

VIIIAB05 - Szabályozástechnika

Állapotteres szintézis folytonos időben

Kiss Bálint

Irányítástechnika és Informatika Tanszék,
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. április 20.

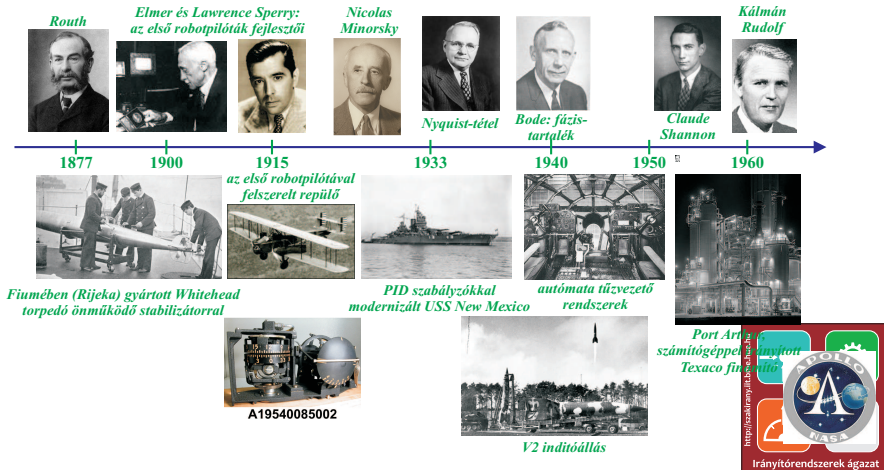


Tartalom

- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 Állapotteres szabályozó elemei
 - Pólusáthelyezés
 - Megfigyelő
 - Alapjel figyelembe vétele
 - Terhelésbecslő
 - Integráló hatás állapotterben



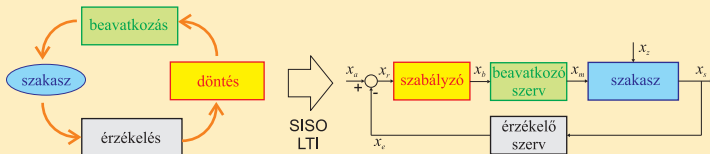
Eddigi ismeretek kronológiája



Az előző részek tartalmából

a hallgató

- 1 képes megfogalmazni a szabályozástechnika vizsgálódásainak tárgyát és elmagyarázni alapfogalmait,
- 2 ismeri a szabályozási kör elemeit, osztályozásának, szempontjait, minőségi jellemzőit,



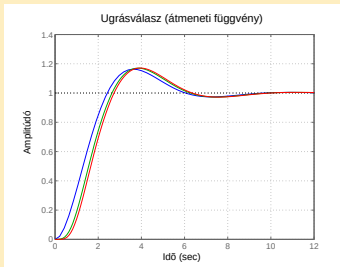
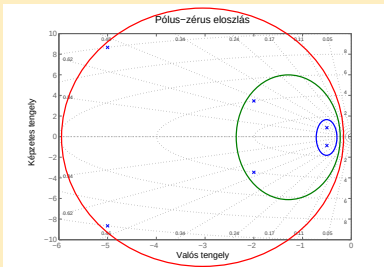
- 3 képes meghatározni a szabályozási kör statikus tulajdonságait

$$W_o(s) = \frac{K}{s^i} \frac{\prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\eta_l \tau_l s + 1)}{\prod_{p=1}^{n_1} (T_p s + 1) \prod_{q=1}^{n_2} (T_q^2 s^2 + 2\xi_q T_q s + 1)}$$

Az előző részek tartalmából

a hallgató

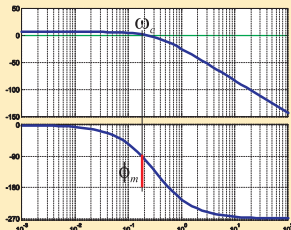
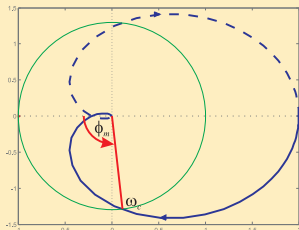
- 1 ismeri a kapcsolatot a tranziensek tulajdonságai, a frekvenciaválasz és a pólus-zérus eloszlás között,
- 2 ismeri a tranziens viselkedés domináns póluspár alapján történő közelítését (felhasználtuk 2DOF tervezéskor),



