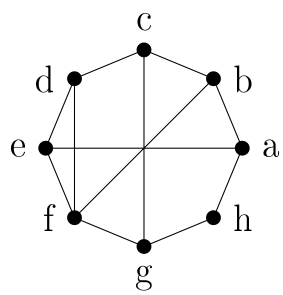
**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**1. zh, 2017.03.16.**

**1.** Kukutyinban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol ábécé 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Három karakternek betűnek, háromnak pedig számnak kell lennie, ezen kívül az egyetlen kikötés, hogy ha három betű áll egymás mellett, akkor azok nem lehetnek egyformák (jó rendszám például 37AAG1, de nem jó ABCD85 és 35HHH2). Hányféle rendszám adható meg Kukutyinban? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

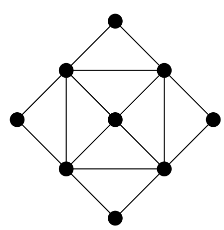
**2.** Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

**3.** Egy 100 csúcsú $G$ összefüggő gráf éleit az 1 és 2 súlyokkal súlyoztuk úgy, hogy az 1 súlyú élek részgráfja (vagyis az a gráf, melynek csúcsai azonosak $G$ csúcsaival, de csak $G$ 1 súlyú éleit tartalmazza) 7 komponensből áll. Határozzuk meg $G$ egy minimális összsúlyú feszítőfájának súlyát.

**4.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.




**5.** Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton-köre, illetve Hamilton-útja.



**6*.** Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 8. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan 20 élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája.

**Minden feladat 10 pontot ér, beleértve a csillagos feladatot is. A csillagos feladatért kapott pontok ugyanúgy beszámítanak a zh pontszámába, mint a többi feladatért kapott pontok. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a Neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét. Jó munkát!**

**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**2. zh, 2017.04.20.**

**1.** Egy egyszerű gráfban pontosan egy páratlan kör van. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

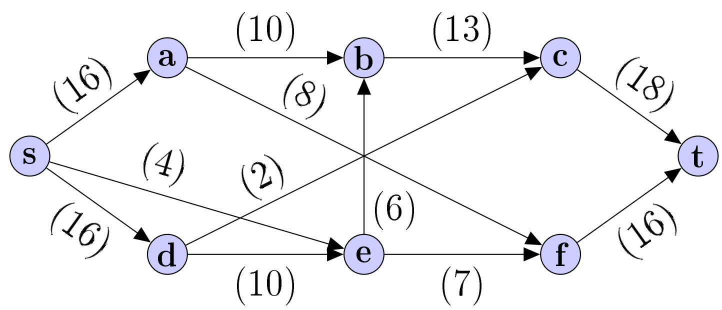
**2.** Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 6 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

**3.** Egy páros gráfban a két pontosztály legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \leq i \leq 8$ és $1 \leq j \leq 8$ esetén $a_i$ akkor legyen szomszédos $b_j$-vel, ha a jobbra látható mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg a gráfban egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**4.** A VIK-es gólyabálon 12 lány és 198 fiú vesz részt. A szervezők így 12 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz úgy, hogy mindenki ismerőssel táncoljon. Minden lány legalább 11 fiút ismer, a fiúk közül viszont mindenki legfeljebb 11 lányt ismer (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 12 párt?

**5.** Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális $s$-$t$ vágást.




**6*.** Egy 10 csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan $k$ számot, melyre a gráf biztosan $k$-szorosan pontösszefüggő.

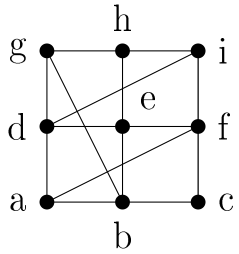
**Minden feladat 10 pontot ér, beleértve a csillagos feladatot is. A csillagos feladatért kapott pontok ugyanúgy beszámítanak a zh pontszámába, mint a többi feladatért kapott pontok. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a Neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét. Jó munkát!**

**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**pótzárthelyi**
**ELSŐ zh pótlása, 2017.05.08.**

**1.** Kukutyinban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol ábécé 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Az `Y` betű legfeljebb egyszer szerepelhet a rendszámban, ezen kívül más kikötés nincs. Hányféle rendszám adható meg Kukutyinban? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

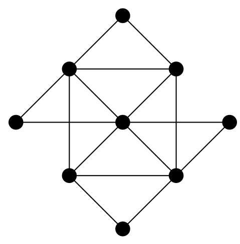
**2.** Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

**3.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.




**4.** Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 6. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan egy élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája.

**5.** Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton-köre, illetve Hamilton-útja.



**6*.** Egy húsz csúcsú, egyszerű gráfban minden fok legalább 9. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egy élet úgy, hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton-útja.

**Minden feladat 10 pontot ér, beleértve a csillagos feladatot is. A csillagos feladatért kapott pontok ugyanúgy beszámítanak a zh pontszámába, mint a többi feladatért kapott pontok. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a Neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét. Jó munkát!**

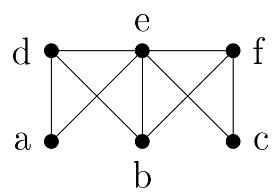
**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**pótzárthelyi**
**MÁSODIK zh pótlása, 2017.05.08.**

**1.** Egy 99 csúcsú egyszerű gráfban két csúcs foka 3, a többi csúcs foka 4. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van páratlan köre.

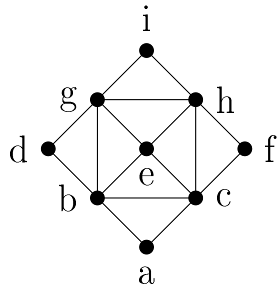
**2.** Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük két pontdiszjunkt 3 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

**3.** Az 5 csúcsú teljes gráf egy élét megduplázzuk (vagyis az élet két párhuzamos éllel helyettesítjük). Határozzuk meg a kapott gráf élkromatikus számát.

