú huzalból készült téglalap alakú hurokra akkor hat a legnagyobb forgatónyomaték, ha a hurok éppen négyzet alakú.

**30C-43** Egy  $\ell$  hosszúságú huzalból kör keresztmetszetű,  $N$  menetű tekercset készítünk. a) Mutassuk meg, hogy adott  $I$  áramerősség esetén a tekercsnek akkor legnagyobb a mágneses dipólusmomentuma, ha  $N=1$ . b) Indokoljuk meg, miért a kör alakú egymenetű tekercsnek legnagyobb a mágneses momentuma.

**30C-44** Egy  $R$  sugarú,  $m$  tömegű kör alakú, egy pontjában súrlódásmentesen felfüggesztett áramvezető hurkon  $I$  erősségű áram halad át. A függőleges irányú, mágneses erőtér hatására a hurok síkja a függőlegessel  $\theta$  szöget zár be. Fejezzük ki a  $\theta$  szöget  $m$ ,  $r$ ,  $I$  és  $B$  mágneses fluxussűrűség függvényeként.

**30C-45** Egyenletes keresztmetszetű korongot, melynek tömege  $m$ , és melyen  $q$  töltés egyenletesen oszlik el, tengelye körül forgatunk. Mutassuk meg, hogy a forgó töltött korong  $\boldsymbol{\mu}$  mágneses momentuma és  $\mathbf{L}$  impulzusmomentuma között a  $\boldsymbol{\mu} = (q/2m)\mathbf{L}$  összefüggés teremt kapcsolatot. (A 30C-51 feladat megoldása is felhasználható segítségül)

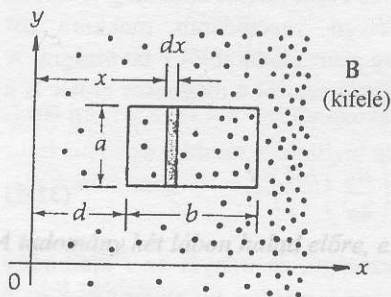
**30C-46** Kör alakú áramvezető hurokra adott mágneses erőtérben maximálisan  $M_0$  forgatónyomaték hat. Alakítsuk át a hurkot úgy, hogy kisebb, de kétmenetű legyen. Mekkora a maximális forgatónyomaték ezen a kisebb hurkon?

**30C-47** Az  $\ell$  hosszúságú vékony rúd szigetelő anyagból készült és rajta hosszúságegységként  $\lambda$  töltés van. A rudat  $\omega$  szögsebességgel forgatjuk a középpontján átmenő, a rúdra merőleges tengely körül. Mutassuk meg, hogy a mágneses dipólusmomentum  $\omega \lambda \ell^3 / 24$ . (Útmutatás: számítsuk ki a tengelytől  $x$  távolságra lévő  $dx$  hosszúságú szakasz  $dq$  töltésének mozgásából származó mágneses erőteret és integráljunk.)

**30C-48** Mutassuk meg, hogy inhomogén mágneses erőtérben hat a mágneses dipólusokra forgatónyomaték is, és eredő erő is. Mi annak feltétele, hogy a dipólusok a növekvő mágneses erőtér irányában mozogjanak?



**30C-49** Egy  $\mu$  dipólusmomentumú és  $L$  impulzusmomentumú mágneses dipólus tengelye a  $B$  fluxussűrűségű homogén mágneses erőtér irányával  $\theta$  szöget zár be. A  $\mu$  és  $L$  vektorok egymással párhuzamosak. Mutassuk meg, hogy a dipólus  $\omega_p = -(\mu/L)B$  szögsebességű precessziót végez. (Lásd még a 13.6 fejezetet)



**30-30 ábra**

A 30C-50 feladathoz.

