Gráfok és algoritmusok (VISZA028)

ZH javítókulcs (2021. 05. 07.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár.
Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Jelölje a véges (de nem feltétlenül páros) G gráf minden $e = uv$ éle esetén $v(e)$ azt, hogy az e él hányadik a $\prec_v$ preferenciarendezésben, és legyen $r(e) = u(e) + v(e)$. Tegyük fel, hogy $r(e) = 42$ teljesül G bármely e élére. Határozzuk meg G csúcsainak fokszámat, és bizonyítsuk be, hogy G-nek van stabil párosítása.

   Ha az uv élre $u(e) = 1$, akkor $r(e) = 42$ miatt $v(e) = 41$, ezért $d(v) \geq 41$. Ha $d(v) \geq 42$ volna, akkor lenne olyan f él, amire $v(f) = 42$, és ekkor $r(f) > 42$ volna, ami lehetetlen. Ezért $d(v) = 41$ minden olyan v csúcsra, amihez létezik olyan $e = uv$ él, hogy $u(e) = 1$. (2 pont)
   Legyen v tetszőleges csúcsa G-nek, és induljunk el a v-ből induló legjobb él mentén, majd haladjunk tovább mindig az adott csúcsból induló legjobb él mentén. Minden csúcsba a legrosszabb (41-dik legjobb) él mentén érkezünk meg, és G végessége folytán előbb-utóbb olyan csúcsba jutunk, ahol már jártunk. Ez csakis a v lehet, tehát $d(v) = 41$ teljesül G bármely v nemizolált csúcsára. (3 pont)
   Tekintsük G azon $e = uv$ éleinek M halmazát, amire $u(e) = v(e) = 21$. Világos, hogy M a G egy párosítása. (3 pont)
   Tegyük fel, hogy az $f = xy$ él blokkolja M-et. Ekkor $x(f) < 21$ és $y(f) < 21$, ezért $r(f) < 21 + 21 = 42$, ami ellentmondás. Ezek szerint M-hez nincs blokkoló él, tehát M stabil párosítás. Ezzel pedig igazoltuk a feladatban szereplő állítást. (2 pont)

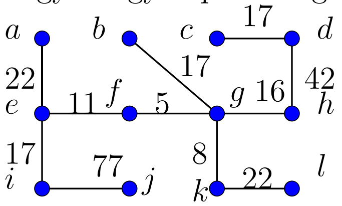
2. Tegyük fel, hogy az n-pontú G gráf egy maxvissza sorrendjéhez tartozó élcímkézés szerint G-nek pontosan $4n - 4$ olyan éle van, ami legfeljebb 4-es címkét kap. Bizonyítsuk be, hogy G 4-élösszefüggő.

   Az tanultuk, hogy az i-es címkéjű csúcsok egy feszítő erdejét adják annak a gráfnak, amit G-ből az i-nél kisebb címkéjű élek törlésével kapunk. (2 pont)
   Ezek szerint báremly i-re az i címkéjű élek száma legfeljebb $n - 1$, hiszen G bármely feszítőfájának ennyi az élszáma. (1 pont)
   Ha tehát a legfeljebb 4-es címkéjű élek száma $4n - 4$, akkor az 1-es, 2-es, 3-as és 4-es címkéjű élekből egyaránt $n - 1$ van, (2 pont)
   ezért a vizsgált élek G-nek négy éldiszjunkt feszítőfáját alkotják. (2 pont)
   Ha tehát G-ből legfeljebb 3 élt hagyunk el, akkor a 4 feszítőfa valamelyikét nem bántjuk, ezért a kapott gráf összefüggő marad. (2 pont)
   Azt kaptuk, hogy G bármely 3 élének törlését túléli, ezért G 4-élösszefüggő, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

3. Nevezzük a G gráfot *duplán faktorkritikusnak* (rövidítve *DFK*), ha G bármely két csúcsát elhagyva, a keletkező gráfnak van teljes párosítása. Tegyük fel, hogy G_1 és G_2 közös csúccsal nem rendelkező DFK gráfok. Bizonyítsuk be, hogy ha G_1 egy u_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy u_2 csúcsával és G_1 egy v_1 csúcsát azonosítjuk G_2 egy v_2 csúcsával, akkor az így kapott G gráf is DFK.