**4.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e.




**5.** Adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.




**6*.** 2035-ben a VIK-es gólyabálon 601 lány és 601 fiú vesz részt, mindenkinek legalább 300 ellenkező nemű ismerőse van (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze lehet-e állítani 601 olyan fiú-lány párt, ahol a párok tagjai ismerősök?

**Minden feladat 10 pontot ér, beleértve a csillagos feladatot is. A csillagos feladatért kapott pontok ugyanúgy beszámítanak a zh pontszámába, mint a többi feladatért kapott pontok. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a Neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét. Jó munkát!**

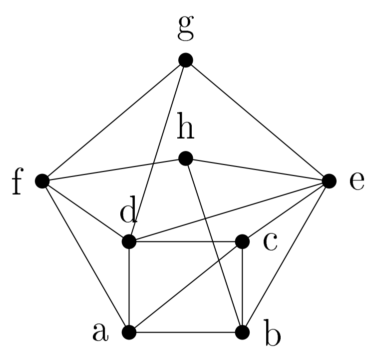
**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**aláíráspótló vizsga**
**ELSŐ zh pótlása, 2017.05.08.**

**1.** Hány olyan hétjegyű szám van, melyben a nyolcas számjegy pontosan háromszor fordul elő? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

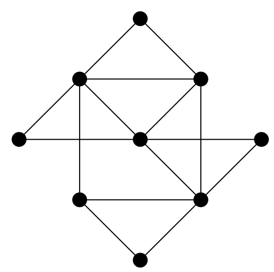
**2.** Egy 23 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 7. Mutassuk meg, hogy bárhogy választunk ki a gráf csúcsai közül hármat, lesz köztük két olyan, melyek között van a gráfban út.

**3.** Egy tíz csúcsú, egyszerű, összefüggő, élsúlyozott gráfban három él súlya 1, négy él súlya 2, a többi él súlya 3. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van olyan feszítőfája, melynek súlya legfeljebb 21.

**4.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.




**5.** Legalább hány élet kell az alábbi gráfhoz hozzávenni, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája?



**6*.** Egy húsz csúcsú, egyszerű gráfban és a komplementerében együtt is csak kétféle fokszám fordul elő. Tudjuk még, hogy a gráfban a tíznél kisebb fokú csúcsok klikket alkotnak. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van Hamilton-útja.

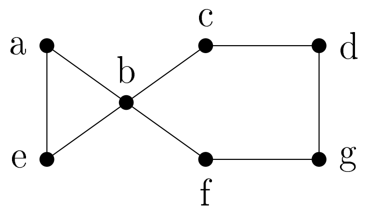
**Minden feladat 10 pontot ér, beleértve a csillagos feladatot is. A csillagos feladatért kapott pontok ugyanúgy beszámítanak a zh pontszámába, mint a többi feladatért kapott pontok. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a Neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét. Jó munkát!**

**Bevezetés a számításelméletbe II.**
**aláíráspótló vizsga**
**MÁSODIK zh pótlása, 2017.05.15.**

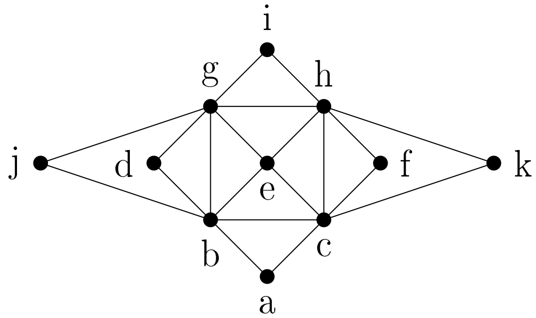
**1.** Egy 10 csúcsú teljes gráfból töröljük két olyan 3 csúcsú kör éleit, melyeknek pontosan egy közös csúcsa van. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

**2.** Az 5 csúcsú teljes gráf egy 5 hosszú körének minden élét megduplázzuk (vagyis az éleket két párhuzamos éllel helyettesítjük). Határozzuk meg a kapott gráf élkromatikus számát.

**3.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e.




**4.** Adjunk meg egy maximális párosítást az alábbi gráfban.




**5.** A 6 csúcsú teljes gráfból törlünk két nem csatlakozó élet. Határozzuk meg azt a legnagyobb $k$ számot, melyre a kapott gráf $k$-szorosan élösszefüggő.

**6*.** Egy 99 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka pontosan 6. Mutassuk meg, hogy a gráfnak legalább két páratlan köre van.

**Minden feladat 10 pontot ér, beleértve a csillagos feladatot is. A csillagos feladatért kapott pontok ugyanúgy beszámítanak a zh pontszámába, mint a többi feladatért kapott pontok. Részben helyes vagy nem teljes megoldásokért részpontszám adható, indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont. A dolgozatra mindenki írja rá a nevét, a Neptun-kódját és a gyakorlatvezetőjének a nevét. Jó munkát!**

