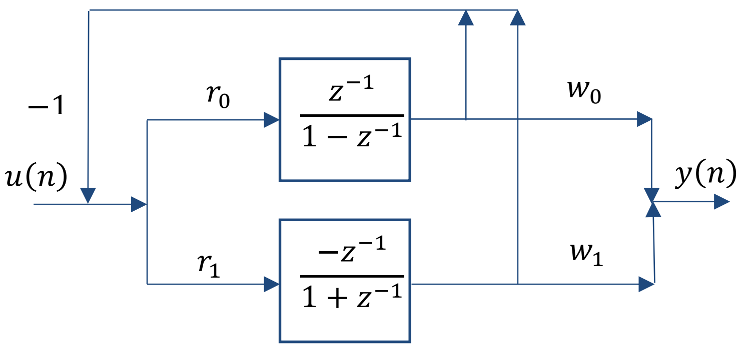
Méréselmélet 2. zárthelyi pótlás 2021.05.18.

1. Rajzolja fel a $\mathrm{H(z)} = \frac{\mathrm{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}}{\mathrm{1 + (b_1 + b_2 - 1) z^{-1}}}$ átviteli függvényt megvalósító direkt számítási struktúra jelfolyam gráfját (max. 2 pont)! Valósítsa meg ezt az átviteli függvényt rezonátor alapú struktúrával is (max. 4 pont)! Rajzolja le ez utóbbi blokkvázlatát is (max. 1 pont)! Határozza meg a szűrő átvitelét mintavételi frekvencia negyedénél (max. 1 pont)! Hogyan kell módosítani az átviteli függvény nevező polinomját annak érdekében, hogy az átviteli függvény mindentáteresztő tulajdonságú legyen? Igazolja a mindentáteresztő tulajdonságot (max. 2 pont)!

Megoldás:

A rezonátor alapú struktúra egy lehetséges változatának jelfolyamgráfja



A rezonátor alapú megvalósítás összefüggései:

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + (b_1 + b_2 - 1) z^{-1}} = \frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0 - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}} w_1}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} - \frac{r_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{(1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} w_0 - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1} w_1}{1 - z^{-2} + (1 + z^{-1}) r_0 z^{-1} - (1 - z^{-1}) r_1 z^{-1}} =$$

$$= \frac{(r_0 w_0 - r_1 w_1) z^{-1} + (r_0 w_0 + r_1 w_1) z^{-2}}{1 + (r_0 - r_1) z^{-1} + (r_0 + r_1 - 1) z^{-2}}$$

$r_0 - r_1 = b_1 + b_2 - 1$, $r_0 + r_1 - 1 = 0$, ahonnan

$$r_0 = \frac{b_1 + b_2}{2}, r_1 = \frac{2 - b_1 - b_2}{2},$$

ill.

$$w_0 = 1, \qquad w_1 = \frac{b_2 - b_1}{2 - b_1 - b_2},$$

Az átviteli függvény értéke a mintavételi frekvencia negyedénél:

$$\mathrm{H(z)}|_{z=j} = \frac{-j\mathrm{b_1} - \mathrm{b_2}}{1 - j(\mathrm{b_1} + \mathrm{b_2} - 1)}$$

Az átviteli függvény mindentáteresztő tulajdonságú, ha $\mathrm{b_2} = 1$.