Az előző részek tartalmából

a hallgató

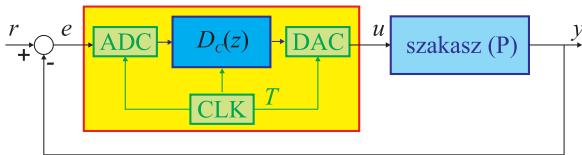
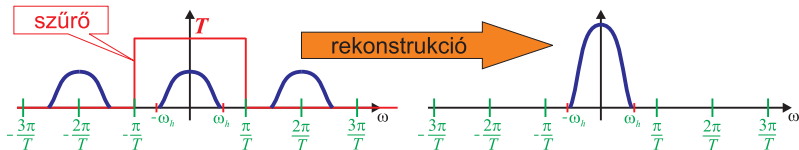
- 1 tisztában van a szabályozási kör stabilitásának jelentőségével,
- 2 ismeri az argumentum elvet kihasználó és $W_o(s)$ frekvenciaválaszával dolgozó Nyquist- és a Bode-kritériumokat,
- 3 ismeri vágási frekvencia és a fázistartalék definícióját (STABILITÁS $\Leftrightarrow \phi_m > 0$ ($\phi_m = \pi + \varphi(\omega_c)$)).



Az előző részek tartalmából

a hallgató

- 1 ismeri Shannon-tétel alapján támasztott ideális követelményeket egy szabályzó mintavételes megvalósításához,



Az előző részek tartalmából

(Lineáris) Állapotegyenlet

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ az állapotvektor
- $u \in \mathbb{R}^m$ a bemenetek vektora
- $y \in \mathbb{R}^p$ a kimenetek vektora

Általában $m \leq n$ és $p \leq n$.

SISO rendszer

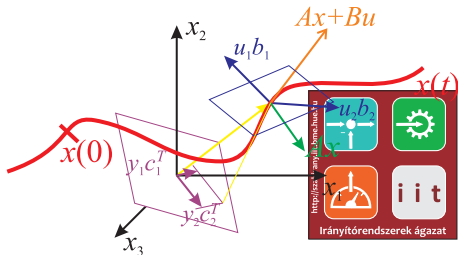
$$p = m = 1$$

Mátrixok méretei

Első index az sorok, második az oszlopok száma.

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$C \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$



Írányíthatóság és elérhetőség

Definíció - irányíthatóság (LTI rendszer)

- 1 A rendszer az x_1 állapotból **nullába irányítható**, ha létezik $\infty > T \geq \tau$ idő és egy $u : [\tau, T) \mapsto \mathbb{R}^m$, hogy $x(T) = 0$.
- 2 A rendszer **teljesen nullába irányítható**, ha minden x_1 -ből nullába irányítható.

Definíciók - elérhetőség (LTI rendszer)

- 1 Az állapottér origójából az x_1 állapot **elérhető**, ha létezik $\infty > T \geq \tau$ idő és egy $u : [\tau, T) \mapsto \mathbb{R}^m$, hogy $x(T) = x_1$.
- 2 A rendszer **teljesen elérhető**, ha minden $x_1 \in \mathbb{R}^n$ elérhető.

Tétel (Kálmán-kritérium)

Az $\dot{x} = Ax + Bu$ LTI rendszer akkor és csak akkor irányítható, ha az $M_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix}$ ún. **irányíthatósági mátrix** rangja maximális, azaz n .



Az előző részek tartalmából

Megfigyelhetőség és rekonstruálhatóság - LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx + Du$$

Egy x_0 állapot megfigyelhető, ha a rendszert $x(0) = x_0$ kezdeti állapotból indítva és $0 < T$ véges ideig megfigyelve az $y(t)$ kimenetet és $u(t)$ bemenetet, azokból x_0 meghatározható. A rendszer megfigyelhető, ha minden $x \in \mathbb{R}^n$ állapot megfigyelhető.