**30C-50** A  $B = xB_0\hat{z}$  formulával megadott, a  $z$  tengely pozitív irányába (az olvasó irányába) mutató inhomogén mágneses erőtérben (30-30 ábra) a fluxussűrűség az

$x$  irányban lineárisan változik. A térben elhelyezkedő  $a$  és  $b$  oldalhosszúságú téglalap alakú hurok síkja a mágneses erőtérre merőleges; a hurok bal széle az  $y$  tengellyel párhuzamos, és attól  $d$  távolságra van. Számítsuk ki a hurok teljes felületén a  $\Phi_B$  fluxust. (Útmutatás: számítsuk ki a  $dA = a dx$  felületen a  $\Phi_B$  fluxust. A teljes fluxust integrálással kapjuk meg:  $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ )

**30C-51** Szigetelő anyagból készült  $R$  sugarú korong egyik oldalán a felületmenti homogén töltéssűrűség nagysága  $\sigma$ . A korongot tengelye körül  $\omega$  szögsebességgel forgatjuk. Mutassuk meg hogy mágneses dipólusmomentuma  $\omega \sigma \pi R^4 / 4$ . (Útmutatás: Számítsuk ki az  $r$  sugarú,  $dr$  széles körgyűrűn lévő töltések mozgásából származó mágneses erőtérrel. Használhatjuk a (30-14) egyenletet.)

**30C-52** Tekintsünk egy téglalap keresztmetszetű  $\rho$  fajlagos ellenállású fémes vezetőt. Mutassuk meg, hogy a Hall-effektus miatt létrejövő  $E_H$  térerősség és az elektromos áramot fenntartó  $E$  elektromos térerősség között fennáll az  $E_H = (B/nep)E$  összefüggés, ahol  $B$  a mágneses indukcióvektor nagysága és  $n$  az egységnyi térfogatra jutó ( $-e$  töltésű) vezetési elektronok száma.

Az elméletben a statikus mágneses erőkkel a mozgó töltésekre fejelt erőket foglalkoztunk. Ebben a fejezetben a statikus mágneses erők erőtét vizsgáljuk meg: az elektromágnesség érdekes tulajdonsága, hogy elektromos töltések stacionárius áramlása statikus mágneses erőtérrel hoz létre. Megmutatjuk továbbá, hogy az elektromos és mágneses erők között bizonyos szimmetria áll fenn, nevezetesen az, hogy változó mágneses terek elektromos, míg változó elektromos erők mágneses erőtérrel hoznak létre. E szimmetria akkor vált nyilvánvalóvá, amikor James Clerk Maxwell (1831–1879) angol fizikus elvégezte az utolsó simításokat az elektromágnesség elméletén.

### 31.2 A Biot-Savart törvény.

1819-ben a dán fizikus, Hans Christian Oersted (1777–1851) éppen befejezett egy elektromosságról és mágnességről szóló előadást, amikor egy áramot vezető huzalt irányítónőz közelébe állt. Ennek hatására az irányító új irányba állt. Az elektromosság és mágnesség közötti kapcsolat felfedezése alapvető fontosságú volt. Számos kortárs fizikus, különösen Franciaországban, követve Oersted kísérletét, hamarosan új felfedezésekkel mélyítették az elektromágnességre vonatkozó ismereteinket.

Az elektromos erőktereket tanulmányozva úgy találtuk, hogy azok eredete a elektromos töltések. Felismertük, hogy tetszés szerinti töltésceloszlástól előtt pontban létrehozott elektromos térerősség kiszámításához először az elemi  $dq$  töltés által keletkezett  $d\mathbf{E}$  elemi térerősséget kell meghatározni. Ezt az alábbi, távolság négyzetével fordítottan arányos összefüggés adja meg:

$$d\mathbf{E} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Oersted felfedezése valószínűleg véletlen volt. Az Amerikai Fizikainak Egyesülete minden évben emlékművet adományoz egy kiváló fizikainak. Az éremet Oersted-emlékvevnek nevezik annak emlékére, hogy Oersted felfedezése fizikainak körében híres.