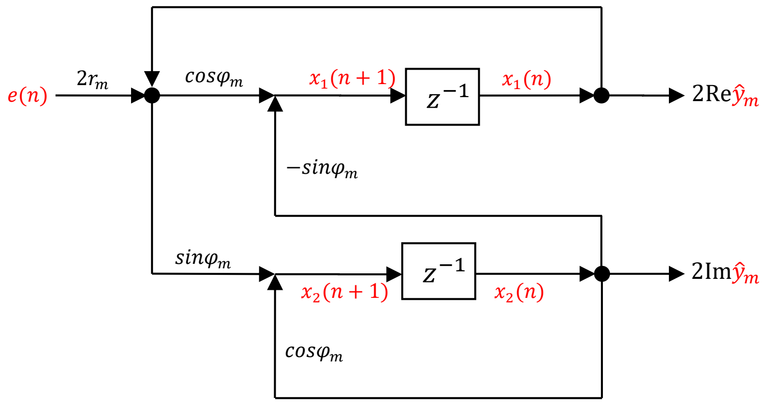
$$|\mathrm{H(z)}|^2 = \frac{\mathrm{b_1 z^{-1} + z^{-2}}}{\mathrm{1 + b_1 z^{-1}}} \frac{\mathrm{b_1 z^{+1} + z^{+2}}}{\mathrm{1 + b_1 z^{+1}}} = \frac{\mathrm{b_1 + z^{-1}}}{\mathrm{1 + b_1 z^{-1}}} \frac{\mathrm{b_1 + z^{+1}}}{\mathrm{1 + b_1 z^{+1}}} = 1$$

2. A megfelelő elsőfokú, komplex együtthatós rezonátorok átviteli függvényéből ($\frac{r_m z_m z^{-1}}{1 - z_m z^{-1}}$) kiindulva vezesse le egy másodfokú, valós együtthatós diszkrét rezonátor átviteli függvényét (max. 2 pont)! Mutassa meg, hogy az $A = \begin{bmatrix} cos\varphi_m & -sin\varphi_m \\ sin\varphi_m & cos\varphi_m \end{bmatrix}$ állapotátmenet mátrixszal, $G = 2r_m \begin{bmatrix} cos\varphi_m \\ sin\varphi_m \end{bmatrix}$ becsatoló mátrixszal, valamint $\boldsymbol{C} = [1 \quad 0]$ kicsatoló mátrixszal jellemezhető, ún. ortogonális rezonátor átviteli függvénye

ugyanilyen alakú (max. 4 pont)! Rajzoljon fel egy olyan számítási vázlatot, amely az ortogonális rezonátort valósítja meg (max. 2 pont)! Adja meg a struktúra transzponáltjának mátrixait is (max. 1 pont)!

Megoldás:

$$\frac{r_m z_m z^{-1}}{1-z_m z^{-1}}+\frac{r_m z_m^{-1} z^{-1}}{1-z_m^{-1} z^{-1}}=2r_m\frac{z^{-1}\cos\phi_m-z^{-2}}{1-2z^{-1}\cos\phi_m+z^{-2}}$$



$$\begin{bmatrix} zx_1(z) \\ zx_2(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\phi_m & -\sin\phi_m \\ \sin\phi_m & \cos\phi_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(z) \\ x_2(z) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2r_m\cos\phi_m \\ 2r_m\sin\phi_m \end{bmatrix}e(z),$$

ahonnan a második egyenlet: $zx_2(z)=x_1(z)\sin\phi_m+x_2(z)\cos\phi_m+2r_m e(z)\sin\phi_m$. Ebből $x_2(z)=\frac{1}{z-\cos\phi_m}[x_1(z)\sin\phi_m+2r_m e(z)\sin\phi_m]$, amit az első egyenletbe visszahelyettesítve:

$$zx_1(z)=x_1(z)\cos\phi_m-\frac{\sin\phi_m}{z-\cos\phi_m}[x_1(z)\sin\phi_m+2r_m e(z)\sin\phi_m]+2r_m e(z)\cos\phi_m$$

Innen

$$x_1(z)\left[z-\cos\phi_m+\frac{\sin^2\phi_m}{z-\cos\phi_m}\right]=2r_m e(z)\left[\cos\phi_m-\frac{\sin^2\phi_m}{z-\cos\phi_m}\right]$$

ahonnan:

$$\frac{x_1(z)}{e(z)}=2r_m\frac{z\cos\phi_m-1}{z^2-2z\cos\phi_m+1}=2r_m\frac{z^{-1}\cos\phi_m-z^{-2}}{1-2z^{-1}\cos\phi_m+z^{-2}}$$

A struktúra transzponáltjának mátrixai:

$$\boldsymbol{A_t}=\begin{bmatrix} cos\varphi_m & sin\varphi_m \\ -sin\varphi_m & cos\varphi_m \end{bmatrix},\ \mathbf{G_t}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{C_t}=2r_m[cos\varphi_m \quad sin\varphi_m]$$