Tétel (Kálmán-kritérium) megfigyelhetőségre

LTI rendszerek esetében az (A, C) pár megfigyelhetőségének feltétele, hogy a

$$M_o = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & (CA^2)^T & \dots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}^T$$

ún. **megfigyelhetőségi mátrix (observability matrix)** rangja maximális, azaz n legyen.



tananyagtervezési ágazat

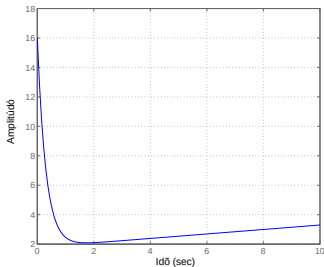
Az előző részek tartalmából - szabályzók

PID szabályzó

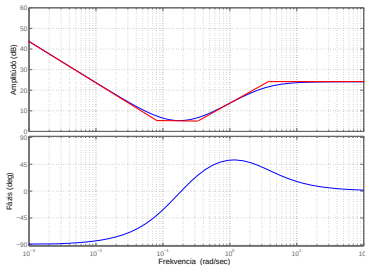
Előírt fázistartalék és maximális beavatkozó jel.

$$W_{PID}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{sT_c + 1} \right) = \frac{A_p}{T_i} \frac{T_i(T_d + T_c)s^2 + (T_i + T_c)s + 1}{s(sT_c + 1)}$$

Ugrásválasz – átmeneti függvény (PID)



Bode-diagram (PID)



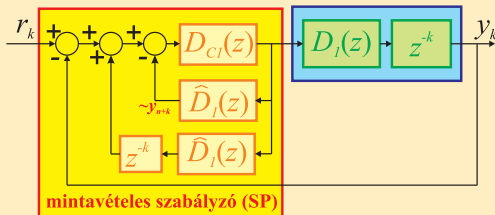
Az előző részek tartalmából - szabályozók



Otto J.M. Smith (1917-2009),
amerikai kémikus,
villamosmérnök

Smith-prediktor - ha nagy a holtidőnk

Rendelkezésre áll a szakasz késleltetés nélküli
modellje. Használjuk ezt a jósláshoz!



(Ha jó a modell, akkor $\hat{D}_1(z) = D_1(z)$).

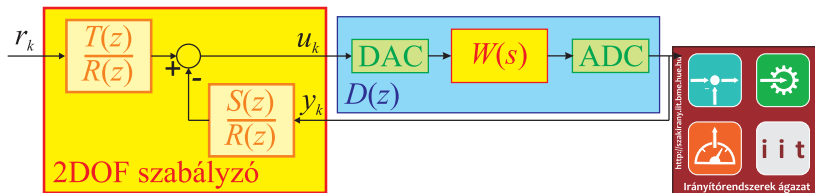
Az előző részek tartalmából - szabályzók

Kétszabadságfokú (2DOF) szabályzó

Modellillesztés: adott $D(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ átvitele és előírjuk

- 1 a zárt kör számunkra megfelelő dinamikus viselkedését definiáló domináns póluspárt és az azokhoz tartozó tranzienseket érdemben nem módosító „gyors” pólusokat,
- 2 a típusszámot és a zárt kör statikus erősítését,

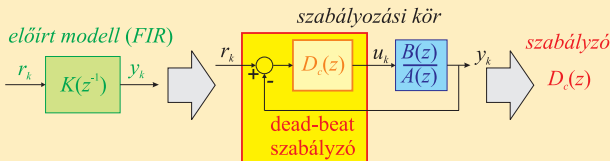
majd ebből visszaszámoljuk a három polinom ($R(z)$, $S(z)$, $T(z)$) fokszámát és együtthatóit.



Az előző részek tartalmából - szabályzók

Véges beállású (deadbeat) szabályzó

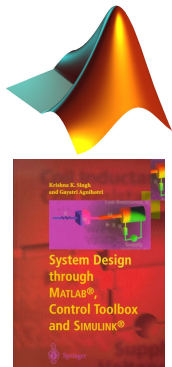
A szakasz diszkrét idejű $D(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ átviteléből indulunk ki és FIR átvitelt akarunk elérni zárt körben.



