Vizsgadolgozat

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Írjuk fel az alábbi definíciót, illetve állítást:
   (a) Mit és milyen feltételek mellett mond ki a teljes valószínűség tétele?
   (b) Legyen (X, Y) együttesen folytonos valószínűségi vektorváltozó. Hogyan definiáljuk az Y-nak az X-re vett feltételes sűrűségfüggvényét?

   Megoldás:
   (a)
   Feltételek:
   (3 pont) $A_1, ..., A_n$ páronként kizáróak és uniójuk az Ω (vagy az is jó, ha azt írja, hogy teljes eseméynrendszert alkotnak)
   (2 pont) $\mathbb{P}(A_i) > 0$ minden i-re
   (5 pont) a hibátlan állítás
   (ha nincsenek határok a szummán -1 pont, rossz a feltételes vg, azaz $\mathbb{P}(A_i|B)$ szerepel $\mathbb{P}(B|A_i)$ helyett, akkor max 2 pont erre a részre)
   (jegyzet 2.2.4 állítás)

   (b)
   (8 pont)

   $$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, u)\mathrm{d}u},$$

   (2 pont) olyan $x, y \in \mathbb{R}$ számokra értelmezve, amire $f_X(x) \neq 0$, és $f_{Y|X}(y \mid x) = 0$ ha $f_X(x) = 0$.
   (jegyzet: 11.2.2)

2. Egy telefonfülkéből szeretnénk hívást indítani, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Tegyük fel, hogy az illető telefonbeszélgetésének időtartama percben mérve folytonos, örökifjú eloszlású 3 várható értékkel.

   (a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés összesen 6 percnél tovább tart, feltéve, hogy már több, mint 4 perce beszél az illető?

   (b) Ha t ideig kell várakoznunk, akkor elégedettségünk $10 \cdot e^{-t}$. Mennyi a valószínűsége, hogy elégedettségünk 5 alá csökken? Várhatóan mennyire leszünk elégedettek?

   Megoldás:
   (0 pont) Legyen X a telefonbeszélgetés időtartama
   (1 pont) X folytonos és örökifjú, ezért $X \sim Exp(\lambda)$ valamilyen $\lambda > 0$ paraméterrel
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 3$, ezért $\lambda = \frac{1}{3}$

   (a)
   (2 pont) $\mathbb{P}(X > t+2 | X > t) = \mathbb{P}(X > 2)$ az örökifjúság miatt
   (2 pont) $\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - F_X(2)$
   (2 pont) $= e^{-2/3} \approx 0{,}5134$

   (b)
   (0 pont) Jelölje Y az elégedettségünket
   (1 pont) $Y = 10 \cdot e^{-X}$
   (2 pont) $\mathbb{P}(Y < 5) = \mathbb{P}\left(10 \cdot e^{-X} < 5\right) = \mathbb{P}\left(e^{-X} < 0.5\right) = \mathbb{P}(X > -\ln 0.5)$
   (2 pont) $= 1 - F_X(-\ln 0.5) = e^{-(-\ln 0.5)/3}$
   (1 pont) $= 0.5^{\frac{1}{3}} \approx 0{,}7937$

   (2 pont) $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, \mathrm{d}x$
   (2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(10 \cdot e^{-X}) = \int_0^{\infty} 10 \cdot e^{-x} \cdot \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, \mathrm{d}x$
   (0 pont) $= \int_0^{\infty} \frac{10}{3} e^{-\frac{4}{3}x}\, \mathrm{d}x$
   (1 pont) $= \left[\frac{10}{3}(-\frac{3}{4}) e^{-\frac{4}{3}x}\right]_0^{\infty}$
   (1 pont) $= \frac{10}{4} = 2.5$

3. Egy vizsgán 60 kérdésre kell válaszolni, minden kérdés esetén négy lehetséges válasz közül lehet választani, melyekből pontosan egy helyes. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó minden előzetes tudás nélkül tölti ki a sort, és minden egyes kérdésnél függetlenül és véletlenszerűen tippeli meg a választ.
   Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy több, mint 20 helyes választ ad így?
   Mennyire változik ez a valószínűség, ha minden kérdésnél a négy lehetséges válaszból egyet ki tud zárni? (A maradék három közül továbbra is véletlenszerűen választ.)

   Megoldás:
   (0 pont) Jelölje X a helyes válaszok számát
   (3 pont) $X \sim B\left(60; \dfrac{1}{4}\right)$
   (1 pont) $\mathbb{E}(X) = 60 \cdot \dfrac{1}{4} = 15$
   (1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{60 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}3541$
   (0 pont) A kérdés $\mathbb{P}(X > 20) = ?$
   (2 pont) sztenderdizálunk

$$\mathbb{P}\left(\frac{X-15}{3\sqrt{5}/2} > \frac{20-15}{3\sqrt{5}/2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X-15}{3\sqrt{5}/2} > \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$$

(2 pont) A de Moivre–Laplace-tétel szerint

(2 pont) $\dfrac{X-15}{3\sqrt{5}/2}$ közelítőleg standard normális eloszlású.

(2 pont) Tehát a keresett mennyiség: $1-\Phi\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)=1-\Phi(1{,}4907)$

(1 pont) $\approx 1-\Phi(1.49)=1-0{,}9319=0{,}0681$

(2 pont) ha egy választ ki tud minden kérdésnél zárni, akkor $X\sim B\left(60;\dfrac{1}{3}\right)$

(1 pont) $\mathbb{E}(X)=60\cdot\dfrac{1}{3}=20$

(3 pont) ezért standardizálás után a keresett valószínűség éppen $1-\Phi(0)=0.5$

4. Legyenek X és Y valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy az X-nek az Y-ra vett lineáris regressziója $\frac{3}{2}Y+2$, míg az Y-nak az X-re vett lineáris regressziója $\frac{1}{2}X-1$. Határozzuk meg az X és Y változók várható értékét, valamint a két változó korrelációs együtthatóját.