3. Tervezzen véges impulzusválaszú szűrőt a frekvencia-mintavételi eljárás segítségével! A szűrő átvitele nulla frekvencián egységnyi, $f_m/6$, $f_m/3$ és $f_m/2$ frekvencián (f_m a mintavételi frekvencia) pedig nulla. Rajzolja fel a szűrőt magvalósító Lagrange struktúra blokkvázlatát (max. 2 pont), és vezesse le az amplitúdó- és fáziskarakterisztikáját megadó összefüggést (max. 3 pont)! Mekkora a szűrő átvitelének abszolút értéke $0.1*f_m$ frekvencián (max. 2 pont)?

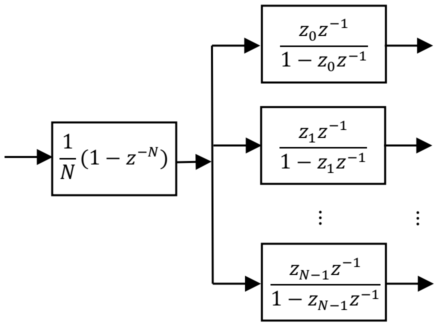
Megoldás:

A specifikációt teljesítő szűrő átviteli függvénye:

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{6}\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}},$$

A Langrange struktúra általános blokkvázlata, amiből most csak a nulla frekvenciás rezonátort kell megvalósítani, mivel a többi „kicsatolása” nulla:

$$N=6,\quad z_m=e^{j\frac{\pi}{3}m}, m=0,1,\dots,5$$



$$H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{z^{-1}}{6}\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}\bigg|_{z=e^{j\omega T}} =$$

$$= \frac{e^{-j\frac{1}{2}\omega T}}{6} e^{-j3\omega T} \frac{sin3\omega T}{sin\frac{1}{2}\omega T}$$

Az amplitúdókarakterisztika $\frac{1}{6}\left|\frac{sin3\omega T}{sin\frac{1}{2}\omega T}\right|$, a fáziskarakterisztika $\phi(\omega) = -\frac{7}{2}\omega T$ az $\omega T = k\frac{\pi}{3}$ helyen $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (az előjelváltás miatt) π fázisugrással, kivéve azokat a helyeket, ahol $sin\frac{\omega T}{2}$ is előjelet vált.

A szűrő átvitelének abszolút értéke $0.1 * f_m$ frekvencián: $\frac{1}{6}\left|\frac{sin0.6\pi}{sin0.1\pi}\right| \cong 0.513$, fázisa: -0.7π (radián).

4. Adja meg annak a jelnek a diszkrét időfüggvényét, amelyet az $(1,1,1,1,1)$ értékű Fourier transzformált jellemez (max. 3 pont)!

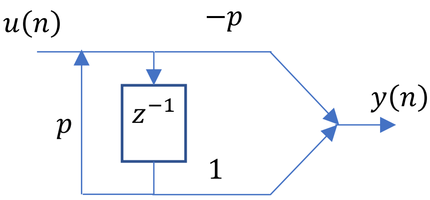
Megoldás:

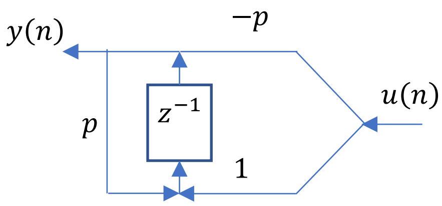
$$1 * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}3n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}4n} =$$
$$= 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}0n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}1n} + 1 * e^{-j\frac{2\pi}{5}1n} + 1 * e^{j\frac{2\pi}{5}2n} + 1 * e^{-j\frac{2\pi}{5}2n} =$$
$$= 1 + 2cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + 2cos\left(\frac{4\pi}{5}n\right)$$