A tervezés alapja: az $L(z^{-1}) = l_0 + l_1 z^{-1}$ korrekciós polinom

$$l_0 = \frac{u_{max}}{a_0} \quad l_1 = \frac{1}{B(1)} - \frac{u_{max}}{a_0} \quad D_c = \frac{LA}{1 - LB}$$

Elsajátított Matlab ismeretek



A hallgató

- 1 ismeri a Matlab és a Simulink felépítését, adatszerkezeteit,
- 2 ismeri a Control System Toolbox adatszerkezeteit, osztályait azok tagfüggvényeit és tagváltozóit,
- 3 képes a Matlab, a Simulink és a Control System Toolbox segítségével a szabályozási kör jellemzőit vizsgálni (**LTIView**),
- 4 képes Matlab segítségével a szabályzó méretezési eljárásokat implementálni (**PID - fsolve** - mintavételezés, **sisotool**, **2DOF**, **Smith**, **FIR**)

A tizedik előadás célja

A hallgató

- 1 képes visszavezetni a pólusáthelyezést és a megfigyelő tervezését az Ackermann-képletre,
- 2 megismeri az alapjel figyelembe vételére szolgáló erősítések meghatározását,
- 3 képes terhelésbecslőt méretezni és integrátorhatást beépíteni.



Tartalom



Jürgen Ackermann (1936-)
villamosmérnök

- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 Állapotteres szabályozó elemei
 - Pólusáthelyezés
 - Megfigyelő
 - Alapjel figyelembe vétele
 - Terhelésbecslő
 - Integráló hatás állapotterben



Tartalom

- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 **Állapotteres szabályozó elemei**
 - Pólusáthelyezés
 - Megfigyelő
 - Alapjel figyelembe vétele
 - Terhelésbecslő
 - Integráló hatás állapotterben

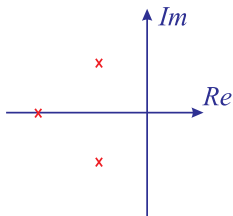


Tartalom

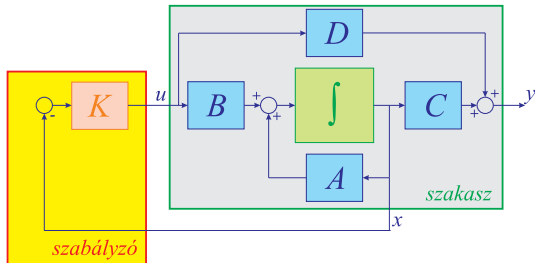
- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 **Állapotteres szabályozó elemei**
 - **Pólusáthelyezés**
 - Megfigyelő
 - Alapjel figyelembe vétele
 - Terhelésbecslő
 - Integráló hatás állapotterben



Probléma - modell alapú tervezéssel analóg



Sajátértékek zárt körben.



Hatásvázlat állapotviszacsatoláskor.

Állapotviszacsatolás

$u = -Kx$, azaz a beavatkozó jel az állapotok lineáris kombinációja minden időpillanatban.

Újra itt a modellillesztéses paradigma. (Emlékeztet pl. a 2DO szabályzóból.)

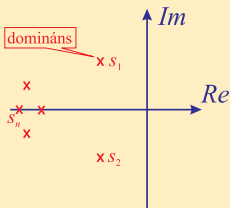


Pólusáthelyezés állapotvisszacsatolással

Zárt kör állapotegyenlete

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

A zárt kör kívánt sajátértékei



A zárt kör karakterisztikus egyenlete

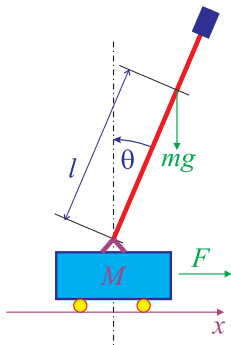
$$\varphi_c(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i)$$

K -t az Ackermann-képlettel kapjuk

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} \varphi_c(A)$$



Egy nagy klasszikus: invertált inga kiskocsin



Dinamika egyenletei

- 1 két szabadsági fok (x, θ) ,
- 2 a külső erő a kocsit vízszintesen gyorsítja,
- 3 Newton-Euler egyenletekből, vagy Lagrange-függvényből:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F - c_x \dot{x}$$
$$l\ddot{\theta} - g \sin \theta + \ddot{x} \cos \theta + c_\theta \dot{\theta} = 0$$

A súrlódási együtthatók: c_θ és c_x .