## XXVII. Fejezet

- 27A-1 0,885 pF  
 27A-3 a)  $\frac{3}{5} C$  b)  $3C$  c)  $C$  d) A kondenzátorok rövidre vannak zárva  
 27B-5  $C$   
 27B-7  $C = \epsilon_0 A(a + b)/[b(a - b)]$   
 27B-9 A válasz adott.  
 27B-11 A válasz adott.  
 27B-13 A válasz adott.  
 27B-15 a) 400 pC b) 80 V  
 27B-17 0,188 m<sup>2</sup>  
 27B-19  $C = C_0/(1 - f)k$   
 27B-21  $2\pi\epsilon_0 L\kappa_1\kappa_2 \left[ \kappa_2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \kappa_1 \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right]^{-1}$   
 27A-23 a) 1,60 mJ b) 0,800 mJ  
 27B-25 A válasz adott.  
 27B-27 a) 600 nC, csökken b) 30  $\mu$ J, csökken c) 30  $\mu$ J  
 27B-29 A válasz adott.  
 27C-31 A válasz adott.  
 27C-33 267 V  
 27C-35  $C/L = \kappa 2\pi\epsilon_0 / [\ln(b/a)]$   
 27C-37  $1/(1 + \kappa)$   
 27C-39  $CV^2/2d$   
 27C-41 A válasz adott.  
 27C-43  $1,41 \times 10^{-15}$  m

## XXVIII. Fejezet

- 28A-1  $3,12 \times 10^{19}$  elektron/s  
 28B-3 a)  $5,86 \times 10^{28}$  elektron/m<sup>3</sup> b) 51,9 mA c)  $1,76 \times 10^{-6}$  m/s  
 28A-5 0,667  $\Omega$   
 28A-7 418C°  
 28A-9 276C°  
 28B-11 1,56 R  
 28B-13 1,66 V  
 28A-15 5,25 W  
 28A-17 a) 11,1  $\Omega$  b) 1,08 A  
 28A-19 a) 66,7%-kal nagyobb teljesítmény b) Nem  
 28A-21  $\rho L/\pi(b^2 - a^2)$   
 28B-25 a) 2,16 kW b) 1,34 hp c) 46,3%  
 28B-27 a)  $9,36 \times 10^{11}$  részecske b) 6,00 W  
 28A-29  $6,00 \times 10^{-15}$  s  
 28B-31  $4,17 \times 10^6$  A/m<sup>2</sup>  
 28B-33 A válasz adott.  
 28C-35 A válasz adott.  
 28C-37 A válasz adott.  
 28C-39 SI egységekben: a)  $4000V^{2/3}$ ;  $(2,50 \times 10^{-4})V^{5/2}$   
 28C-41 A válasz adott.  
 28C-43 8,32 h  
 28C-45  $(b - a)/4\pi ab\sigma$   
 28C-47 A válasz adott.  
 28C-49 A válasz adott.