**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok** — pontozási útmutató
2017. március 16.

**Általános alapelvek.**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

**1.** Kukutyinban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol ábécé 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Három karakternek betűnek, háromnak pedig számnak kell lennie, ezen kívül az egyetlen kikötés, hogy ha három betű áll egymás mellett, akkor azok nem lehetnek egyformák (jó rendszám például 37AAG1, de nem jó ABCD85 és 35HHH2). Hányféle rendszám adható meg Kukutyinban? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Döntsük el először, hogy melyik helyre kerül szám és melyikre betű. Ez $\binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 20$ módon lehetséges, hiszen a hat hely közül választjuk azt a hármat, ahova (mondjuk) betű kerül. (2 pont)
Ebből a 20 elrendezésből 4 olyan, melyben a három betű egymás mellett áll (1,2,3,; 2,3,4; 3,4,5; 4,5,6 helyek). (1 pont)
A maradék 16 elrendezés esetén további kikötés nincs, vagyis minden betűt 26-, minden számot 10-féleképp választhatunk. Az előadáson tanultak szerint, vagy a józan eszünket használva ez összesen $16 \cdot 26^3 \cdot 10^3$ lehetőséget jelent. (2 pont)
A 4 kellemetlenebb elrendezés esetén nem lehet a három betű azonos, a betűk tehát $(26^3 - 26)$-féleképp választhatók, hiszen az összes lehetőségek száma $26^3$, a három egyforma betűt pedig 26-féleképp választhatjuk. (1 pont)
A számok ekkor is $10^3$-féleképp választhatók, (1 pont)
ebben az esetben tehát összességében $4 \cdot (26^3 - 26) \cdot 10^3$ a lehetőségek száma. (1 pont)
Ahhoz, hogy a végeredményt megkapjuk, a két esetben (van, illetve nincs egymás mellett három betű) kapott lehetőségek számát össze kell adni, hiszen a két eset közül pontosan az egyik következik be. (1 pont)
A végeredmény tehát $16 \cdot 26^3 \cdot 10^3 + 4 \cdot (26^3 - 26) \cdot 10^3$. (1 pont)

Aki a binomiális együttható kiszámításáról semmit nem ír, attól vonjunk le 1 pontot, nem kell viszont levonni a köbreemelés részleteinek (pl. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10$) elhagyásáért.

**2.** Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 102 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző kör. (Két kör akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

* * * * *

Mivel a gráf összefüggő, van feszítőfája, legyen egy ilyen $F$. (2 pont)
$F$ 100 csúcsú fa, tehát 99 éle van. (1 pont)
Legyenek a gráf $F$-ben nem szereplő élei $e_1, e_2, e_3$. (2 pont)
Ekkor az $F$-hez $e_i$-t hozzávéve összefüggő, 100 élű gráfot kapunk, melyben a tanultak szerint kell legyen kör. (2 pont)
Mivel $e_i$ nem éle $F$-nek, az $F + e_i$ gráf körében nem szerepel $e_j$, ha $i \neq j$, így az $F + e_1$, $F + e_2$, $F + e_3$ gráfokban kapott körök különbözők, amivel a feladatot megoldottuk. (3 pont)

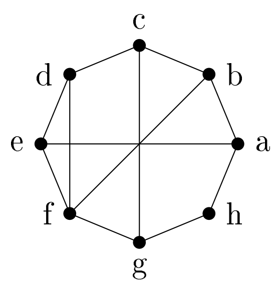
**3.** Egy 100 csúcsú $G$ összefüggő gráf éleit az 1 és 2 súlyokkal súlyoztuk úgy, hogy az 1 súlyú élek részgráfja (vagyis az a gráf, melynek csúcsai azonosak $G$ csúcsaival, de csak $G$ 1 súlyú éleit tartalmazza) 7 komponensből áll. Határozzuk meg $G$ egy minimális összsúlyú feszítőfájának súlyát.

* * * * *

Első megoldás. A Kruskal-algoritmus minimális összsúlyú feszítőfát talál, ezt fogjuk használni. Az algoritmus mindig az egyik legkisebb súlyú olyan élet veszi be a fába, ami a már bevettekkel nem alkot kört. Ezért a $G$ esetében addig fog 1 súlyú éleket bevenni, amíg létezik két olyan csúcs, amik aktuálisan különböző komponensben vannak és 1 súlyú él köti össze őket. (2 pont)
Amíg a bevett 1 súlyú élek 7-nél több komponenst alkotnak, lesz ilyen él, (2 pont)
vagyis az algoritmus az 1 súlyú élek által alkotott részgráf komponenseinek egy-egy (1 súlyú élekből álló) feszítőfáját találja meg a futás azon szakaszában, amikor 1 súlyú éleket vesz be (azt is meg lehet mondani, hogy ez hány lépést jelent: 93-at, de ezt ezen a ponton nem muszáj tudni). (3 pont)
A továbbiakban az algoritmus 2 súlyú éleket fog bevenni, mégpedig 6 darabot (hiszen annyi kell ahhoz, hogy az aktuálisan 7 komponensből álló erdőből fa legyen). (2 pont)
A feszítőfának 99 éle van, amiből 6 db súlya 2, a többié 1, így az összsúly 105. (1 pont)

Második megoldás. A feszítőfa (is) csak 1 és 2 súlyú élekből állhat, 2 súlyú élből pedig legalább 6 darabra van szükség, hiszen az összes 1-es élet felhasználva is 7 komponenst kapunk, (3 pont)
tehát bármely feszítőfa súlya legalább $100 - 1 + 6 = 105$. (1 pont)
Másrészt 6 darab 2 súlyú éllel tudunk feszítőfát gyártani. (1 pont)
Vegyük először az 1 súlyú élek komponenseinek egy-egy feszítőfáját. (2 pont)
Mivel az eredeti gráf összefüggő, az előadáson tanultak szerint ezt a 7 komponensű erdőt ki tudjuk egészíteni fává és ehhez 6 élre lesz szükség. (1 pont)
Az így kapott fa 99 élű és legfeljebb (igazából pontosan) 6 darab 2 súlyú élet tartalmaz, tehát a súlya legfeljebb 105. (1 pont)
Ezek alapján a minimális összúlyú feszítőfa súlya pontosan 105. (1 pont)

**4.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.

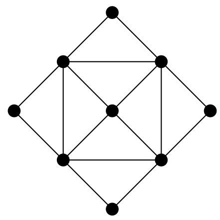



* * * * *

A gráf nem síkbarajzolható, mert van olyan részgráfja, ami topologikusan izomorf a $K_{3,3}$ gráffal. Az $a, c, f$ csúcsok alkotják a $K_{3,3}$ egyik osztályát, a $b, e, g$ csúcsok a másikat. Az $a$ és $g$ közti összeköttetés a $h$ csúcson keresztül, a $c$ és $e$ csúcsok közti összeköttetés a $d$ csúcson keresztül valósul meg (a többi összeköttetés közvetlen). (10 pont)

Ha valaki tudja, hogy mit kéne keresni, de (próbálkozások ellenére) nem találja, akkor (minőségtől függően) 1-3 pontot kapjon. Aki megállapítja, hogy $K_5$-öt nem érdemes keresni, az plusz 2 pontot kaphat. Aki azt figyeli meg, hogy a $h$ csúcsot elvéve és az $ag$ élet a gráfba berakva olyan gráfot kapunk, ami pontosan akkor síkbarajzolható, ha az eredeti is az volt, szintén kaphat 2 plusz pontot. Ennek a valamivel gyengébb verziójáért, miszerint a $h$ csúcs biztosan nem lesz a $K_{3,3}$ csúcsai közt, szintén járhat 1 plusz pont.

