Megoldókulcs: Valószínűségszámítás GyakIV

2008. december 18.

1. Feladat

a.) Jelölje X v.v. a helyes válaszok számát és δ a vizsgán való átmenetel valószínűségét.(A:$\delta = 0.1$, B:$\delta = 0.15$)

- $X \sim \text{Binom}(10, 0.5)$. 5p
- $\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{10} \binom{10}{k} (\frac{1}{2})^{10} \leq \delta$, ahol $k \leq 10$. 3p
- Ebből kiszámolható, hogy $\mathbb{P}(X = 10) = (\frac{1}{2})^{10}$, $\mathbb{P}(X = 9) = 10(\frac{1}{2})^{10}$, $\mathbb{P}(X = 8) = 45(\frac{1}{2})^{10}$ és $\mathbb{P}(X = 7) = 120(\frac{1}{2})^{10}$. Így $k = 8$, mivel $\mathbb{P}(X \geq 7) = \frac{176}{1024} = 0.171875$. 4p

b.) Legyen $p = \mathbb{P}(X \geq 8) = 0.054$ a nem tanuló diák sikeres beugrójának valószínűsége. 1p
Keresett valószínűség: $(1-p)^3 + 3(1-p)^2 p = 0.9915$ 7p

Aki rossz p-vel számol (pl. nem oldotta meg az a.) részét), de a képlet jó az kapjon 7 pontot a b.) részre.

2. Feladat

A. csoport

$\mathbb{P}\big(\bar{A} + B\big) = \mathbb{P}\big(\bar{A}\big) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\big(\bar{A}B\big)$ 3p
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{9}$ 1p
$\mathbb{P}\big(\bar{A}\big) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{8}{9}$ 1p
$\mathbb{P}(B) = 3\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$, mivel $3\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$ 4p
$\mathbb{P}\big(\bar{A}B\big) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = \frac{1}{3} - \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{9} = \frac{8}{27}$ 7p
Összegezve:
$\mathbb{P}\big(\bar{A} + B\big) = \mathbb{P}\big(\bar{A}\big) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}\big(\bar{A}B\big) = \frac{8}{9} + \frac{1}{3} - \frac{8}{27} = \frac{25}{27}$ 4p

B. csoport

$\mathbb{P}\big(A + \bar{B}\big) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(\bar{B}\big) - \mathbb{P}\big(A\bar{B}\big)$ 3p
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ 1p
$\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, mivel $2\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$ 4p
$\mathbb{P}\big(\bar{B}\big) = \frac{1}{2}$ 1p
$\mathbb{P}\big(A\bar{B}\big) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB) = \frac{1}{4} - \mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 7p
Összegezve:
$\mathbb{P}\big(A + \bar{B}\big) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(\bar{B}\big) - \mathbb{P}\big(A\bar{B}\big) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ 3p

3. Feladat

- $X \sim \text{Geom}(p)$ (A:$p = \frac{1}{3}$, B:$p = \frac{1}{2}$) 5p
- Eloszlás:$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, ahol $k \geq 1$. 5p

- $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ A:3, B:2. 5p
- A: e-nél $\mathbb{P}(X \leq e) = \mathbb{P}(X \leq 2) = p + p(1-p) = \frac{5}{9}$
  B: π-nél $\mathbb{P}(X \leq \pi) = \mathbb{P}(X \leq 3) = p + p(1-p) + p(1-p)^2 = \frac{7}{8}$ 5p

4. Feladat
A csoport:

a.) $\mathbb{E}[Z] \overset{1p}{=} \mathbb{E}[(3X-Y)^2] \overset{1p}{=} \mathbb{E}[9X^2 - 6XY + Y^2] \overset{2p}{=} 9\mathbb{E}[X^2] - 6\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] \overset{2p}{=} 9\mathbb{E}[X^2] - 6\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2] \overset{1p}{=} 9\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] = 10\mathbb{E}[X^2] = 10\sigma^2(X) \overset{3p}{=} \frac{10}{3}$

