3. Vizsgazárthelyi

2010/11 tél A3

1. Adja meg az $y'' - 4y' + 4y = x^2$ általános megoldását Laplace-transzformáció nélkül!

2. Legyen $m > 0$ és K a háromdimenziós térben az a $z = m$ síkban elhelyezkedő R sugarú felfelé irányított körlap, melynek középpontja a z tengelyen van. Számítsa ki a $v(r) = r$ $(r \in \mathbb{R}^3)$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját K-n!

3. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai (ilyen irányítással) a (4,0,0), (0,4,0), (-4,0,0) pontok az $[x\,y]$ síkban. Legyen $v(x, y, z) = (x^2 - 4y,\ y^2 + 6x,\ 2z)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját H–n!

4. Legyen f mindenütt reguláris függvény és

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} \quad \text{ha} \quad z \neq 0.$$

$f(0) = ?$, $f'(0) = ?$, $f''(0) = ?$

5. Legyen $n \geq 0$ egész. Adja meg n függvényében az

$$I(n) = \int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^n}\, dz$$

integrál értékét!

6. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ egyszeresen öszefüggő nyílt és $v : H \to \mathbb{R}^3$ tetszőleges H-n folytonosan deriválható vektor-vektor függvény. Melyik igaz, melyik nem?

(a) Ha v-nek van skalárpotenciálja H-n, akkor v-nek minden H-beli zárt görbementi integrálja 0.

(b) Ha v-nek H-beli görbementi integráljai függetlenek az integrálási úttól, akkor v-nek van skalárpotenciálja H-n és az itt mindenütt 0.

(c) Ha v-nek van skalárpotenciálja H-n, akkor v-nek H-beli görbementi integráljai függetlenek az integrálási úttól.

(d) Ha v minden H-beli zárt görbementi integrálja 0, akkor v-nek van skalárpotenciálja H-n.

(e) Ha v-nek H-beli görbementi integráljai függetlenek az integrálási úttól, akkor van olyan H-n értelmezett u skalárfüggvény, melynek gradiense v.

(f) Ha v-nek van skalárpotenciálja H-n, akkor $\operatorname{div} v = 0$ mindenütt H-n.

(g) Ha v-nek H-beli skalárpotenciálja u, akkor $\operatorname{rot} v$ minden H-beli zárt görbementi integrálja 0.

(h) Ha $\operatorname{rot} v = 0$ mindenütt H-n, akkor v-nek van skalárpotenciálja H-n.

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal 2010/11 tél A3

1. Adja meg az $y'' - 4y' + 4y = x^2$ általános megoldását Laplace-transzformáció nélkül!

MO. 1) A karakterisztikus polinomnak egyetlen kettős gyöke a $\lambda = 2$, így a homogén egyenlet általános megoldása: $y_{há} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. **2p**

2) Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y = Ax^2 + Bx + C$ alakban keressük hiszen az általános $x^m e^{ax}(p(x)\sin bx + q(x)\cos bx)$ alakban $a = 0$, $b = 0$, $p(x) = 0$, $q(x) = x^2$, így ($m = 0$ mivel az $a + bi = 0$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak):

$$x^m e^{ax}(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx) = Q(x) = Ax^2 + Bx + C. \qquad \mathbf{3p}$$

Ezzel tehát $y = Ax^2 + Bx + C$, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$,
amit az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy
$(2A - 4B + 4C) + (-8A + 4B)x + (4A - 1)x^2 = 0$ minden x-re $\rightsquigarrow$
$2A - 4B + 4C = -8A + 4B = 4A - 1 = 0 \rightsquigarrow$
$A = 1/4, B = 1/2, C = 3/8$ tehát az inhomogén egy partikuláris megoldása

$$y_{ip} = 1/4x^2 + 1/2x + 3/8, \qquad \mathbf{3p}$$

amivel az inhomogén általános megoldása:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}. \qquad \mathbf{2p}$$

10p

2. Legyen $m > 0$, és K a háromdimenziós térben az a $z = m$ síkban elhelyezkedő R sugarú felfelé irányított körlap, melynek középpontja a z tengelyen van. Számítsa ki a $v(r) = r$ $(r \in \mathbb{R}^3)$ vektor-vektor függvény felületmenti integrálját K-n!

MO. Legyen $n = k$ a körlap normálisa, v_n pedig v-nek n-re eső vetülete. Ekkor a körlapon mindenütt

$$v_n = m \text{ így } \int_K v\, df = \int_K v_n\, |df| = \int_K m\, |df| = \qquad \mathbf{6p}$$

$$= m \int_K |df| = m \cdot R^2\pi = R^2 m\,\pi. \qquad \mathbf{4p}$$

(Jelölések: $\int_F v\, df$ a v felületmenti, $\int_F v\,|df|$ a v felszín szerinti integrálja, és felhasználtuk, hogy, ha v_n a v-nek az F normálisára eső (skalár)vetülete, akkor $\int_F v\, df = \int_F v_n\,|df|$.)