Megjegyzés

Nemlineáris modell. A (labilis) egyensúlyi pont: $x = \theta = 0$.



Egyensúly környékén linearizált

Állapot

Legyen $x = [\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}]^T$ és $u = F$. Paraméterek: $M = 2$,
 $m = l = c_r = c_\theta = 1, g = 10$,

Állapotegyenlet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 1,5 & 0,5 \\ -10 & 0 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} u$$

Sajátértékek

$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 4,5374$, $\lambda_3 = -3,3742$, $\lambda_4 = -0,163$. Következésképpen ez egy labilis rendszer.

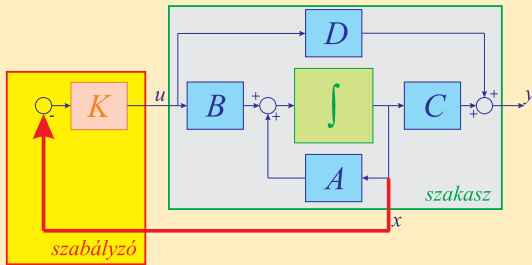
Tartalom

- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 **Állapotteres szabályozó elemei**
 - Pólusáthelyezés
 - **Megfigyelő**
 - Alapjel figyelembe vétele
 - Terhelésbecslő
 - Integráló hatás állapotterben



Miért van szükség megfigyelőre?

Állapotviszacsatolás esetén



Így n mennyiséget kell mérni a visszacsatoláshoz: sok érzékelő (drága); sok kábelezés (drága); sok hibalehetőség.

Kérdés

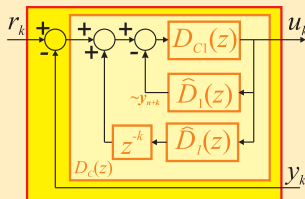
Ha ismert a szakasz modellje, annak alapján nem lehet becsülni a belső állapotokat a be és kimenet ismeretében?

Megfigyelő - előzmények

Kérdés

Ha ismert a szakasz modellje, annak alapján talán lehetne becsülni a belső állapotokat a be- és kimenet ismeretében...

Hasonlót már csináltunk diszkrét időben: Smith-prediktor



Megjegyzés

A továbbiakban a $D = 0$ feltételezéssel élünk az állapotegyenletben.

Megfigyelő

Elvárások

A megfigyelő állapota legyen $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

- 1 biztosítani kell, hogy a becslés hibája nullához tartson $e = \hat{x} - x$ és $e \rightarrow 0$.
- 2 a hibának tetszőleges bemenet és kimenet mellett nullához kell tartania

Megfigyelő alakja

A megfigyelő egy lineáris állapotegyenlettel adható meg

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + Hu + Gy$$

és keressük F -et, G -t és H -t, hogy elvárásaink teljesüljenek.



Megfigyelő állapotegyenletének meghatározása

Állítás

Ha

$$\dot{\hat{x}} = (A - GC)\hat{x} + Bu + Gy = A\hat{x} + Bu + G(y - C\hat{x})$$

akkor teljesül, hogy

$$\dot{e} = (A - GC)e = Fe$$

azaz az e hiba $(A - GC)$ sajátértékeinek megfelelő módon tart nullához.

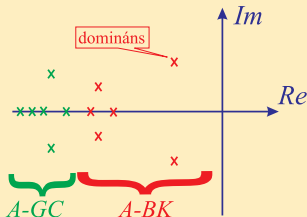
Észrevételek

- 1 Az $(A - GC)$ mátrix sajátértékeinek beállítása (azaz $(A - GC)^T = (A^T - C^T G^T)$ sajátértékeinek beállítása) szintén az Ackermann-képlettel lehetséges, amely megadja a szükséges G -t.
- 2 A becslőben szereplő $G(y - C\hat{x})$ egy korrekciós tag, hiszen az a modellünk kimenetének és a valódi kimenetnek a különbsége.
- 3 G itt oszlopvektor.



