## Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2009. november 6.

1. Az alábbi mátrixok közül mely(ek) normális(ak), melyek pozitív definit(ek)?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Határozzuk meg a következő mátrixok szinguláris értékeit:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Legyen $A$ egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix. Tegyük fel, hogy $A$ invertálható és $A^{-1}$ is nemnegatív elemű. Igazuljuk, hogy ekkor $A$ minden sorában és oszlopában pontosan egy pozitív elem áll.
4. Legyen $A$ egy valós elemű négyzetes mátrix, $\lambda$ pedig egy komplex sajátértéke $A$-nak. Igazoljuk, hogy ekkor $\overline{\lambda}$ (azaz $\lambda$ komplex konjugáltja) is sajátértéke $A$-nak.
5. Legyen $G$ egy $n > 1$ pontú egyszerű, hurokél-mentes, összefüggő irányítatlan gráf. Milyen összefüggés állítható $G$ adjacencia-mátrixának primitivitása és $G$ kromatikus száma között? ($G$ adjacencia-mátrixa az az $n \times n$-es $A = (a_{ij})$ mátrix, amelyre $a_{ij} = a_{ji} = 1$, ha $i$ és $j$ éllel össze van kötve, különben $a_{ij} = a_{ji} = 0$. $G$ kromatikus száma pedig az a legkisebb $k$ természetes szám, amelyre $G$ csúcsai színezhetők $k$ színnel úgy, hogy ne legyen két éllel összekötött azonos színű pont.)

# Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2010. november 8.

1. Hány megoldása van a kételemű test felett az

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1 \quad x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \quad x_2 + x_4 = 1 \quad x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \quad x_3 + x_5 = 1$$

   egyenletrendszernek?

2. Az alábbi mátrixok közül mely(ek) normálisak mely(ek) pozitív definit(ek)?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Moore-Penrose–féle pszeudoinverzét!

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Keressünk olyan $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax = b$ egyenlet a legkisebb (négyzetes) hibával teljesül, azaz az $Ax$ vektor az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos távolságát tekintve a lehető legközelebb esik a $b$ vektorhoz!

5. Határozzuk meg azokat $2 \times 2$-es nemnegatív elemű $A$ mátrixokat, amelyekre $A$ spektrálsugara 1 és az $A^k$ sorozat nem konvergens!

## Alkalmazott algebra pótzárthelyi, 2011. november 17.

1. Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Hét kalapunk van, mindegyikben legfeljebb 1 nyúllal. Minden egyes $i \in \{1, \ldots, 7\}$-re igaz az, hogy a nem az $i$-edik kalapban levő nyulak száma páros. Hányféleképpen lehetséges ez?
3. Határozzuk meg a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix Moore–Penrose-féle pszeudoinverzét!
4. Tegyük fel, hogy $C$ egy olyan $n \times n$-es nemnegatív elemű primitív mátrix, amelyre $C^3 = C$. Igazoljuk, hogy $C$ mindegyik eleme pozitív.
5. Van-e olyan $2 \times 2$-es valós $D$ mátrix, amelyre $\lim_{k\to\infty} D^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
6. Mi az $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 & 6 \\ 7 & 9 & 2 & 6 \\ 9 & 2 & 7 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ mátrix legnagyobb szinguláris értéke?

# Alkalmazott algebra zárthelyi, 2009. október 30.

1. Hány megoldása van a kételemű test felett a következő egyenletrendszernek?

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\
x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 1 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & & & = & 1 \\
x_1 & & & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 1 \\
 & & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 0
\end{array}$$

2. Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Mekkora lehet egy duplán sztochasztikus mátrix legnagyobb **szinguláris** értéke?
4. Legyen $A$ egy nemnegatív elemű négyzetes mátrix, amelyre $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy $A$ csak úgy lehet irreducibilis, ha $A$ minden eleme pozitív.
5. Legyen $A$ egy $m \times n$-es valós mátrix. Igazoljuk, hogy

$$\max_{v \in \mathbb{R}^n, |v|=1} |Av| = \sigma_1,$$

ahol $\sigma_1$ az $A$ mátrix legnagyobb szinguláris értéke!

6. Legyen $A$ egy $m \times n$-es valós mátrix. Legyen $B$ az az $(m+n) \times (m+n)$-es mátrix, amelynek bal felső $m \times m$-es, valamint jobb alsó $n \times n$ blokkja a csupa 0 mátrix, a bal alsó $n \times m$-es blokkja az $A^T$, jobb felső $m \times n$-es blokkja pedig az $A$ mátrix:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline A^T & 0 \end{array}\right).$$

Milyen összefüggés van $A$ szinguláris értékei és $B$ sajátértékei között?

## Alkalmazott algebra zárthelyi, 2010. október 29.

1. Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Az alábbi mátrixok közül mely(ek) reducibilis(ek), mely(ek) primitív(ek)?

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Mekkora a következő mátrixok legnagyobb szinguláris értéke?

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Keressünk olyan $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax = b$ egyenlet a legkisebb (négyzetes) hibával teljesül, azaz az $Ax$ vektor az $\mathbb{R}^3$ tér szokásos távolságát tekintve a lehető legközelebb esik a $b$ vektorhoz!

5. Tegyük fel, hogy $A$ egy olyan $n \times n$-es valós mátrix, hogy létezik $\lim_{k\to\infty} A^k$ és $\lim_{k\to\infty} A^k = I_n$, az $n \times n$-es egységmátrix Igazoljuk, hogy ekkor $A = I_n$.

6. Legyen $A$ egy nemnegatív valós elemű szimmetrikus mátrix. Igazoljuk, hogy $A$ akkor és csak akkor primitív, ha $A^2$ irreducibilis!

## Alkalmazott algebra zárthelyi, 2011. október 27.

1. Az alábbi mátrixok közül melyek normálisak, melyek pozitív definitek?
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. Az alábbi mátrixok közül melyek irreducibilisek, melyek primitívek?
$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Adjuk meg azt $x \in \mathbb{R}^2$ vektort, amelyre az $Ax$ távolsága a $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$ vektortól a lehető legkisebb, ahol $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Legyen $A$ egy $n \times n$-es komplex elemű mátrix és $B$ az $\begin{pmatrix} & A \\ A & \end{pmatrix}$ alakú $2n \times 2n$-es mátrix, ahol az üresen hagyott helyeken csupa 0 áll. Mi az összefüggés $A$ és $B$ sajátértékei között? (Multiplicitások vizsgálata nem része a feladatnak.)
5. Ketten (Ursula és Vilmos) fej-vagy-írást játszanak egy kiegyensúlyozott pénzérmével. Ha fej jön ki, Ursula nyer 1 forintot Vilmostól, ha írás, akkor fordítva. Mind Ursulának, mind Vilmosnak korlátlanul áll a rendelkezésére pénz. Bennünket Ursula nyereményének modulo $n$ vett maradéka érdekel, ahol $n > 2$ egész ($\ell$ forint veszteség $-\ell$ forint nyereségként értelmezendő, tehát például 1 forint veszteség maradéka $n-1$.) Milyen $n$-re konvergens Ursula modulo $n$ vett nyereményének az eloszlása és konvergencia esetén mi a határeloszlás? (Kezdetben természetesen a nyeremény 0.)
6. Jelölje $J_n$ azt az $n \times n$-es valós mátrixot, amelynek minden eleme 1, $I_n$ pedig az $n \times n$-es egységmátrixot. Mennyi a $J_n - I_n$ mátrix determinánsa? ($J_n - I_n$ főátlójában csupa 0 áll, azon kívül csupa 1.)