5. Írja fel egy olyan mindentáteresztő hálózat átviteli függvényét, amelynek egyetlen pólusa a z sík $p = 0.8 + j0$ koordinátájú pontjában helyezkedik el, és az átvitelének abszolút értéke 1 (max. 1 pont)! Rajzolja fel a hálózat jelfolyamgráfját a direkt struktúrának, valamint transzponáltjának megfelelően! (max. 2 pont)! Adja meg mindkét hálózat állapotváltozós leírását! Mindkét hálózat esetében vezesse le, hogy nulla bemenet esetén - végtelen idő alatt - mennyi energia nyerhető ki belőlük (max. 3 pont)! Alkalmas transzformációval hozzon létre olyan beállítást, amely esetén a kivehető energia az állapotváltozó négyzetével egyezik (max. 2 pont)! Adjon meg strukturálisan passzív realizációt is (max. 2 pont)! Adja meg a kivehető energiát erre a realizációra is. Melyik elrendezésből vehető ki a legtöbb energia (max. 1 pont)?

Megoldás:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}}$$





$x(n+1) = px(n) + u(n)$

$y(n) = x(n) - p\,x(n+1) = (1-p^2)x(n) - pu(n)$

$A = p, C = 1 - p^2$

$x(n+1) = px(n) + (1-p^2)u(n)$

$y(n) = x(n) - pu(n)$

$A_t = p, C_t = 1$

Az $A^T P A + C^T C = P$ összefüggéssel összhangban:

$pPp + (1-p^2)^2 = P \rightarrow P = 1 - p^2 = 0.36$

$pP_t p + 1 = P_t \rightarrow P_t = \frac{1}{1-p^2} = \frac{25}{9} \cong 2.78$

A kivehető energia:

$0.36x^2$

$\cong 2.78x^2$

A hasonlósági transzformáció mátrixa:

$R = \sqrt{1-p^2}$

$A' = p, C' = \sqrt{1-p^2}$

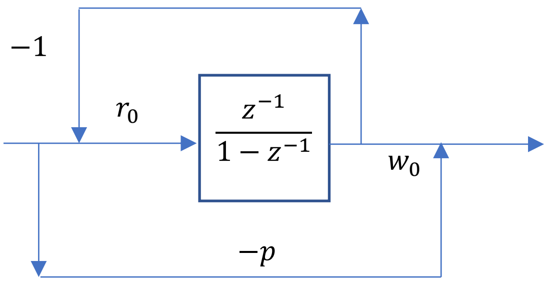
$R_t = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}$

$A'_t = p, C'_t = \sqrt{1-p^2}$

Ezzel $A^T A + C^T C = I$, mert

$p^2 + 1 - p^2 = 1$

$p^2 + 1 - p^2 = 1$



A strukturálisan passzív realizációhoz:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - p}{1 - pz^{-1}} = -p + \frac{(1-p^2)z^{-1}}{1 - pz^{-1}}$$

$$\frac{\frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}} w_0}{1 + \frac{r_0 z^{-1}}{1 - z^{-1}}} = \frac{r_0 z^{-1}}{1 - (1 - r_0) z^{-1}} w_0 = \frac{(1-p^2)z^{-1}}{1 - pz^{-1}}$$

Ebből $r_0 = 1 - p = 0.2$, $w_0 = 1 + p = 1.8$

A kinyerhető energiához: $A = 1 - r_0 = p, C = 1 + p$

$pPp + (1+p)^2 = P \rightarrow P = \frac{1+p}{1-p} = 9$, amivel a kinyerhető energia: $9x^2$

Alternatív számolás: $(1+p)^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^{2k} = \frac{1+p}{1-p}$

A rezonátoros struktúra transzponáltjának alkalmazása esetén: $A_t = p, C_t = r_0 = 1 - p$

$pP_t p + (1-p)^2 = P_t \rightarrow P = \frac{1-p}{1+p} = \frac{1}{9} \cong 0.11$, amivel a kinyerhető energia: $0.11x^2$

A legtöbb energia a strukturálisan passzív, rezonátoros elrendezésből nyerhető ki, és ennek megfelelően – ugyanakkora kimeneti teljesítmények esetén - ebben lesznek a legalacsonyabbak a belső jelszintek.

Az elégségeshez 16 pont kell.