**5.** Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton-köre, illetve Hamilton-útja.



* * * * *

Hamilton-útja van a gráfnak, egy ilyen megadásáért 2 pont jár.
Hamilton-kör viszont nincs, mert a 4 darab 5 fokú csúcsot elhagyva a gráf 5 komponensre esik szét, vagyis a gráf nem teljesíti az előadáson tanult szükséges feltételt. (8 pont)

Máshogy is meg lehet indokolni, hogy a gráfnak nincs Hamilton-köre, természetesen az is 8 pontot ér (ha jó). Aki tudja, hogy mit kéne keresni, de (próbálkozások ellenére) nem találja, az (minőségtől függően) 1-3 pontot kapjon.

**6*.** Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 8. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan 20 élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-körsétája.

* * * * *

A gráf komplementerében minden csúcs foka 11. (1 pont)
A komplementerre így teljesül a Dirac-tétel feltétele, vagyis hogy minden csúcs foka legalább a csúcsok számának fele. (1 pont)
Mivel a komplementer egyszerű gráf is, (1 pont)
így a Dirac-tétel szerint van Hamilton-köre. (1 pont)
E körnek egyetlen éle sem szerepel az eredeti gráfban, (1 pont)
vagyis ezeket a gráfhoz véve egyszerű gráfot kapunk, (1 pont)
melyben minden csúcs foka kettővel nagyobb az eredetinél, azaz 10. (1 pont)
A kapott gráfban minden fok páros és a gráf összefüggő (1 pont)
(hiszen tartalmaz Hamilton-kört, amit épp most raktunk bele), (1 pont)
így a tanult tétel szerint van Euler-körsétája. (1 pont)

**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Zárthelyi feladatok** — pontozási útmutató
2017. április 20.

**Általános alapelvek.**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

**1.** Egy egyszerű gráfban pontosan egy páratlan kör van. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát.

* * * * *

Mivel a gráfban (nevezzük $G$-nek) van páratlan kör, nem lehet páros gráf, (1 pont)
a kromatikus száma tehát legalább 3. (1 pont)
Hagyjunk el a páratlan körből egy $e$ élet és nevezzük a kapott gráfot $H$-nak. (1 pont)
$H$-ban már nincs páratlan kör, ezért páros gráf, (1 pont)
vagyis a kromatikus száma legfeljebb 2. (1 pont)
Tekintsük $H$-nak egy jó 2-színezését és tegyük vissza az $e$ élet, majd színezzük át $e$ egyik végpontját egy harmadik, új színre. (3 pont)
Így $G$-nek egy jó színezését kapjuk, vagyis $G$ kromatikus száma legfeljebb 3. (1 pont)
A kapott két becslésből adódik, hogy $G$ kromatikus száma pontosan 3. (1 pont)

**2.** Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük egy 6 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

Legyenek a 6 csúcsú kör csúcsai sorban $a, b, c, d, e, f$, a gráf maradék két csúcsa $g$ és $h$. Ekkor az $ab$, $cd$, $ef$ élek egyike sem szerepel $G$-ben, (1 pont)
így jó színezést kapunk, ha az $a$ és $b$ csúcsokat 1-esre, a $c$ és $d$ csúcsokat 2-esre, az $e$ és $f$ csúcsokat 3-asra, $g$-t 4-esre, $h$-t pedig 5-ösre színezzük. (3 pont)
A gráf kromatikus száma tehát legfeljebb 5. (1 pont)
Az $a, c, e, g, h$ csúcsok egy 5 csúcsú klikket alkotnak a gráfban, (3 pont)
ahonnan következik, hogy a kromatikus szám legalább 5. (1 pont)
A két becslésből adódik, hogy a kromatikus szám pontosan 5. (1 pont)

**3.** Egy páros gráfban a két pontosztály legyen $A = \{a_1, a_2, \dots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. Minden $1 \le i \le 8$ és $1 \le j \le 8$ esetén $a_i$ akkor legyen szomszédos $b_j$-vel, ha a jobbra látható mátrix $i$-edik sorának és $j$-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg a gráfban egy maximális párosítást és egy minimális lefogó csúcshalmazt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrix alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $a_1, a_3, a_6, b_1, b_3, b_7, b_8$ egy (7 elemű) lefogó ponthalmaz a páros gráfban, (3 pont)
mert a nem érintett sorok és oszlopok kereszteződésében minden elem 0. (1 pont)
Az $(a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_7), (a_5, b_8), (a_6, b_5), (a_7, b_3)$ élhalmaz egy (7 elemű) párosítás, (2 pont)
hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja. (1 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \le 7$, illetve $\nu(G) \ge 7$, ahonnan a $\nu(G) \le \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 7$ és így a megadott párosítás maximális, a megadott lefogó ponthalmaz pedig minimális. (3 pont)

Megjegyzés. A maximális párosítást és a minimális lefogó ponthalmazt természetesen érdemes az előadáson tanult algoritmussal keresni; azonban (ahogy az a fentiekből is látszik) egy teljes értékű megoldáshoz nem feltétlenül szükséges (bár az esetleges hibák miatt mégis célszerű) ennek a lépéseit dokumentálni.