## XXIX. Fejezet

- 29A-1 220  $\Omega$   
 29B-3 a) A b) B c) 4,50  
 29B-5 A válasz adott.  
 29B-7  $R_{AB} = \frac{7}{5} R$   
 29B-9 wattban: 10, 16, 24, 30, 40,  $53\frac{1}{3}$ ,  $66\frac{2}{3}$ , 100, 160  
 29A-11 9,20 V  
 29A-13 A válasz adott.  
 29A-15 A válasz adott.  
 29B-17 a) 5,00  $\Omega$  b) 6,00 A c) 2,00 A  
 29B-19 0,0860  $\Omega$   
 29B-21 2,67 mA  $R_1$ -en; 2,50 mA  $R_2$ -n; 0,167 mA  $R_3$ -on  
 29B-23 A válasz adott.  
 29B-25 A válasz adott.  
 29B-27 a) 2,41 k $\Omega$  b) 2,46 k $\Omega$   
 29B-29 a) 0,517% b) 0,103%  
 29B-31  $R_1 = 5,025 \times 10^{-3} \Omega$ ;  $R_2 = 4,523 \times 10^{-2} \Omega$ ;  
 $R_3 = 4,523 \times 10^{-1} \Omega$ ;  $R_4 = 4,523 \Omega$   
 29B-33 A válasz adott.  
 29A-35 A válasz adott.  
 29B-37 0,587 M $\Omega$   
 29B-39 A válasz adott.  
 29B-41 1,44  $\mu$ F  
 29C-43  $R_1 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_C$ ;  
 $R_2 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_A$ ;  
 $R_3 = (R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A)/R_B$ ;  
 29C-45  $R_A = R_1 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3)$ ;  
 $R_B = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_3)$ ;  
 $R_C = R_2 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3)$ ;  
 29C-47  $R(1 + \sqrt{3})$   
 29C-49 A válasz adott.  
 29C-51 A válasz adott.  
 29C-53 A válasz adott.  
 29C-55 201  $\Omega$   
 29C-57  $R/2$   
 29C-59 163 V; 1,43 M $\Omega$   
 29C-61 0,050 J  $R_1$ -en; 0,0167 J  $R_2$ -n  
 29C-63 6,90 Hz

## XXX. Fejezet

- 30A-1  $1,86 \times 10^{-6}$  m/s  
 30B-3  $F = 1,44 \times 10^{-13} \hat{y} - 3,36 \times 10^{-13} \hat{z}$  (newtonban)  
 30A-5 1,20 keV  
 30A-7 0,357 T  
 30B-9  $R_\alpha = R_p = 42,8R$   
 30B-11  $R = \sqrt{2mV/qB^2}$   
 30A-13  $7,78 \times 10^5$  m/s  
 30B-15  $2,44 \times 10^5$  V/m  
 30B-17 b) 0,708 T



- 30A-19 A válasz adott.  
 30B-21  $\tau = (-1,44 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}) \hat{z}$   
 30B-23  $\mu = Iab \cos \theta \hat{x} + Iab \sin \theta \hat{y}$   
 30A-25  $\frac{1}{5}$   
 30B-27 a) 37,7 mT b)  $(4,28 \times 10^{25})/\text{m}^3$   
 30A-29 0,438  $\mu\text{W}$   
 30C-31 a) 12,2 MHz b) 35,4 MeV  
 c) 24,4 MHz, 70,8 MeV d) 17,7 MeV  
 e) 1,60 T f) 70,8 MeV g) Egyik sem  
 30C-33 A válasz adott.  
 30C-35  $qBt/m$   
 30C-37  $IBR$   
 30C-39  $mg/\pi r B_x$   
 30C-41 a)  $1,05 \times 10^{-3} \text{ A}$  b)  $9,27 \times 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$   
 30C-43 A válasz adott.  
 30C-45 A válasz adott.  
 30C-47 A válasz adott.  
 30C-49 A válasz adott.  
 30C-51 A válasz adott.

### XXXI. Fejezet

- 31A-1 1,43°  
 31B-3  $\mu_0 NI / 2\sqrt{2}R$   
 31A-5 A válasz adott.  
 31B-7  $\mu_0 I(b-a) / 4ab$  (kifelé mutat)  
 31B-9  $\Phi_B = \mu_0 I l (\ln 3) / 2\pi$   
 31B-11  $\mu_0 I 2\sqrt{2} / \pi b$   
 31A-13 a)  $2,20 \times 10^{-5} \text{ Wb}$  b) 5570 menet  
 31B-15  $B_{\text{belül}} = \mu_0 I r / 2\pi a^2$   
 31C-17 A válasz adott.  
 31C-19 A válasz adott.  
 31C-21 A válasz adott.  
 31C-23 a)  $B = -(\mu_0 I a / \pi [z^2 + a^2])$   
 b)  $\lim_{z \gg a} B = -(\mu_0 I a / \pi z^2) \hat{z}$   
 31C-25  $2RB_c \tan \theta / \mu_0 N$   
 31C-27 a)  $\text{A}/\text{m}^3$  b) 0 c)  $\mu_0 k(r^3 - a^3) / 3r$   
 d)  $\mu_0 k(b^3 - a^3) / 3r$   
 31C-29  $-(\mu I / 6\pi a) \hat{x}$  függetlenül  $y$ -tól  
 31C-31  $\mu_0 \sigma \omega R$   
 31C-33  $(\mu_0 I / 2\pi \omega) \ln(1 + w/d)$   
 31C-35 A válasz adott.  
 31C-37  $\mu_0 NI/l$