Megoldás:

(2 pont) Az X-nek az Y-ra vett lineáris regressziója $\beta_1 Y+\alpha_1$, ahol

$$\beta_1=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(Y)}=\frac{3}{2},\qquad \alpha_1=\mathbb{E}(X)-\beta_1\,\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)-\frac{3}{2}\,\mathbb{E}(Y)=2,$$

(2 pont) míg az Y-nak az X-re vett lineáris regressziója $\beta_2 X+\alpha_2$

$$\beta_2=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}^2(X)}=\frac{1}{2},\qquad \alpha_2=\mathbb{E}(Y)-\beta_2\,\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)-\frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X)=-1,$$

(2 pont) ezekből a következő megoldandó egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)-\frac{3}{2}\,\mathbb{E}(Y)&=2,\\ \mathbb{E}(Y)-\frac{1}{2}\,\mathbb{E}(X)&=-1.\end{aligned}$$

(1 pont) (az első egyenlet felét a másodikhoz hozzáadva) $\frac{1}{4}\,\mathbb{E}(Y)=0$

(1 pont) azaz $\mathbb{E}(Y)=0$

(2 pont) így az első egyenletből $\mathbb{E}(X)-\frac{3}{2}\,\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)=2$.

(2 pont) $\operatorname{corr}(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\,\mathbb{D}(Y)}$

(2 pont) $\operatorname{corr}(X,Y)=\beta_2\cdot\frac{\mathbb{D}(X)}{\mathbb{D}(Y)}$

(2 pont) mivel $\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\mathbb{D}^2(X)}{\mathbb{D}^2(Y)}$

(2 pont) ezért $\frac{\mathbb{D}(X)}{\mathbb{D}(Y)}=\sqrt{3}$

(2 pont) $\operatorname{corr}(X,Y)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0.8660$ (ha a tizedestört nincs ott, akkor is jár a pont)

5. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\alpha(x+y+x^2y) & \text{ha } 0<x<1 \text{ és } 0<y<1\\[2ex] 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

valamilyen $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén.

(a) Határozzuk meg az α értékét, valamint az $\mathbb{E}(Y)$ várható értékét.

(b) Határozzuk meg a $\mathbb{P}(X^2 < Y)$ valószínűséget.

Megoldás:
(a)
(2 pont) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$
(2 pont) Tehát $1 = \int_0^1\int_0^1 \alpha(x+y+x^2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}y\right)\,\mathrm{d}y = \frac{7}{6}$
(1 pont) $\alpha = \frac{6}{7}$
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
(2 pont) $= \int_0^1\int_0^1 y\cdot\frac{6}{7}(x+y+x^2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}y+\frac{4}{3}y^2\right)\,\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \frac{25}{42}$

(b)
(2 pont) $H\subseteq\mathbb{R}^2$ esetén $\mathbb{P}((X,Y)\in H) = \int\int_H f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
(1 pont) Legyen $H = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2 < y\}$. (Ha a H definíciója implicit jelenik meg az előző állítás felhasználásakor, szintén jár a pont.)
(3 pont) Mivel f csak ott nem-nulla, ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$, ezért

$$\mathbb{P}(X^2 < Y) = \int_H f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_{x^2}^1 \frac{6}{7}(x+y+x^2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

vagy

$$\mathbb{P}(X^2 < Y) = \int_H f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} \frac{6}{7}(x+y+x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(3 pont) az integrálás helyes elvégzése

pédául a második választásakor

$$= \int_0^1\left[\frac{6}{7}\left(\frac{x^2}{2}+yx+\frac{x^3y}{3}\right)\right]_0^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \int_0^1\frac{6}{7}\left(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}+\frac{y^2\sqrt{y}}{3}\right)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{6}{7}\left(\frac{y^2}{4}+\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+\frac{y^{\frac{7}{2}}}{3\cdot\frac{7}{2}}\right)\right]_0^1 =$$

(1 pont) 0.6388

6.* Egy réten $N \geq 1$ szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva N vadász lopakodik a tisztáshoz, és egyszerre tüzelnek a vadakra. Mindegyik lövés talál, és halálos. (Elvileg több vadász is lőhet ugyanabba a szarvasba, és mindegyik lövés minden szarvast azonos valószínűséggel talál el.)
a) Milyen valószínűséggel marad életben egy adott szarvas?
b) Mennyi az életben maradó szarvasok számának várható értéke?

Megoldás:
a) (5 pont)
Minden lövés egymástól függetlenül $\frac{N-1}{N}$ valószínűséggel találja el az adott szarvast, mert a vadászok függetlenül céloznak és mindegyik lövés minden szarvast azonos valószínűséggel talál el. Tehát a kérdezett valószínűség: $\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N$

Csak helyes indoklással fogadható el a végeredmény!
b) (15 pont)
Jelölje A_i azt az eseményt, hogy az i-edik szarvas életben marad $i = 1..N$
A kérdezett várható érték $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}\left(A_i\right) = N\cdot\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N$
Csak helyes indoklással fogadható el a végeredmény!
Ha azt írja, hogy binomiális az eltalált szarvasok száma, akkor automatikusan 0 pont!