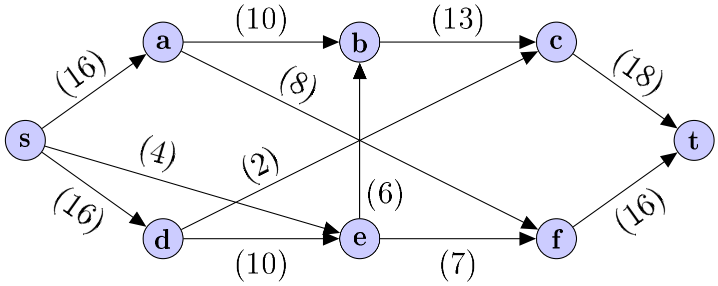
A második és a negyedik részpontszámnál persze máshogy is indokolhatunk, sőt aki (a dolgozatban) meggyőzően demonstrálja, hogy érti, hogy miért lefogó a ponthalmaz, illetve független az élhalmaz, az megkaphatja a pontokat.

**4.** A VIK-es gólyabálon 12 lány és 198 fiú vesz részt. A szervezők így 12 (fiú-lány) párt szeretnének összeállítani a nyitótánchoz úgy, hogy mindenki ismerőssel táncoljon. Minden lány legalább 11 fiút ismer, a fiúk közül viszont mindenki legfeljebb 11 lányt ismer (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze tudják-e állítani a szervezők a 12 párt?

* * * * *

Legyen $L$ a lányok, $F$ a fiúk halmaza és legyen $G$ az a páros gráf, melynek $L$ és $F$ az osztályai, két csúcs között pedig akkor vezessen él, ha a megfelelő fiú és lány ismeri egymást. A feladat annak eldöntésével ekvivalens, hogy ebben a páros gráfban van-e $L$-et fedő párosítás. (1 pont)
A Hall-tétel szerint ehhez elég azt belátni, hogy minden $X \subseteq L$ esetén $|N(X)| \ge |X|$. (1 pont)
Ha $1 \le |X| \le 11$, akkor ez teljesül, hiszen minden $L$-beli csúcs foka legalább 11, így $N(X)$ mérete is legalább 11 (a feltétel persze $|X| = 0$ esetén is teljesül; e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (2 pont)
Az $|X| = 12$, vagyis $X = L$ esetet kell még ellenőriznünk. (1 pont)
Világos, hogy $|N(L)| \ge 11$, ahhoz tehát, hogy a Hall-feltétel ne teljesüljön, az kéne, hogy $|N(L)| = 11$ legyen. (1 pont)
Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha $L$-ben minden csúcs foka pontosan 11 és mind a 12 $L$-beli csúcs ugyanazzal a 11 $F$-belivel van összekötve. (2 pont)
Ekkor azonban ezen 11 $F$-beli csúcs foka 12 lenne, ami a megadott feltétel szerint lehetetlen, tehát van $L$-et fedő párosítás. (2 pont)

**5.** Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális $s$-$t$ vágást.




* * * * *

Tekintsük a következő $f$ folyamot: $f(sa) = 16, f(se) = 4, f(sd) = 10, f(ab) = 8, f(af) = 8, f(bc) = 13, f(ct) = 15, f(dc) = 2, f(de) = 8, f(eb) = 5, f(ef) = 7, f(ft) = 15$. (3 pont)
Az $f$ folyam értéke 30. (1 pont)
Tekintsük most az $s, a, b, d, e$ csúcsok által meghatározott vágást. (2 pont)
Ennek kapacitása az $af, dc, bc, ef$ élek összkapacitása, azaz szintén 30. (1 pont)
Tudjuk, hogy bármely folyam értéke legfeljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, (1 pont)
így a 30 értékű vágás bizonyítja, hogy a megadott folyam maximális, (1 pont)
a 30 értékű folyam pedig bizonyítja, hogy a megadott vágás minimális. (1 pont)

A vágás kapacitásának kiszámításáért akkor jár a pont, ha kiderül, hogy mely élek milyen adatait kellett összeadni ahhoz, hogy kijöjjön a 30-as érték. Az utolsó 3 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (Például „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" önmagában nem érdemi indoklás.) A folyam maximalitása mellett természetesen lehet úgy is érvelni, hogy a 30 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. A javítóutas algoritmus helyes alkalmazásáért akkor is komoly részpontszámok adhatók, ha a végeredmény nem helyes (persze győződjünk meg róla, hogy nem elvi hibáról van szó). Nem jár érdemi pontszám ugyanakkor találomra vett folyamok és/vagy vágások keresgéléséért, ha ez nem vezet eredményre.

**6*.** Egy 10 csúcsú egyszerű gráfnak 40 éle van. Határozzuk meg a legnagyobb olyan $k$ számot, melyre a gráf biztosan $k$-szorosan pontösszefüggő.

* * * * *

A 10 csúcsú teljes gráfnak 45 éle van, így a mi gráfunkat (hívjuk $G$-nek) a teljes gráfból 5 él elhagyásával kapjuk. (1 pont)
A $K_{10}$ gráfban bármely két $u, v$ csúcs között van 9 (belsőleg) pontdiszjunkt út: (1 pont)
az $uv$ élen kívül a maradék 8 csúcs bármelyikén keresztül vezet egy két élű út $u$ és $v$ között. (2 pont)
Az 5 él elhagyása ebből a 9 útból legfeljebb 5-öt érint (hiszen persze semelyik kettőnek nincs közös éle), (2 pont)
vagyis $G$-ben bármely két csúcs közt vezet 4 pontdiszjunkt út, (1 pont)
így $G$ Menger vonatkozó tétele szerint 4-szeresen pontösszefüggő (ehhez még az is kell, hogy legyen legalább 5 csúcsa, ami persze teljesül; e megállapítás hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Mivel az 5 elhagyott él csatlakozhat ugyanahhoz a csúcshoz, elképzelhető, hogy $G$-nek van 4 fokú csúcsa, ekkor $G$ 5-szörösen már nem lehet pontösszefüggő (hiszen a 4 fokú csúcs szomszédait elhagyva $G$ szétesik), (1 pont)
így a keresett maximum 4. (1 pont)