### XXXII. Fejezet

- 32B-1 30 V az óramutató járása szerint  
 32B-3  $\mathcal{E} = \frac{2B\pi r^2}{t}$   
 32B-5 A válasz adott.  
 32B-7 3,38 A/s

- 32A-9 A válasz adott.  
 32A-11  $N\mu_0 \pi R/2$   
 32B-13 a) 360 mV b) 180 mV c) 3,00 s  
 32A-15 a)  $\mu_0 N_1^2 A/l$   $\mu_0 N_2^2 A/l$  b)  $\mu_0 N_1 N_2 A/l$   
 32B-17  $M = \mu_0 A N_1 N_2 / l$   
 32B-19 a)  $V/L$   
 32B-21 A válasz adott.  
 32A-23 145 J/m<sup>3</sup>  
 32B-25 a) 20 W b) 20 W c) 0 d) 20 J  
 32C-27 a) 0,171 mV b) a keleti végén  
 32C-29 b) 0,458 mV  
 32C-31 a)  $b a$  b)  $\Delta Q = N \Delta \Phi / R$  c)  $B = QR/NA$   
 32C-33 3,08  $\mu\text{C}$   
 32C-35 a)  $C\pi a^2 k$  b) a felső lemezének  
 32C-37 0,132  $\mu\text{A}$   
 32C-39 A válasz adott.  
 32C-41 A válasz adott.  
 32C-43 A válasz adott.  
 32C-45  $\mu_0 I^2 / 16\pi$   
 32C-47 A válasz adott.

### XXXIII. Fejezet

- 33A-1 88,6 mA  
 33A-3 318 A  
 33B-5 A válasz adott.  
 33B-7 a) 0,0251 T b) 10,0 A  
 33C-9 1,48 mC

### XXXIV. Fejezet

- 34A-1 A válasz adott.  
 34A-3 A válasz adott.  
 34B-5 a)  $v = 24,1 \sin 377t$  b) a hurok síkja merőleges B-re  
 34A-7 b)  $3,2 \times 10^{-2} \text{ J}$   
 34B-9 b)  $v = 8,32 \sin(1000t + 33,7^\circ)$  (SI-ben)  
 34B-11 a) 173  $\Omega$  b) 8,66 V  
 34B-13 A válasz adott.  
 34B-15  $i = 2,11 \sin(10^5 t + 71,6^\circ)$   
 34A-17 100  
 34A-19 46,5 pF-tól 419 pF-ig  
 34B-21 A válasz adott.  
 34A-23  $v = 170 \sin(377t) \text{ V}$   
 34A-25 122 W  
 34B-27 A válasz adott.  
 34B-29 A válasz adott.  
 34B-31 b) 141 V c) 36,2 mA d) 109 V  
 e) 90,5 V  
 34B-33 a) 211  $\mu\text{F}$  b) 979 W  
 34B-35 a) 5,00 A b) 2,77 A c) 2,77 A  
 34A-37 a) 20,0 V b) 0,660 A  
 34B-39 a)  $1,82 \times 10^4 \text{ A}$  b) 909 A  
 34C-41 b) 82,1 V c) -70,8 V d) 53,1 V  
 e) 64,4 V