Megfigyelő és állapotvisszacsatolás együtt

Kívánt sajátértékek



A zárt kör karakterisztikus egyenletei

Állapotvisszacsatolás és megfigyelő

$$\varphi_c(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_{ci})$$

$$\varphi_o(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_{oi})$$

K -t és G -t az Ackermann-képlettel kapjuk

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} M_c^{-1} \varphi_c(A)$$

$$G^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} (M_o^T)^{-1} \varphi_o(A^T)$$



Szeparációs elv LTI rendszereknél

Kérdés

Befolyásolják-e a megfigyelő sajátértékei az állapotvisszacsatolás sajátértékeit és viszont?

A zárt kör egyenlete - megfigyelő és állapotvisszacsatolás

A zárt kör állapotvektora: $[x, e]$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BK\hat{x} - BKx + BKx = (A + BK)x - BK(\hat{x} - x) \\ \dot{e} &= Fe\end{aligned}$$

ahonnan ugyanez mátrixos alakban

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

Sajátértékek: $\lambda(A + BK) \cup \lambda(F)$.



Tartalom

- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 **Állapotteres szabályozó elemei**
 - Pólusáthelyezés
 - Megfigyelő
 - **Alapjel figyelembe vétele**
 - Terhelésbecslő
 - Integráló hatás állapotterben



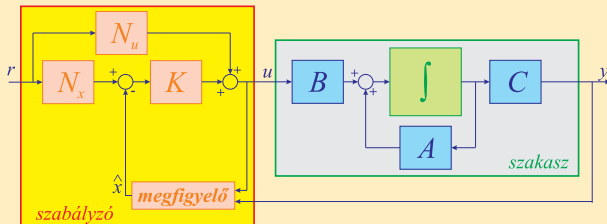
Mi legyen az alapjellel?

Eddig nem volt alapjel

A zárt kör arra volt képes, hogy mind az állapot, mind a becslő hibája nullához tartott tetszőleges kezdeti feltételek nyomán.

Struktúra az alapjel figyelembe vételére

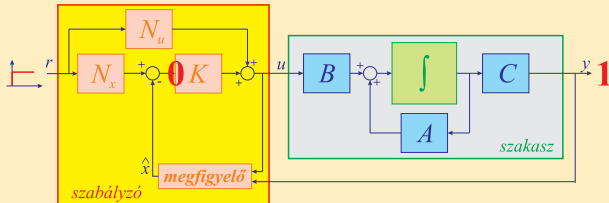
Két erősítéssel. Ha SISO a rendszer, akkor N_x vektor, N_u pedig egy szám.



N_x és N_u meghatározása az alapjelhez

Elgondolás

Egységugrás alapjel estén ($r(t) = \varepsilon(t)$) beállítjuk a végértékeket az erősítések segítségével.



Egyenletek a végértékekből

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tartalom

- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 **Állapotteres szabályozó elemei**
 - Pólusáthelyezés
 - Megfigyelő
 - Alapjel figyelembe vétele
 - **Terhelésbecslő**
 - Integráló hatás állapotterben



Bemeneti zavarás

Milyen hatások?

Bizonyos zavarások felfoghatóak úgy, hogy módosítják a bemenetet.



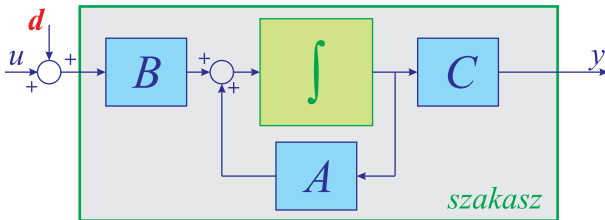
lejtő szög



szállított tömeg



Bemeneti zavarás (terhelés)



Jellemzők

A d zavarás (**disturbance**) általában járulékos terhelést jelent, amely meghamisítja a beavatkozó jelet.