A 4-összefüggőség mellett érvelhetünk a következőképp is: ha $G$ nem 4-összefüggő, akkor el tudunk hagyni 3 pontot úgy, hogy $G$ szétessen. (1 pont)
A 3 elhagyott pontra legfeljebb 24 él illeszkedik (legfeljebb 3 él megy köztük, és legfeljebb $3 \cdot 7$ belőlük a másik 7 csúcsba), (2 pont)
így a maradék (nem összefüggő) gráfnak legalább 16 éle van. (1 pont)

Ebből ellentmondásra fogunk jutni, mert egy 7 csúcsú, 16 élű egyszerű gráf mindig összefüggő: (1 pont) nyilván feltehetjük, hogy csak két komponense van, amelyek 1 és 6, 2 és 5, vagy 3 és 4 csúcsúak: egyik esetben sem kaphatunk 15-nél több élet (az első esetben 15, a másodikban 11, a harmadikban 9 él lehet legfeljebb a maradék gráfban). (3 pont)

**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Pótzárthelyi feladatok, első zh pótlása** — pontozási útmutató
2017. május 8.

**Általános alapelvek.**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

**1.** Kukutyinban a rendszámok hat karakterből állnak, minden karakter az angol ábécé 26 betűjének valamelyike vagy egy 0 és 9 közti számjegy. Az `Y` betű legfeljebb egyszer szerepelhet a rendszámban, ezen kívül más kikötés nincs. Hányféle rendszám adható meg Kukutyinban? (A végeredmény számszerű értékét nem kell megadni, azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, amely csak a négy alapműveletet ismeri.)

* * * * *

Ha az `Y` egyszer szerepel a rendszámban, akkor a helyét hatféleképp választhatjuk ki, (1 pont)
a maradék 5 helyre pedig helyenként 35-féleképp választhatunk, (1 pont)
vagyis az 5 helyre összesen $35^5$-féleképp (ismétléses variáció). (1 pont)
Olyan rendszám tehát, melyben az `Y` egyszer szerepel, összesen $6 \cdot 35^5$-féle van, (1 pont)
hiszen az `Y` 6 lehetséges helyének mindegyikéhez $35^5$ rendszám tartozik (és ezek persze mind különbözők). (1 pont)
Ha az `Y` nem szerepel a rendszámban, akkor minden karakter 35-féle lehet, (1 pont)
ilyen rendszám tehát $35^6$ van (ismétléses variáció). (1 pont)
A legfeljebb egy `Y`-t tartalmazó rendszámok száma ezek alapján $6 \cdot 35^5 + 35^6$, (2 pont)
hiszen a feltétel szerint az `Y` vagy egyszer vagy nullaszor szerepelhet a rendszámban (és a két lehetőség közül persze csak az egyik teljesülhet). (1 pont)

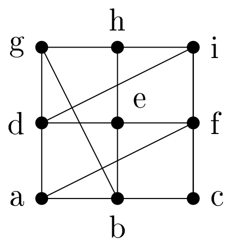
**2.** Egy 100 csúcsú összefüggő, egyszerű gráfnak 100 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor van a gráfban 3 páronként különböző feszítőfa. (Két feszítőfa akkor különböző, ha nem pontosan ugyanazon élek alkotják.)

* * * * *

Ha a 100 csúcsú gráf fa lenne, akkor 99 éle lenne, a gráfunk tehát nem fa, (1 pont)
így kell legyen köre, (2 pont)
mivel összefüggő. (1 pont)
Ha ebből a körből elhagyunk egy élet, akkor (az előadáson tanultak szerint) a gráf összefüggő marad, (1 pont)
és több köre már nem lehet, hiszen ekkor még el tudnánk hagyni belőle élet úgy, hogy összefüggő

maradjon, de ekkor 98 élű összefüggő gráfot kapnánk, ami – az előadáson tanultak szerint – nem lehetséges. (1 pont)
A kapott gráf tehát az eredeti gráf feszítőfája. (1 pont)
Az eredeti gráf minden köre legalább három élből áll (mivel a gráf egyszerű), (2 pont)
vagyis az elhagyandó élet legalább háromféleképp választhatjuk, s így legalább három különböző feszítőfát kaphatunk. (1 pont)

**3.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf síkbarajzolható-e.




* * * * *

Első megoldás. Megadjuk a gráf egy olyan részgráfját, ami topologikusan izomorf a $K_{3,3}$ gráffal. (1 pont)
A $b, d, f$ csúcsok alkotják a $K_{3,3}$ egyik osztályát, az $a, e, g$ csúcsok a másikat, (3 pont)
ezen kívül a részgráfban szerepel még a $h$ és az $i$ pont. A részgráf élei a megadott osztályok közt menő élek, a $gf$ él kivételével, ami nincs a gráfban, helyette a $gh$, $hi$, $if$ éleket vesszük be. (2 pont)
Ez a részgráf csakugyan topologikusan izomorf $K_{3,3}$-mal, hiszen a két osztály közötti élek a $gf$ él kivételével szerepelnek a gráfban, a $gf$ él pedig két ponttal felosztva szerepel. (2 pont)
Mivel a gráfnak van $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfja, a Kuratowski-tétel (könnyű iránya) szerint nem síkbarajzolható. (2 pont)

Ha valaki a fenti gondolatmenet egyes elemeit (akár egy meggyőző rajzzal) prezentálja, akkor megkaphatja a vonatkozó pontokat. A Kuratowski-tételt nem muszáj névvel említeni, de az, hogy min alapul a következtetés, kell hogy szerepeljen. Ha valaki azt mutatja meg, hogy a gráfnak nincs $K_5$-tel topologikusan izomorf részgráfja, de a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot nem találja meg, akkor a megállapításért kapjon 2 pontot.

