A Számítástudomány alapjai

MÁSODIK ZH pótlása 2012. XII. 12. 10^{15}

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc.
Kérjük, minden résztvevő **nevét** és **NEPTUN kódját** a dolgozat minden lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel, mert ennek hiányában a dolgozatot nem értékeljük. Írószeren és összetűzött papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés. Mobiltelefon **még kikapcsolt állapotban sem** lehet a padon vagy a hallgató kezében. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése: 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy a $2n$ pontú G gráf n-szeresen összefüggő. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van Hamilton köre?

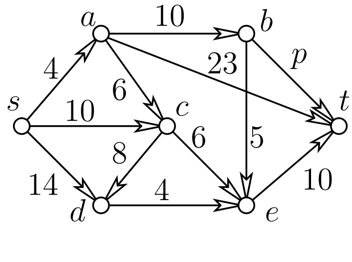
2. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st-vágáshoz.

3. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyszerű G páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy $d(a_i) \geq i$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Igazoljuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás.

4. Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7, v_8$ a G gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen v_i és v_j között él, ha $i^2 - 1$-nek és $j^2 - 1$-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, síkbarajzolható-e G.

5. Legyenek a G_n egyszerű gráf csúcsai az (i, j) számpárok, ahol i és j 1 és n közötti egészek. A G gráf (i, j) és (k, l) egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha $i = k$ vagy $j = l$. Rajzoljuk le G_3 egy áttekinthető diagramját, valamint, vatározzuk meg G_3 kromatikus számát, $\chi(G)$-t.

6. Állapítsuk meg, hogy az ábrán látható PERT problémában legfeljebb mennyi lehet a p paraméter értéke ahhoz, hogy a teljes feladat végrehajtható legyen 42 időegység alatt.



Jó munkát!

A Számítástudomány alapjai

2. ppZH javítókulcs (2012.12.12.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a $2n$ pontú G gráf n-szeresen összefüggő. Igaz-e, hogy G-nek bizonyosan van Hamilton köre?

   Ha a G gráf n-szeresen összefüggő, akkor bármely csúcsának fokszáma legalább n, hiszen egy csúcsnak kevesebb szomszédja lenne, akkor e szomszédok elhagyásával keletkező izolált ponton kívül még lenne más komponense is a maradék gráfnak. (4 pont)
   Dirac tétele szerint ha egy $2n$ pontú G gráfban minden csúcs fokszáma legalább n, akkor van G-ben Hamilton kör. (3 pont)
   Mivel a megfigyelésünk értelmében G rendelkezik a Dirac tételben megkövetelt tulajdonsággal, G-nek bizonyosan van Hamilton köre. (3 pont)

2. Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st-vágáshoz.

   Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy a C kör uv éle egy minimális kapacitású st-vágáshoz tartozik. Legyen X az az s-t tartalmazó, t-t elkerülő ponthalmaz, ami ezt a minimális kapacitású vágást meghatározza. (2 pont)
   Az órán tanultak miatt ha f maximális nagyságú folyam, akkor minden X-ből $V(G) \setminus X$-be futó e él telített, azaz $f(e) = c(e)$ teljesül, míg egyetlen $V(G) \setminus X$-ből X-be futó e' él sem hordoz folyamot, azaz $f(e') = 0$. (4 pont)
   Mivel a C irányított körnek van a vágáshoz tartozó, azaz$X$-ből $V(G) \setminus X$-be futó éle, ezért kell lennie a C körnek olyan g élének is, ami $V(G) \setminus X$-ből X-be fut. (2 pont)
   A feladatbeli feltevés szerint a g élen is pozitív nagyságú folyam folyik, ez pedig ellentmond f maximalitásának. (1 pont)
   A kapott ellentmondás igazolja a feladatban megfogalmazott állítást. (1 pont)

3. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyszerű G páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy $d(a_i) \geq i$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Igazoljuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás.