A zavarás modellje

- ① értéke ismeretlen,
- ② értéke hosszú ideig jó közelítéssel állandó ($\dot{d} = 0$).



Elgondolás a bemeneti zavarás kompenzálására

Megjegyzés

A konstans de ismeretlen d zavarás olyan, mintha egy állapot lenne, amely befolyásolja a kimenetet, de nem ismerjük kezdeti értékét.

Felismerés

Ugyanakkor van eszközünk arra, hogy egy állapot kezdeti értékét megbecsüljük, amennyiben a kimeneten annak hatását megfigyelhetjük: állapotmegfigyelő.

Következtetés

Egészítsük ki (bővítsük) az állapotokat d értékével és készítsünk becslőt a bővített rendszerhez!



Állapotbecslő a bővített rendszerhez

Legyen x_d a zavarásnak megfelelő állapot!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(x_d + u) = Ax + Bx_d + Bu \\ \dot{x}_d &= 0\end{aligned}$$

Átrendezve mátrixos alakba

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_d \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Bevezetve $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x & x_d \end{bmatrix}$ bővített állapotot ugyanez tömörebben

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \quad y = \tilde{C}\tilde{x}$$



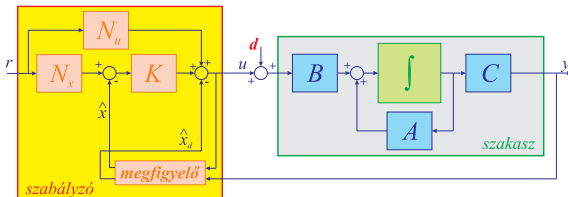
Állapotbecslő a bővített rendszerhez

Becslő

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{x}}_d \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} + \tilde{H}u + \tilde{G}y$$

Ackermann-képlettel

$$\tilde{G}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\tilde{M}_o^T)^{-1} \varphi_o(\tilde{A}^T)$$



Tartalom

- 1 Az előző részek tartalmából
- 2 **Állapotteres szabályozó elemei**
 - Pólusáthelyezés
 - Megfigyelő
 - Alapjel figyelembe vétele
 - Terhelésbecslő
 - Integráló hatás állapottérben



Integrátor

Miért volt jó az integrátor hatása?

- 1 zavarás elnyomása,
- 2 paraméterbizonytalanságok kiküszöbölése.

Elgondolás - most is új állapot

A kimenet integrálját is állapotként kezeljük:

$$x_I = \int_0^t y d\tau = \int_0^t Cx d\tau$$

Azaz

$$\dot{x}_I = Cx$$



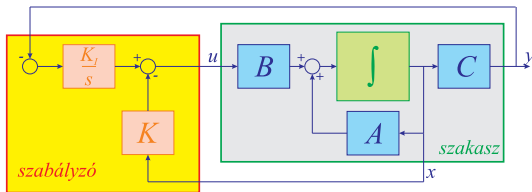
Bővített állapotegyenlet és visszacsatolás

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$

A terhelésbecslőhöz hasonlóan bevezethetjük a $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x & x_I \end{bmatrix}$ jelölést:

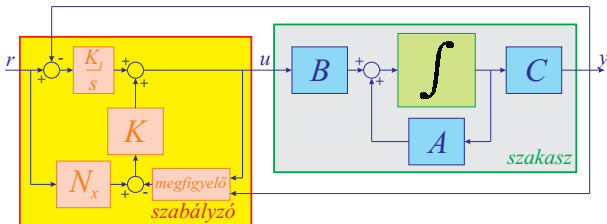
$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \quad y = \tilde{C}\tilde{x}$$



$$\begin{bmatrix} K & K_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{M}_c^{-1} \varphi_c(\tilde{A})$$



Integráló visszacsatolás megfigyelővel és alapjellel



Megfigyelő

Az eredeti rendszerhez tervezendő és $\hat{x}$ -t állítja elő.

Alapjel figyelembe vétele

Az eredeti rendszerhez tervezendő, de csak az N_x csatornát használjuk fel.