Második megoldás. A gráf egyszerű és nincs benne háromszög, (3 pont)
hiszen páros gráf: a $b, d, f, h$ csúcsok alkotják az egyik osztályt, a többi csúcs a másikat. (3 pont)
Ha tehát síkbarajzolható lenne, akkor az előadáson tanultak szerint legfeljebb $2n - 4 = 14$ éle lehetne (ahol $n$ a csúcsok száma), (3 pont)
ami ellentmondás, hiszen a gráfnak 15 éle van. (1 pont)

**4.** Egy 20 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka 6. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni pontosan egy élet úgy, hogy a kapott gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája.

* * * * *

Egy gráfnak akkor és csak akkor van Euler-sétája, ha összefüggő (egész pontosan legfeljebb egy komponensében van él, de az apró pontatlanságért ne vonjunk le pontot) (1 pont)
és legfeljebb két csúcs foka páratlan. (1 pont)
Bárhogy is veszünk hozzá a gráfunkhoz egy élet, legfeljebb két páratlan fokú csúcs keletkezik (sőt, ha figyelünk az egyszerűségre, akkor pontosan kettő), (1 pont)
a kérdés tehát az, hogy az él hozzávételével garantálható-e, hogy a gráf összefüggő legyen. (1 pont)
A gráfnak nem lehet 3 vagy több komponense, (1 pont)
mivel minden komponensében legalább 7 csúcs van, (1 pont)
hiszen egy legfeljebb 6 csúcsú komponensben – a gráf egyszerűsége miatt – nem lehetne minden fok

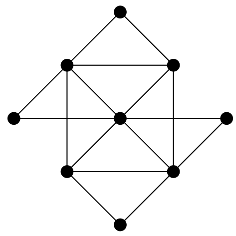
6. (1 pont)

A gráf tehát vagy összefüggő, vagy két komponense van. Az első esetben az eddigiek szerint egy tetszőleges nem behúzott él bevételével elérhető, hogy a gráf egyszerű maradjon és legyen Euler-sétája. (1 pont)

A második esetben pedig a két komponens egy-egy csúcsa közé kell élet behúznunk, (1 pont)

ekkor a kapott gráf már összefüggő lesz és nyilván egyszerű marad. (1 pont)

**5.** Döntsük el, hogy az alábbi gráfnak van-e Hamilton-köre, illetve Hamilton-útja.



* * * * *

Jó Hamilton-út 2 pont.

A 6 fokú és a két 5 fokú csúcsot elhagyva a gráf 4 komponensre esik szét, így a tanultak szerint nincs Hamilton-köre. (8 pont)

**6*.** Egy húsz csúcsú, egyszerű gráfban minden fok legalább 9. Mutassuk meg, hogy a gráfhoz hozzá lehet venni egy élet úgy, hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton-útja.

* * * * *

Vegyünk hozzá a gráfhoz két új csúcsot, (1 pont)

melyeket kössünk össze az összes régi csúccsal. (2 pont)

A kapott gráfnak 22 csúcsa van és minden foka legalább 11. (2 pont)

Mivel a gráf egyszerű is, (1 pont)

A Dirac-tétel szerint van egy $C$ Hamilton-köre. (1 pont)

A két újonnan hozzávett csúcsot elhagyva $C$ két útra esik szét, melyek az eredeti gráf összes csúcsát tartalmazzák. (2 pont)

A két út egy-egy végpontja közé egy élet felvéve Hamilton-utat kapunk. (1 pont)

**Bevezetés a számításelméletbe I.**
**Pótzárthelyi feladatok, második zh pótlása** — pontozási útmutató
2017. május 8.

**Általános alapelvek.**

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

**1.** Egy 99 csúcsú egyszerű gráfban két csúcs foka 3, a többi csúcs foka 4. Mutassuk meg, hogy a gráfnak van páratlan köre.

* * * * *

Egy gráfnak akkor és csak akkor van páratlan köre, ha a gráf nem páros, azt kell tehát megmutatnunk, hogy a szóban forgó gráf nem páros. (1 pont)
Tegyük fel ezért indirekten, hogy a gráf páros. (1 pont)
Ekkor definíció szerint a csúcsai szétoszthatók egy $A$ és egy $B$ osztályra úgy, hogy élek csak $A$ és $B$ között mennek. (1 pont)
A gráf élszáma ekkor nyilván azonos az $A$-beli és a $B$-beli csúcsok fokszámösszegével, (2 pont)
ez a két összeg tehát egymással is azonos. (1 pont)
A két 3 fokú csúcsnak emiatt külön osztályba kell kerülnie, (1 pont)
ellenkező esetben abban az osztályban, amelybe nem jut 3 fokú csúcs a fokösszeg 4-gyel osztható lenne, míg a másikban nem. (1 pont)
Mivel a 4 fokú csúcsok száma páratlan, nem kerülhet mindkét osztályba ugyanannyi belőlük, vagyis a két osztály fokösszege (noha modulo 4 azonosak) nem lehet azonos. (1 pont)
Ezzel ellentmondásra jutottunk, ami igazolja, hogy a gráf nem lehet páros. (1 pont)

**2.** Egy 8 csúcsú teljes gráfból töröljük két pontdiszjunkt 3 csúcsú kör éleit. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát.

* * * * *

Legyenek a két 3 csúcsú kör csúcsai $a, b, c$, illetve $d, e, f$, a gráf maradék két csúcsa $g$ és $h$. Ekkor az $ab$, $bc$, $ac$, illetve $de$, $ef$, $df$ élek egyike sem szerepel $G$-ben, (1 pont)
így jó színezést kapunk, ha az $a, b, c$ csúcsokat 1-esre, a $d, e, f$ csúcsokat 2-esre, $g$-t 3-asra, $h$-t pedig 4-esre színezzük. (3 pont)
A gráf kromatikus száma tehát legfeljebb 4. (1 pont)
Az $a, d, g, h$ csúcsok egy 4 elemű klikket alkotnak a gráfban, (3 pont)
ahonnan következik, hogy a kromatikus szám legalább 4. (1 pont)

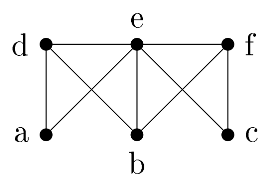
A két becslésből adódik, hogy a kromatikus szám pontosan 4. (1 pont)

**3.** Az 5 csúcsú teljes gráf egy élét megduplázzuk (vagyis az élet két párhuzamos éllel helyettesítjük). Határozzuk meg a kapott gráf élkromatikus számát.