   Megmutatjuk, hogy G-nek tetszőleges u, v csúcsait elhagyva a kapott gráfnak lesz teljes párosítása. (1 pont)
   Ha $u, v \in V(G_1)$, akkor tekintsük a $G_2 - u_2 - v_2$ egy M teljes párosítását és a $G - u - v$ egy N teljes párosítását. A gráfok DFK tulajdonsága miatt vannak ilyen teljes párosítások. Ekkor $M \cup N$ a $G - u - v$ egy teljes párosítása. (4 pont)
   Az $u, v \in V(G_2)$ eset hasonlóan igazolható. (1 pont)
   Az az eset marad, amikor $u \in V(G_1)$ és $v \in V(G_2)$. Legyen ekkor M a $G_2 - v - v_2$ és N a $G_1 - u - u_1$ gráf teljes párosítása. A gráfok DFK tulajdonsága miatt vannak ilyen teljes párosítások. Ekkor $M \cup N$ a $G - u - v$ egy teljes párosítása. Ezzel igazoltuk a feladat állítását. (4 pont)

4. A G gráf Gomory-Hu-fája látható az ábrán. Határozzuk meg, legkevesebb hány élt kell behúzni G-be ahhoz, hogy az így kapott G' gráfnak legyen 4-élösszefüggő irányítása.



Nash-Williams tanult tétele szerint egy véges, irányítatlan G gráfnak pontosan akkor van 4-élösszefüggő irányítása, ha G irányítatlan értelemben 8-élösszefüggő. (3 pont)
A cél tehát az, hogy G-t minimális számú él behúzásával 8-élösszefüggővé tegyük. (2 pont)
A Gomory-Hu-fának egyetlen olyan éle van, ami 8-nál kisebb (konkrétan 5 élből álló) vágást határoz meg. Ezért legalább $8-5=3$ élt mindenképp be kell húzni G-be a 8-szoros élösszefüggőség eléréséhez. (2 pont)
A GH-fa fg éle által meghatározott vágás az egyik oldalon az a, e, f, i és j csúcsokat tartalmazza, a másik oldalon az összes többit. Ha tehát G egy vágása kettévágja az $\{a, e, f, i, j\}$ halmazt vagy a komplementerét, akkor G ezen vágása biztosan legalább 8 élt tartalmaz. G-nek ezért csupán egyetlen olyan vágása lehet, ami 8-nál kevesebb élt tartalmaz, konkrétan a Gomory-Hu-fa fg éle által meghatározott 5-élű vágás. (1 pont)
Ezért ha ezen vágás két oldal közé behúzunk 3 további élt, akkor G-ből egy 8-élösszefüggő gráfot kapunk. (1 pont)
A keresett minimális élszám tehát 3. (1 pont)

---

5. Tegyük fel, hogy u és v a 4-szeresen élösszefüggő G negyedfokú csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy u és v kicserélhetnek két szomszédot a 4-szeres élösszefüggőség megtartásával, azaz található u-nak két szomszédja (mondjuk a és b) illetve v-nek két szomszédja (mondjuk c és d) úgy, hogy a $G - ua - ub - vc - vd + uc + ud + va + vd$ gráf is 4-szeresen élösszefüggő.

Mivel G 4-élösszefüggő és $d(u)$ és $d(v)$ párosak, Lovász teljes leemelésről szóló tétele alkalmazható. (2 pont)
Jelölje G' az u, majd a v csúcs teljes leemelésével kapott, a tétel értelmében szintén 4-élösszefüggő gráfot. (3 pont)
Tanították, hogy egy $2k$-élösszefüggő gráfban k él összecsípése megőrzi a $2k$-élöf tulajdonságot, ezért a teljes leemelések után kapott gráf 4-élösszefüggő. (2 pont)
Ha u és v nem voltak szomszédosak, akkor 4 új él keletkezett: kettő (mondjuk piros) u szomszédain, és másik kettő (mondjuk zöld) v szomszédain. Ha most összecsípjük mindkét piros élt egy-egy zöld éllel, akkor ezzel elérjük a kívánt állapot, azaz, hogy u és v úgy cseréljenek ki két szomszédot, hogy a kapott gráf 4-élöf maradjon. (2 pont)
Ha u és v nem voltak szomszédosak, akkor a teljse leemelés után három él keletkezett, egy (mondjuk piros) u szomszédain, egy (mondjuk zöld) v szomszédain, és egy (mondjuk fehér), ami u és v egy-egy szomszédját köti össze. Ha most összecsípjük a piros és a zöld élt, majd az összecsípett csúcsból induló egyik élt a fehér éllel, akkor ismét célt érünk. (1 pont)