b.) $3X - Y \in \{-4, 4\}$ 2p
$3X \sim U(-3,3)$ 2p
$f_{3X-Y}(t) \overset{2p}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{3X}(z) f_{-Y}(t-z)dz \overset{2p}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{6}\mathbb{I}_{\{-3\leq z\leq 3\}} \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{-1\leq t-z\leq 1\}}dz \overset{3p}{=} \int_{\max\{t-1,-3\}}^{\min\{3,t+1\}} \frac{1}{12}dz$
Ebből
$$f_{3X-Y}(t) = \begin{cases} \frac{t+4}{12}, & \text{ha } t \in (-4,-2] \\ \frac{1}{6} & \text{ha } t \in (-2,2) \qquad \text{5p} \\ \frac{4-t}{12}, & \text{ha } t \in [2,4) \qquad \text{(ez nem kell a feladathoz)} \end{cases}$$
és ez alapján $\mathbb{P}(3X - Y < 1) = 2\frac{1}{6}\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ 1p

B csoport:

a.) $\mathbb{E}[Z] \overset{1p}{=} \mathbb{E}[(2X-Y)^2] \overset{1p}{=} \mathbb{E}[4X^2 - 4XY + Y^2] \overset{2p}{=} 4\mathbb{E}[X^2] - 4\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] \overset{2p}{=} 4\mathbb{E}[X^2] - 4\mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2] \overset{1p}{=} 4\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] = 5\mathbb{E}[X^2] = 5\sigma^2(X) \overset{3p}{=} \frac{20}{3}$

b.) $2X - Y \in \{-6, 6\}$ 2p
$2X \sim U(-4,4)$ 2p
$f_{2X-Y}(t) \overset{2p}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{2X}(z) f_{-Y}(t-z)dz \overset{2p}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{8}\mathbb{I}_{\{-4\leq z\leq 4\}} \frac{1}{4}\mathbb{I}_{\{-2\leq t-z\leq 2\}}dz \overset{3p}{=} \int_{\max\{t-2,-4\}}^{\min\{4,t+2\}} \frac{1}{32}dz$
Ebből
$$f_{2X-Y}(t) = \begin{cases} \frac{6+t}{32}, & \text{ha } t \in (-6,-2] \\ \frac{1}{8} & \text{ha } t \in (-2,2) \qquad \text{5p} \\ \frac{6-t}{32}, & \text{ha } t \in [2,6) \qquad \text{(ez nem kell a feladathoz)} \end{cases}$$
és ez alapján $\mathbb{P}(2X - Y < -1) = 4\frac{1}{8}\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ 1p

5. Feladat

A

	0	1	2	
1	$\frac{9}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{11}{36}$
2	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{7}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{5}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
6	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	

B

	0	1	2	
1	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{9}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{11}{36}$
	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	

Minden helyes érték a táblázatban 0.5 pontot ér, az 5. helyes érték után(pl: 7 db 0-át eltalálja az A részben az 1 pont), a marginális eloszlások értékei is. Ez összesen 11 pont. Ha valamit elszámol, és emiatt mind a két marginális eloszlása rossz lesz, de az azokat jól számolta (összeadta), akkor ne 1.5 pontot, hanem csak 0.5 pontot vonjunk le.

$cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$ 2p, ahol

A: $\mathbb{E}[XY] = (\frac{2}{36}(1+2+3+4+5) + 2 \cdot 6\frac{1}{36}) = \frac{7}{6}$ 2p

B: $\mathbb{E}[XY] = (\frac{2}{36}(2+3+4+5+6) + 2 \cdot \frac{1}{36}) = \frac{7}{6}$ 2p

A,B:$\mathbb{E}[X] = \frac{10}{36} + 2\frac{1}{36} = \frac{1}{3}$ 2p

és

A:$\mathbb{E}[Y] = \frac{11+9\cdot 2+7\cdot 3+5\cdot 4+3\cdot 5+6}{36} = \frac{91}{36}$ 2p

B:$\mathbb{E}[Y] = \frac{1+3\cdot 2+5\cdot 3+7\cdot 4+9\cdot 5+11\cdot 6}{36} = \frac{161}{36}$ 2p

Összegezve:

A:$cov(X,Y) = \frac{35}{108}$ 1p

B:$cov(X,Y) = \frac{-35}{108}$ 1p