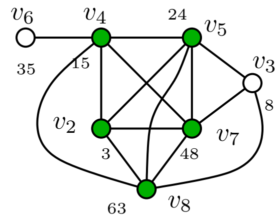
   A Hall tétel szerint pontosan akkor van A-t fedő párosítás G-ben, ha az A tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$ teljesül. (3 pont)
   Legyen tehát $X \subseteq A$, tegyük fel, hogy $|X| = k$. Ekkor van X-nek olyan a_i eleme, amire $i \geq k$ teljesül, hisz ha nem volna ilyen, akkor X-nek legfeljebb csak $k - 1$ eleme lehetne. (3 pont)
   Márpedig $|N(X)| \geq d(a_i) \geq i \geq k = |X|$, tehát a Hall feltétel valóban teljesül, (3 pont)
   van G-nek A-t fedő párosítása. (1 pont)

   Avagy:

   Az a feladatunk, hogy A minden a_i csúcsának találjunk egy-egy páronként különböző szomszédot. (1 pont)
   Ezt mohón végezzük, sorra keresünk szomszédot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ csúcsoknak. (2 pont)
   Mivel $d(a_1) \geq 1$, ezért a_1-nek található pár. (1 pont)
   Ha már találtunk párt az $a_1, a_2, \ldots, a_i$ csúcsoknak, akkor a_{i+1} szomszlédai közül legfeljebb i olyan van, amit nem választhatunk a_{i+1} szomszédjának. (2 pont)
   Mivel $d(a_{i+1}) \geq i + 1$, ezért bizonyosan van a_{i+1}-nek olyan szomszédja, amelyet még eddig nem

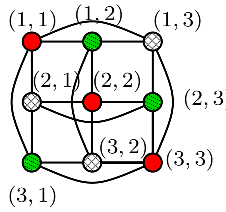
választottunk ki korábban. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy a mohó sorrendben dolgozva A minden csúcsának találunk párt, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

4. Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7, v_8$ a G gráf csúcsai, és pontosan akkor legyen v_i és v_j között él, ha i^2-1-nek és j^2-1-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, valamint döntsük el, síkbarajzolható-e G.



A mellékelt ábra G egy áttekinthetőnek szánt diagramját mutatja, a v_i csúcsnál az i^2-1 érték is szerepel, kisebb számokkal. (4 pont)
Könnyen látható, hogy a kijelölt csúcsok G-ben egy K_5 részgráfot feszítenek. (4 pont)
Mivel K_5 nem síkbarajzolható, ezért G sem lehet az. (2 pont)

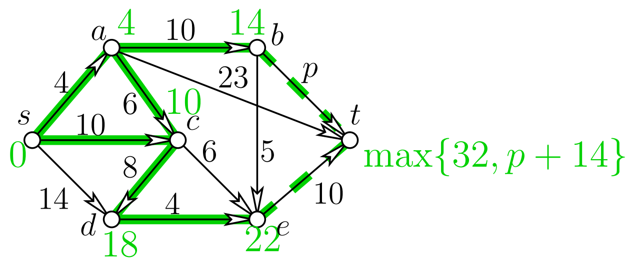
5. Legyenek a G_n egyszerű gráf csúcsai az (i,j) számpárok, ahol i és j 1 és n közötti egészek. A G gráf (i,j) és (k,l) egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha $i=k$ vagy $j=l$. Rajzoljuk le G_3 egy áttekinthető diagramját, valamint, vatározzuk meg G_3 kromatikus számát, $\chi(G)$-t.



A mellékelt ábra G_3 egy áttekinthetőnek szánt diagramját mutatja. (4 pont)
Mivel az $(1,1),(1,2)$ és $(1,3)$ csúcsok páronként szomszédosak, ezért $\chi(G_3 \geq \omega(G_3) \geq 3$. (3 pont)
Az ábrán látható G_3 egy 3-színezése, tehát $\chi(G_3)=3$ (3 pont)

6. Állapítsuk meg, hogy az ábrán látható PERT problémában legfeljebb mennyi lehet a p paraméter értéke ahhoz, hogy a teljes feladat végrehajtható legyen 42 időegység alatt.

A megadott gráf csúcsainak s, a, c, d, b, e, t egy topologikus sorrendje, így ebben a sorrendben állapítjuk meg az órán tanult módszer szerint a legkorábbi kezdési időket. (4 pont)



Ezeket az időket az egyes csúcsoknál jeleztük, valamint minden egyes csúcsnál megvastatítottuk azt (vagy azokat) az adott csúcsba befutó éleket, amelyek miatt az adott tevékenység nem kezdődhet hamarabb. (3 pont)
Az adódott, hogy a feladatot minimális végrehajtási ideje $t=\max\{32, p+14\}$. Ha tehát $p \leq 28$, akkor a feladat végrehajtható 42 időegység alatt, ha $p > 28$, akkor pedig nem. (3 pont)