* * * * *

Az 5 csúcsú teljes gráfban minden fok 4, (1 pont)
és a gráf egyszerű is, (1 pont)
így a Vizing-tétel szerint 5-élszínezhető. (1 pont)
A behúzott plusz élet nyilván színezhetjük egy hatodik színnel, (1 pont)
így a kérdéses gráf élkromatikus száma legfeljebb 6. (1 pont)
A gráfnak 11 éle van, (1 pont)
a maximális párosítás mérete pedig 2. (1 pont)
Ez utóbbi azért érdekes, mert bármely élszínezés egy osztálya párosítás, (1 pont)
ezért 5 szín nem elég az élszínezéshez, hiszen 5 színnel legfeljebb 10 élet színezhetünk meg. (1 pont)
Az élkromatikus szám így pontosan 6. (1 pont)

**4.** Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e.

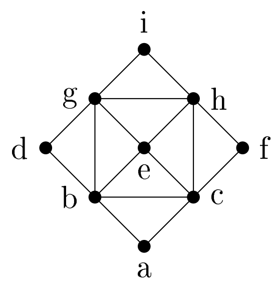



* * * * *

A gráf intervallumgráf, ennek igazolására meg kell adni egy alkalmas intervallumrendszert (elég egy jó rajz). Ha csak (jó) rajz szerepel, az ugyanakkor nem 10 pont, hanem csak 8. A maradék 2 pont annak jár, aki világossá teszi, hogy érti, mit bizonyít a rajz, pl. azzal a módszerrel ahogy megtalálta vagy mondjuk azzal, hogy leírja: sikerült a pontoknak úgy megfeleltetni intervallumokat, hogy a szomszédos pontoknak megfelelők nem diszjunktak, a nem szomszédosak meg diszjunktak.

A sikertelen próbálkozásokért is járhatnak részpontok, akkor is, ha valaki azt próbálja igazolni, hogy a gráf nem intervallumgráf. Különösen értékelendők a nem triviális trükkök: két (vagy még inkább három) nem összekötött ponthoz tartozó intervallumok felvétele. Aki csak színezés segítségével próbál a nem válasz mellett érvelni, az max 2 (de inkább csak 1) pontot kapjon, aki ugyanezzel érvelne az igen válasz mellett, az persze 0-t.

**5.** Adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt az alábbi gráfban.




* * * * *

A $\{b, c, g, h\}$ halmaz egy 4 elemű lefogó ponthalmaz a gráfban, (3 pont)
mert minden élnek legalább az egyik végpontját tartalmazza. (1 pont)
Az $ac, fh, ig, db$ élhalmaz egy 4 elemű párosítás, (2 pont)

hiszen semelyik két élnek nincs közös végpontja. (1 pont)
A megadott lefogó ponthalmaz, illetve párosítás bizonyítja, hogy $\tau(G) \leq 4$, illetve $\nu(G) \geq 4$, ahonnan a $\nu(G) \leq \tau(G)$ összefüggés szerint $\nu(G) = \tau(G) = 4$ és így a megadott lefogó ponthalmaz minimális. (3 pont)

Azt, hogy $\tau(G) \geq 4$, persze másképp is bizonyíthatjuk. Pl. a gráfnak 16 éle van és minden csúcs foka legfeljebb 5, vagy megmutathatjuk azt is, hogy $\alpha(G) \leq 5$ és használhatjuk az első Gallai-tételt. A bizonyítás maga minden esetben 6 pontot ér, ha valaki csak az $\alpha(G) + \tau(G) = 9$ egyenlőséget írja fel, az ebből 1-et kapjon.

**6*.** 2035-ben a VIK-es gólyabálon 601 lány és 601 fiú vesz részt, mindenkinek legalább 300 ellenkező nemű ismerőse van (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze lehet-e állítani 601 olyan fiú-lány párt, ahol a párok tagjai ismerősök?

* * * * *

Legyen $L$ a lányok, $F$ a fiúk halmaza és legyen $G$ az a páros gráf, melynek $L$ és $F$ az osztályai, két csúcs között pedig akkor vezessen él, ha a megfelelő fiú és lány ismeri egymást. A feladat annak eldöntésével ekvivalens, hogy ebben a páros gráfban van-e teljes párosítás. (1 pont)
A Hall-tétel (vagy a Frobenius-tétel) szerint ez akkor és csak akkor lesz így, ha minden $X \subseteq L$ esetén $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
301 elemű $X$ esetén azonban elképzelhető, hogy $|N(X)| < |X|$. (2 pont)
Osszuk $L$-et egy $L_1$ és egy $L_2$ halmazra, $F$-et egy $F_1$ és egy $F_2$ halmazra úgy, hogy $|L_1| = |F_1| = 300$, $|L_2| = |F_2| = 301$ és persze $L_1 \cup L_2 = L$, $F_1 \cup F_2 = F$ teljesüljön. (2 pont)
Legyenek továbbá ismerősei az összes $L_1$-beli lánynak az összes $F_2$-beli fiúk és legyenek ismerősei az összes $L_2$-beli lánynak az összes $F_1$-beli fiúk. (2 pont)
Ekkor mindenkinek legalább 300 ellenkező nemű ismerőse van (egész pontosan vagy 300 vagy 301), (1 pont)
de $300 = |N(L_2)| < |L_2| = 301$ miatt a gráfnak nincs teljes párosítása. (1 pont)

Ha valaki nem találja meg a jó példát, de megállapítja, hogy 300-nál kisebb méretű $X$ halmazt nem érdemes keresni, az ezért kaphat 1 pontot.