VAGY : a körlap egyenlete: $r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, m)$, $(u \in [0, R],\ v \in [0, 2\pi]) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ r_u \times r_v = (0, 0, u)$, $v(r(u, v)) = r(u, v) = (u\cos v, u\sin v, m) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\ v(r(u, v)) \cdot r_u \times r_v = m\, u \rightsquigarrow \qquad \mathbf{6p}$$

$$= \int_K r\, df = \int_0^R \int_0^{2\pi} m\, u\, dv\, du = m\, 2\pi \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^R = m\, 2\pi\, \frac{R^2}{2} = R^2 m\,\pi. \qquad \mathbf{4p}$$

10p

3. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai (ilyen irányítással) a (4,0,0), (0,4,0), (-4,0,0) pontok az $[x\,y]$ síkban. Legyen $v(x, y, z) = (x^2 - 4y, y^2 + 6x, 2z)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját H-n!

MO. Jelölések: $\int_F v\, df$ a v felületmenti, $\int_F v\,|df|$ a v felszín szerinti integrálja, és felhasználjuk, hogy ha n az F normálisa és v_n a v-nek erre eső (skalár)vetülete, akkor $\int_F v\, df = \int_F v_n\,|df|$.

$$\operatorname{rot} v = \left(\tfrac{\partial v_2}{\partial x} - \tfrac{\partial v_1}{\partial y}\right)k = 10k, \qquad \mathbf{3p}$$

így Stokes tétellel (F a H által bezárt háromszöglap, $|F|$ pedig a felszíne):

$$\int_H v\, dr = \int_F \operatorname{rot} v\, df = \qquad \mathbf{3p}$$

$$= \int_F (\operatorname{rot} v)_k\, |df| = \int_F 10\, |df| = 10 \int_F |df| = 10|F| = 10 \cdot 16 = 160 \qquad \mathbf{4p}$$

10p

(Persze a vonalintegrál közvetlenül is kiszámítható.)

4. Legyen f mindenütt reguláris függvény és $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$ ha $z \neq 0$. $f(0) = ?$, $f'(0) = ?$, $f''(0) = ?$

MO. $\cos z$ Taylor–sora: $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} \mp \ldots \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} \mp \ldots \text{ minden } z \neq 0\text{-ra} \qquad \mathbf{4p}$$

és a jobboldal mindenütt konvergens hatványsor, azaz határfüggvénye mindenütt reguláris
és persze ez a sor nem más, mint határfüggvényének Taylor-sora $\rightsquigarrow$ **3p**

$$f(0) = -\tfrac{1}{2}, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}. \qquad \mathbf{3p}$$

10p

---

5. Legyen $n \geq 0$ egész. Adja meg n függvényében az $I(n) = \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^n}\, dz$ integrál értékét!

MO.

(a) $n = 0$ $\rightsquigarrow$ az integrandus reguláris $\rightsquigarrow$ $I(0) = 0$. **2p**

(b) $n = 1$ $\rightsquigarrow$ az integrandusnak az egyetlen, a körlapon levő szingularitásában, az origóban megszüntethető szakadása van $\rightsquigarrow$ $I(1) = 0$. **3p**

(c) $n > 1$.

e^z $z = 0$ körüli Taylor-sora: $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow f(z) = \frac{e^z - 1}{z^n} = \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{1}{2z^{n-2}} + \frac{1}{6z^{n-3}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!z} + \ldots \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \rightsquigarrow I(n) = \int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^n}\, dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}. \qquad \mathbf{5p}$$

10p

---

6. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^3$ egyszeresen öszefüggő nyílt és $v : H \to \mathbb{R}^3$, tetszőleges H-n folytonosan deriválható vektor-vektor függvény. Melyik igaz, melyik nem?

(a) Ha v-nek van skalárpotenciálja H-n, akkor v-nek minden H-beli zárt görbementi integrálja 0.
(b) Ha v-nek H-beli görbementi integráljai függetlenek az integrálási úttól, akkor v-nek van skalárpotenciálja H-n és az itt mindenütt 0.
(c) Ha v-nek van skalárpotenciálja H-n, akkor v-nek H-beli görbementi integráljai függetlenek az integrálási úttól.
(d) Ha v minden H-beli zárt görbementi integrálja 0, akkor v-nek van skalárpotenciálja H-n.
(e) Ha v-nek H-beli görbementi integráljai függetlenek az integrálási úttól, akkor van olyan H-n értelmezett u skalárfüggvény, melynek gradiense v.
(f) Ha v-nek van skalárpotenciálja H-n, akkor $\operatorname{div} v = 0$ mindenütt H-n.
(g) Ha v-nek H-beli skalárpotenciálja u, akkor $\operatorname{rot} v$ minden H-beli zárt görbementi integrálja 0.
(h) Ha $\operatorname{rot} v = 0$ mindenütt H-n, akkor v-nek van skalárpotenciálja H-n.

MO.

(a) igaz **1p**
(b) nem igaz (mert nem okvetlenül 0) **1p**
(c) igaz **1p**
(d) igaz **1p**
(e) igaz **1p**
(f) nem igaz: $\operatorname{div} r = 3$ **2p**
(g) igaz, mert a $\operatorname{rot} v = 0$ **2p**
(h) igaz **1p**

10p